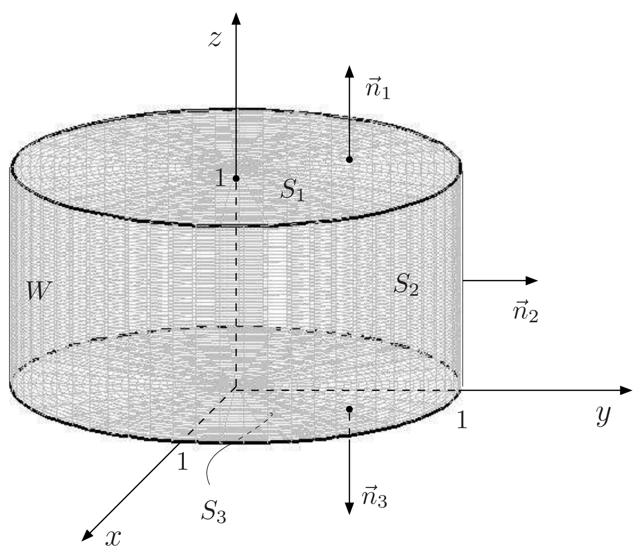
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 13 – Tutor

Exercício 1: Verifique o teorema de Gauss calculando a integral de superfície e a integral tripla para o campo $\vec{F}(x,y,z) = 2x\,\vec{\mathbf{i}} + 2y\,\vec{\mathbf{j}} + z^2\,\vec{\mathbf{k}}$ e S é a superfície da seguinte região:

$$W = \left\{(x,y,z);\ x^2+y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq z \leq 1\right\}\ .$$

Solução: O esboço do sólido W está representado na figura que se segue.



Vemos que a fronteira de W é constituída de três superfícies: $\partial W = S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, como mostra a figura acima. Orientando positivamente $S = \partial W$, devemos verificar que

$$\iint_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\; dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\; dV$$

ou

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\; dS + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n_2}\; dS + \iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n_3}\; dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\; dV\ .$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\; dS$

Temos que $S_1: z=1$, $(x,y)\in D: x^2+y^2 \leq 1$, $\vec{n_1} = \vec{k} = (0,0,1)$ e $dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy =$

$= \sqrt{1+0+0}\,dxdy = dxdy$. Então,

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\ dS = \iint_D \left(2x, 2y, 1^2\right)\cdot(0,0,1)\ dxdy = \iint_D (0+0+1)\ dxdy =$$

$$= \iint_D dxdy = A(D) = \pi\cdot 1^2 = \pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n_2}\ dS$

Temos que $S_2 : x^2+y^2 \leq 1$ com $0 \leq z \leq 1$. Então, $\vec{n_2}$ é exterior a W. Logo $\vec{n_2} = \dfrac{(x,y,0)}{1} = (x,y,0)$. Assim,

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n_2}\ dS = \iint_{S_2} \left(2x, 2y, z^2\right)\cdot(x,y,0)\ dS = \iint_{S_2} \left(2x^2+2y^2\right)dS =$$

$$= 2\iint_{S_2} \left(x^2+y^2\right)dS\,.$$

Como x^2+y^2 em S_2 é igual a 1, temos:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n_2}\ dS = 2\iint_{S_2} dS = 2A(S_2) = 2(2\pi rh)$$

com $r = 1$ e $h = 1$. Logo,

$$\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n_2}\ dS = 4\pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n_3}\ dS$

Temos que $S_3 : z = 0$, $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1$. Como $\vec{n_3}$ aponta para baixo, então $\vec{n_3} = -\vec{k} = (0,0,-1)$. Temos, também, que $dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+0+0}\,dxdy = dxdy$. Então,

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n_3}\ dS = \iint_D \left(2x, 2y, 0^2\right)\cdot(0,0,-1)\ dxdy = \iint_D (0+0+0)\ dxdy = 0\,.$$

Portanto,

$$\iint_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \pi + 4\pi + 0 = 5\pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iiint_W \text{div}\vec{F}\ dV$

Temos que div$\vec{F} = 2 + 2 + 2z = 4 + 2z$. A descrição de W em coordenadas cilíndricas é $W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$. Como $dV = rdrd\theta dz$, então,

$$\iiint_W \text{div}\vec{F}\ dV = \iiint_W (4+2z)\ dV = \iiint_{W_{r\theta z}} (4+2z)\ rdrd\theta dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4+2z)\ rdzd\theta dr = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4+2z)\ dzd\theta dr =$$

$$= \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \left[4z + z^2\right]_0^1 d\theta dr = 5 \int_0^1 r \int_0^{2\pi} d\theta dr = 10\pi \int_0^1 r\ dr = 10\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 5\pi\,.$$

Assim, o teorema de Gauss está verificado.

Exercício 2: Aplique o teorema da divergência para obter o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, orientada positivamente:

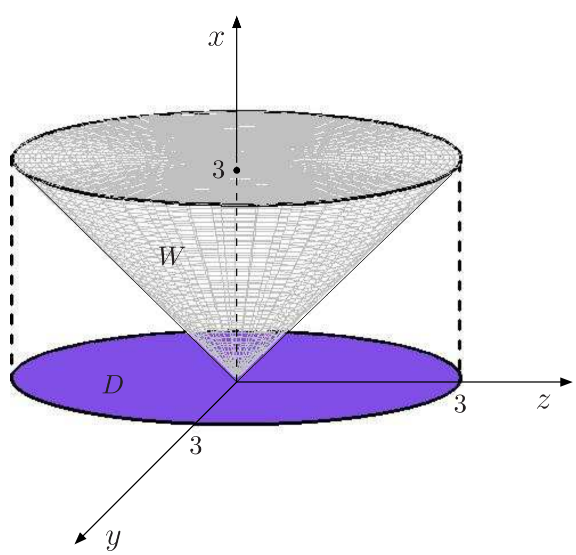
a) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y^2)\,\vec{\mathbf{i}} + (y^2 - 2xy)\,\vec{\mathbf{j}} + (4z - 2yz)\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo cone $x = \sqrt{y^2+z^2}$ e pelo plano $x = 3$.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + y \operatorname{sen} z)\,\vec{\mathbf{i}} + (y^3 + z \operatorname{sen} x)\,\vec{\mathbf{j}} + z^3\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2 + \cos z)\,\vec{\mathbf{i}} + (x^2 y + \operatorname{sen} z)\,\vec{\mathbf{j}} + e^y\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

Solução:

a) Invertendo os eixos coordenados, temos o esboço de W na figura que se segue.



Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $S = \partial W$ está orientada positivamente, então, pelo teorema de Gauss temos:

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\, dV$$

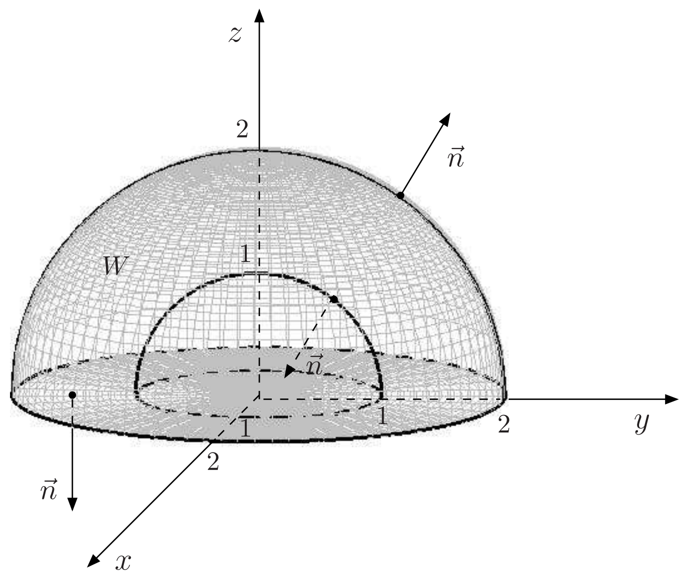
onde $\text{div}\vec{F} = 2x + 2y - 2x + 4 - 2y = 4$. Logo,

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 4 \iiint_W dV = 4V(W) = 4\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$

onde $r = 3$ e $h = 3$. Assim,

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 36\pi\,.$$

b) O esboço do sólido W está representado na figura que se segue.



Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $S = \partial W$ está orientada positivamente, então pelo teorema de Gauss, temos

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\, dV$$

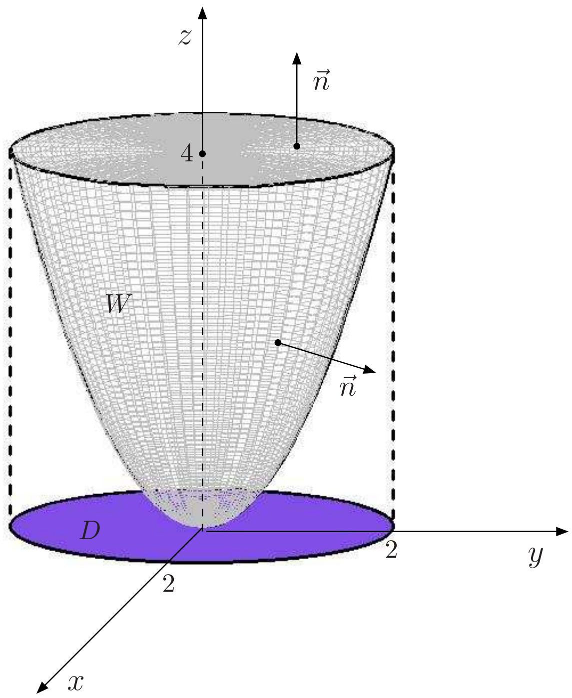
onde $\text{div}\vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Passando para coordenadas esféricas, temos $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\phi d\theta$ e $W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \end{cases}$. Então,

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 3 \iiint_W \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV = 3 \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \left(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\right)\, d\rho d\phi d\theta =$$

$$= 3 \int_1^2 \rho^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi d\rho = 6\pi \int_1^2 \rho^4 \Big[\underbrace{-\cos\phi}_{=\,1}\Big]_0^{\pi/2} d\rho =$$

$$= 6\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 = \frac{6\pi}{5}(32 - 1) = \frac{186\pi}{5}\,.$$

c) O esboço de W está representado na figura que se segue.



Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $S = \partial W$ está orientada positivamente, então, pelo teorema de Gauss temos:

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \text{div}\vec{F} \, dV$$

onde div$\vec{F} = y^2 + x^2 = x^2 + y^2$. Passando para coordenadas cilíndricas, temos que $x^2 + y^2 = r^2$, $dV = rdrd\theta dz$ e $W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$. Então,

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_W \left(x^2 + y^2\right) dV = \iiint_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r \, drd\theta dz =$$

$$= \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 dzd\theta dr = \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right) d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^3 \left(4 - r^2\right) dr = 2\pi \int_0^2 \left(4r^3 - r^5\right) dr = 2\pi \left[\frac{4r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right]_0^2 =$$

$$= 2\pi \left(16 - \frac{32}{3}\right) = \frac{32\pi}{3} \, .$$

Exercício 3: Fechando, de uma forma adequada, as superfícies abertas dadas e utilizando o teorema de Gauss, calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, com $\vec{n}$ exterior à superfície fechada

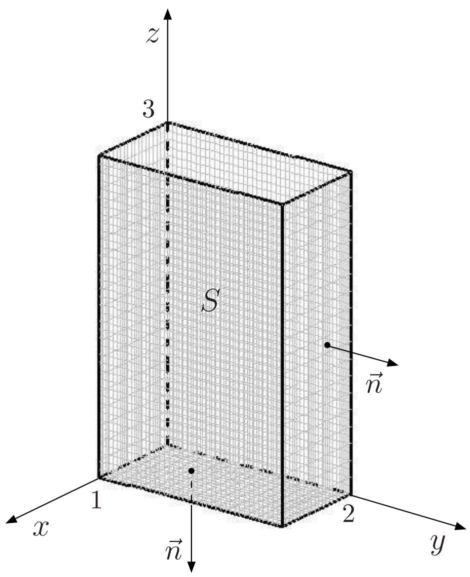
a) $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,2z)$, onde S é a superfície do paralelepípedo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$, exceto a face superior;

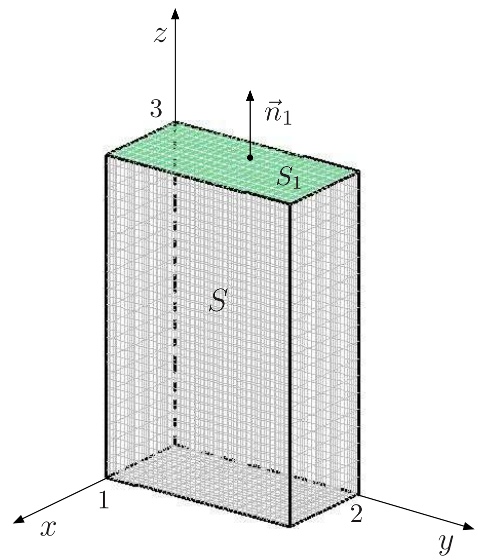
b) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, onde $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com $z \leq 0$;

c) $\vec{F}(x,y,z) = z\,\text{arctg}(y^2)\,\vec{\mathbf{i}} + z^3\ln(x^2+1)\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$, onde $S : z = 2 - x^2 - y^2$, com $1 \leq z \leq 2$.

Solução:

a) O esboço de S está representado na figura que se segue.





Consideremos $\overline{S} = S \cup S_1$, onde S_1 é dada por $S_1 : z = 3$, $(x,y) \in D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$, orientada com $\vec{n_1} = \vec{k}$ e $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+0+0}\,dxdy = dxdy$.

Seja W o sólido limitado por $\overline{S}$. Como $\partial W = \overline{S}$ está orientada positivamente e $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então, pelo teorema de Gauss, temos:

$$\iint_{\overline{S}=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\;dV$$

onde $\text{div}\vec{F} = 0 + 0 + 2 = 2$. Logo,

$$\iint_{\overline{S}=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS = 2\iiint_W dV = 2V(W) = 2(1\cdot 2\cdot 3) = 12$$

ou

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS + \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\;dS = 12\,.$$

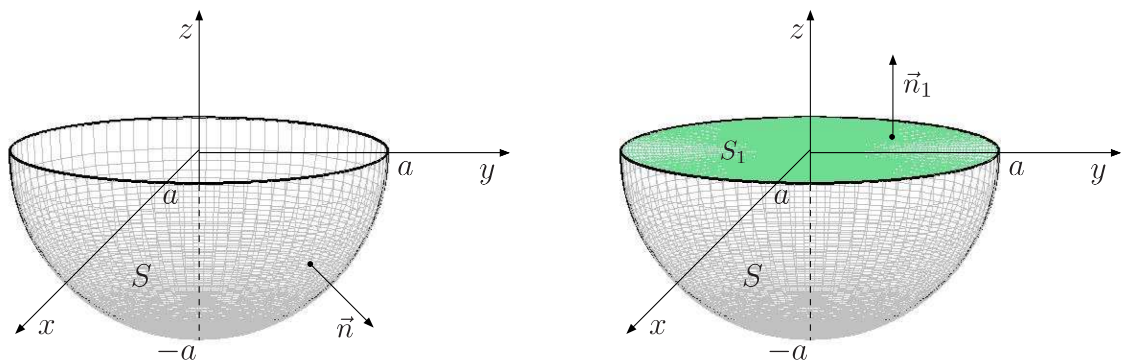
Mas,

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\ dS = \iint_D (0,0,2\cdot 3)\cdot(0,0,1)\ dxdy = \iint_D 6\ dxdy = 6A(D) = 6(1\cdot 2) = 12\,.$$

Logo,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = 12 - 12 = 0\,.$$

b) O esboço de S está representado na figura que se segue.



Consideremos $\overline{S} = S \cup S_1$, onde S_1 é dada por $S_1 : z = 0$, $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq a^2$, orientada com $\vec{n_1} = \vec{k}$ e $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1+0+0}\, dxdy = dxdy$.

Seja W o sólido limitado por $\overline{S}$. Como a fronteira de W, $\overline{S} = \partial W$, está orientada positivamente e $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então, pelo teorema de Gauss, temos:

$$\iint_{\overline{S}=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\ dV$$

onde $\text{div}\vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$. Logo,

$$\iint_{\overline{S}=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iiint_W 3\ dV = 3V(W) = 3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 2\pi a^3$$

ou

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS + \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\ dS = 2\pi a^3\,.$$

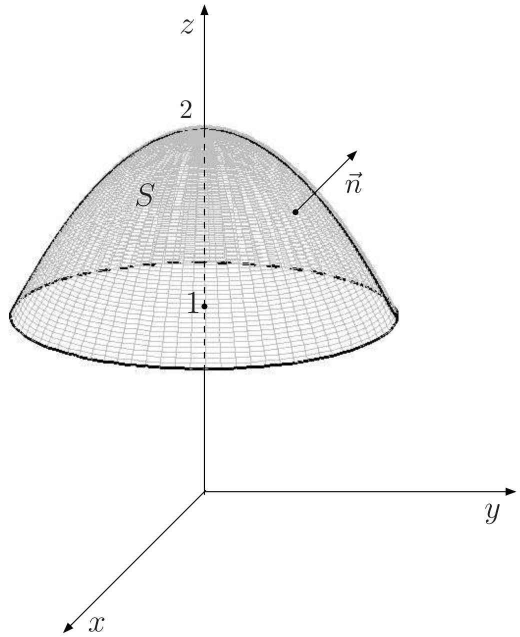
Mas,

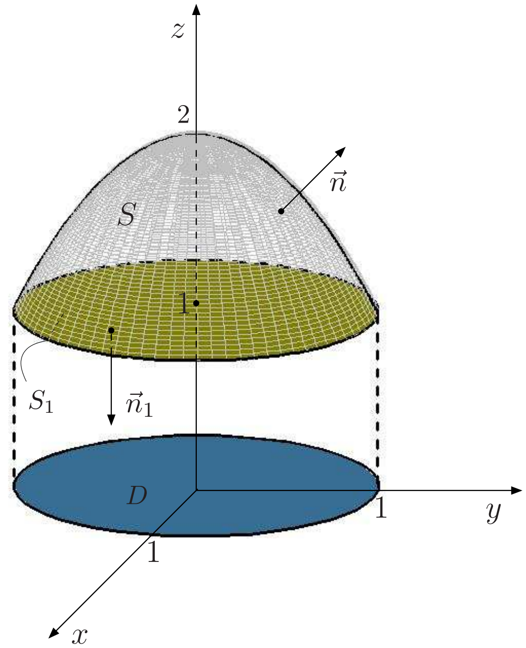
$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n_1}\ dS = \iint_D (x,y,0)\cdot(0,0,1)\ dxdy = \iint_D 0\ dxdy = 0$$

logo:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = 2\pi a^3\,.$$

c) O esboço de S está representado na figura que se segue.





Consideremos $\overline{S} = S \cup S_1$, onde S_1 é dada por $S_1 : z = 1$, $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$, orientada com $\vec{n_1} = -\vec{k} = (0, 0, -1)$ e onde $dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 0 + 0}\, dxdy = dxdy$.

Seja W o sólido limitado por $\overline{S}$. Como $\overline{S} = \partial W$ está orientada positivamente e $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então, pelo teorema de Gauss, temos

$$\iint_{\overline{S}=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\; dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\; dV$$

onde div$\vec{F} = 0 + 0 + 1 = 1$. Logo,

$$\iint_{\overline{S}=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\; dS = \iiint_W dV\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iiint_W dV$

Passando para coordenadas cilíndricas, temos $dV = r dr d\theta dz$ e $W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq z \leq 2 - r^2 \end{cases}$. Então,

$$\iiint_W dV = \iiint_{W_{r\theta z}} r\; drd\theta dz = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \int_1^{2-r^2} dz d\theta dr =$$

$$= \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \left(2 - r^2 - 1\right) d\theta dr = \int_0^1 r \left(1 - r^2\right) \int_0^{2\pi} d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(r - r^3\right) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Logo,

$$\iint_{\overline{S}=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\; dS = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\; dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\; dS = \frac{\pi}{2}\,.$$

Mas,

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\; dS = \iint_D (1 \cdot \operatorname{arctg}(y^2), 1^3 \cdot \ln(x^2+1), 1) \cdot (0,0,-1)\; dxdy =$$

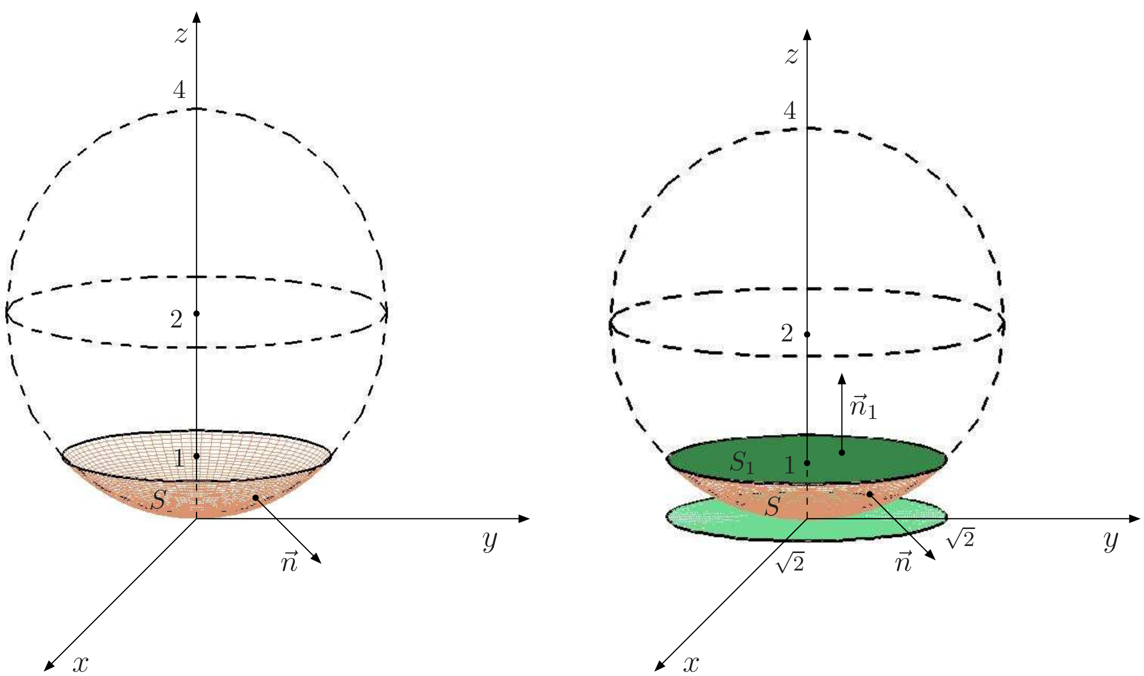
$$= \iint_D -dxdy = -A(D) = -\pi \cdot 1^2 = -\pi\,.$$

Finalmente:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\; dS = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}\,.$$

Exercício 4: Calcule $\displaystyle\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n}\; dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = (e^x - y)\,\vec{\mathbf{i}} + (xz + y^2)\,\vec{\mathbf{j}} + 2yz\,\vec{\mathbf{k}}$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2-4z=0$, com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior.

Solução: O esboço de S está representado na figura que se segue.



Consideremos $\overline{S} = S \cup S_1$, onde S_1 é dada por $S_1 : z = 1$, $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq (\sqrt{2})^2$, orientada com $\vec{n_1} = \vec{k}$ e onde $dS = \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+0+0}\,dxdy = dxdy$.

Seja W o sólido limitado por $\overline{S}$. Como a fronteira de W, $\partial W = \overline{S}$, está orientada positivamente e rot$\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ então, pelo teorema de Gauss, temos

$$\iint\limits_{\overline{S}=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\;dS = \iiint\limits_{W} \text{div}(\text{rot}\vec{F})\;dV$$

onde div(rot$\vec{F}$) $= \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$, por propriedade dos operadores diferenciais (ver pág 10 do Módulo 7). Então,

$$\iint\limits_{\overline{S}=\partial W} (\text{rot}\vec{F})\cdot\vec{n}\;dS = \iiint\limits_{W} 0\;dV = 0$$

ou

$$\iint\limits_{S} (\text{rot}\vec{F})\cdot\vec{n}\;dS + \iint\limits_{S_1} (\text{rot}\vec{F})\cdot\vec{n_1}\;dS = 0\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint\limits_{S_1} (\text{rot}\vec{F})\cdot\vec{n_1}\;dS$

Temos,

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x - y & xz + y^2 & 2yz \end{vmatrix} = (2z - x, 0, z+1)$$

Logo,

$$\iint\limits_{S_1} (\text{rot}\vec{F})\cdot\vec{n_1}\;dS = \iint\limits_{D} (2\cdot 1 - x, 0, 1+1)\cdot(0,0,1)\;dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} (2-x, 0, 2)\cdot(0,0,1)\;dxdy = \iint\limits_{D} 2\;dxdy = 2A(D) =$$

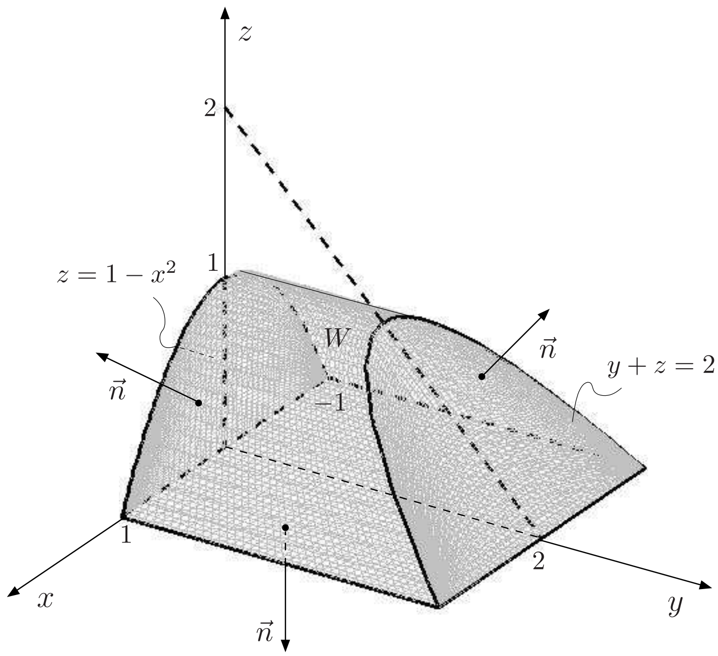
$$= 2\left(\pi(\sqrt{3})^2\right) = 6\pi\,.$$

Portanto,

$$\iint\limits_{S} (\text{rot}\vec{F})\cdot\vec{n}\;dS = -6\pi\,.$$

Exercício 5: Seja W a região limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, o plano $y + z = 2$ e os planos coordenados $z = 0$ e $y = 0$. Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = (x + e^{-y}\operatorname{sen} z)\;\vec{\mathbf{i}} + {}$ $+(y + \operatorname{arctg} z)\;\vec{\mathbf{j}} + (\operatorname{sen} x + \cos y)\;\vec{\mathbf{k}}$ através da superfície S de W com normal $\vec{n}$ exterior à W.

Solução: O esboço da região W está representado na figura que se segue.



Como $S = \partial W$ está orientada positivamente e $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então, pelo teorema de Gauss, temos

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \iiint_W \text{div}\vec{F}\ dV$$

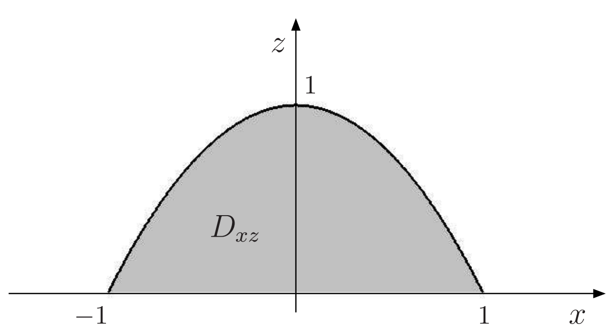
onde $\text{div}\vec{F} = 1 + 1 + 0 = 2$. Logo,

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \iiint_W 2\ dV = 2 \iiint_W dV$$

onde a região W é dada por

$$W = \{(x, y, z);\ (x, z) \in D_{xz}\ \text{ e }\ 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

com $D_{xz} =$ projeção de W no plano xz.



Logo, temos $D_{xz}: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 \end{cases}$. Então,

$$\iiint\limits_W dV = \iint\limits_{D_{xz}} \int_0^{2-z} dy\ dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} (2-z)\ dxdz =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} (2-z)\ dzdx = \int_{-1}^{1} \left[2z - \frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[4(1-x^2) - (1-x^2)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(4 - 4x^2 - 1 + 2x^2 - x^4\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(3 - 2x^2 - x^4\right) dx = \frac{1}{2} \left[3x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \left(3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{5}\,.$$

Logo,

$$\iint\limits_{S=\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = 2 \cdot \frac{32}{5} = \frac{64}{15}\,.$$