Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 14 – Tutor

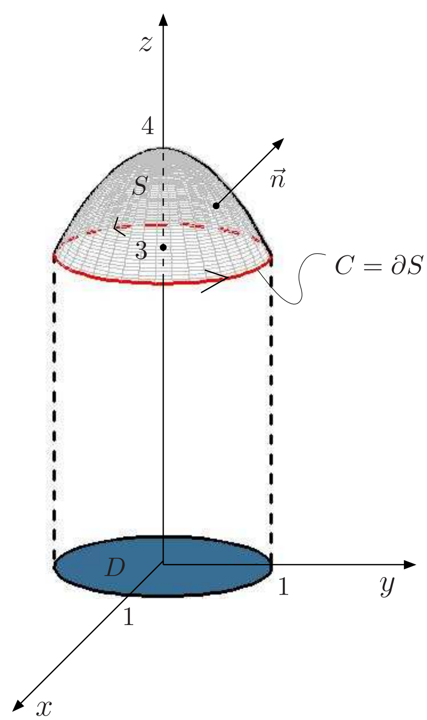
Exercício 1: Verifique o teorema de Stokes, calculando a integral de linha e a integral de superfície para o campo $\vec{F}$ e a superfície S.

a) $\vec{F}(x,y,z) = 2y\,\vec{\mathbf{i}} - z\,\vec{\mathbf{j}} + 3\,\vec{\mathbf{k}}$, S é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2z, x, 3y)$, e S a porção do plano $x - z = 0$, contida no cilindro $x^2 + y^2 = 4$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

Solução:

a) De $z = 4 - x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$, temos $z = 3$. Logo, a interseção do paraboloide com o cilindro ocorre no plano $z = 3$. Assim, o esboço de S está representado na figura que se segue.



Devemos verificar que

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\; dS\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Pelas considerações acima, vemos que C é a interseção do paraboloide com o plano $z = 3$, isto é, $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$. Como $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ então a Última componente de $\vec{n}$ é maior que zero, portanto $\vec{n}$ aponta para cima. Logo, pela "regra da mão direita" vemos que C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Assim, uma parametrização de C é dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = 3$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo, $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$ e $dz = 0$. Então,

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C=\partial S} 2y\, dx - z\, dy + 3\, dz = \int_0^{2\pi} \left[2 \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) - 3(\cos t) + 3 \cdot 0\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2 \operatorname{sen}^2 t - 3 \cos t\right)\, dt = \left[-2 \cdot \frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) - 3 \operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} = -2\pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_S$ *rot* $\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

Temos $S : z = 4 - x^2 - y^2$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Como $\vec{n}$ aponta para cima, temos que $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (2x, 2y, 1)$. Temos também que $dS = \|\vec{N}\|\, dxdy$. Além disso, temos

$$\text{rot}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -z & 3 \end{vmatrix} = (1, 0, -2)\,.$$

Portanto,

$$\iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \iint_D (1, 0, -2) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy = \iint_D (2x - 2)\, dxdy =$$

$$= \iint_D 2x\, dxdy - 2 \iint_D dxdy\,.$$

Como a função $f(x, y) = 2x$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y então,

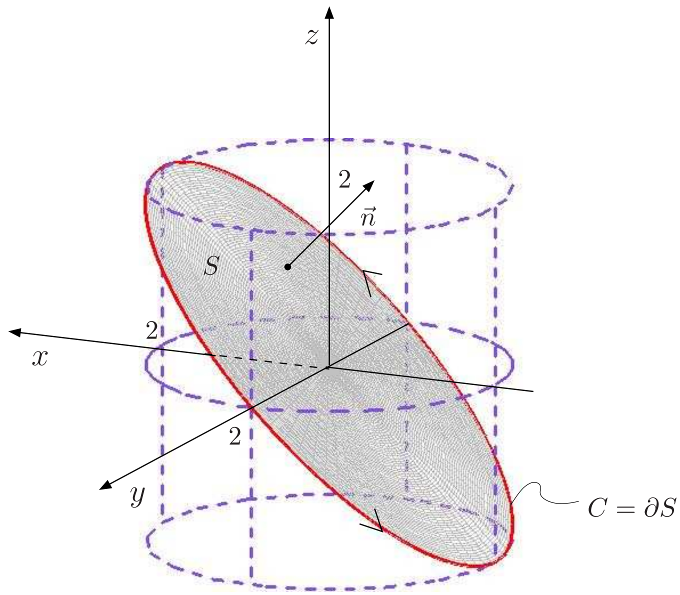
$$\iint_D 2x\, dxdy = 0\,.$$

Logo,

$$\iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = -2A(D) = -2\left(\pi \cdot 1^2\right) = -2\pi\,.$$

Assim, o teorema de Stokes está verificado para este caso.

b) O esboço de S está representado na figura que se segue.



Devemos verificar que

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\; dS\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos que $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$. Como $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ então a Última componente de $\vec{n}$ é positiva, portanto $\vec{n}$ aponta para cima. Logo, C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Portanto, a projeção de C sobre o plano xy está orientada no sentido anti-horário. Assim, uma parametrização de C é dada por $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\, t$ e $z = 2\cos t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo, $dx = -2\,\text{sen}\, t\, dt$, $dy = 2\cos t\, dt$ e $dz = -2\,\text{sen}\, t\, dt$. Então,

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C 2z\, dx + x\, dy + 3y\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big[2(2\cos t)(-2\,\text{sen}\, t) + (2\cos t)(2\cos t) + 3(2\,\text{sen}\, t)(-2\,\text{sen}\, t)\big]\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-8\,\text{sen}\, t\cos t + 4\cos^2 t - 12\,\text{sen}^2\, t\right)\, dt =$$

$$= \left[8 \cdot \frac{\cos^2 t}{2} + \frac{4}{2}\left(t + \frac{\text{sen}\, 2t}{2}\right) - \frac{12}{2}\left(t - \frac{\text{sen}\, 2t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 0 + 2 \cdot 2\pi - 6 \cdot 2\pi = -8\pi\,.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_S$ *rot* $\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

Temos $S : z = x$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$. Como $\vec{n}$ aponta para cima, temos que $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (-1, 0, 1)$. Temos também que $dS = \left\|\vec{N}\right\| dxdy$. Além disso, temos

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & 3y \end{vmatrix} = (3, 2, 1)\,.$$

Portanto,

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\; dS = \iint_D (3,2,1) \cdot (-1,0,1)\, dxdy = \iint_D (-3+1)\, dxdy =$$

$$= -2A(D) = -2\left(\pi \cdot 2^2\right) = -8\pi\,.$$

Assim, o teorema de Stokes está verificado.

Exercício 2: Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

a) $\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{\mathbf{i}} + xy\,\vec{\mathbf{j}} + xz\,\vec{\mathbf{k}}$ e C é o quadrado de vértices $(0,0,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$ e $(0,1,2)$, orientado no sentido anti-horário quando visto de cima;

b) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{\mathbf{i}} + z\,\vec{\mathbf{j}} + x\,\vec{\mathbf{k}}$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, percorrido nessa ordem;

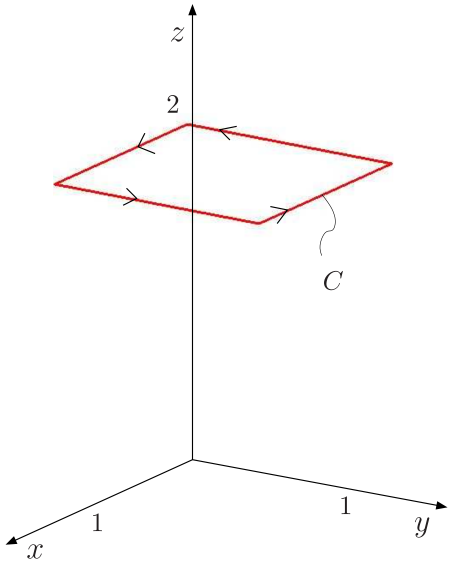
c) $\vec{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ e C é a curva interseção do cilindro $x^2+y^2=1$, com o plano $x+z=1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima;

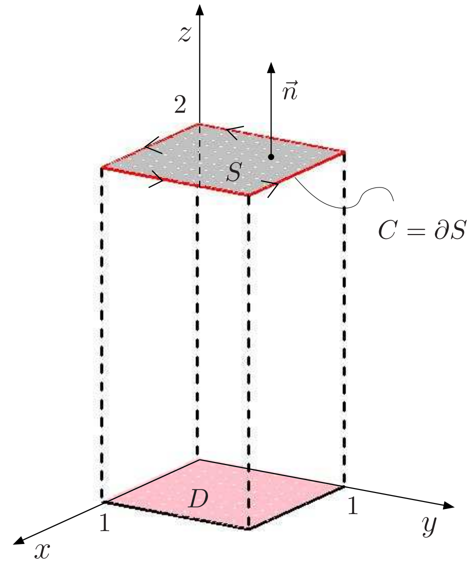
d) $\vec{F}(x,y,z) = \left(z+y^2, e^{y^2}+1, \ln(z^2+1)+y\right)$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t,$ $4-2\,\text{sen}\,t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução:

a) Observemos que o quadrado C está contido no plano $z=2$. Portanto, consideremos a superfície S, porção do plano $z=2$, limitada por C. Logo, temos que $S : z = 2$, com $(x,y) \in D : 0 \leq x \leq 1\,,$ $0 \leq y \leq 1$.

O esboço de C está representado na figura que se segue.





Como ∂S está orientado no sentido anti-horário quando visto de cima então, usando a "regra da mão direita", vemos que $\vec{n} = \vec{k}$. Temos,

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1+0+0}\, dxdy = dxdy\,.$$

Além disso,

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xy & xz \end{vmatrix} = (0, y-z, y-z) = (0, y-2, y-2)$$

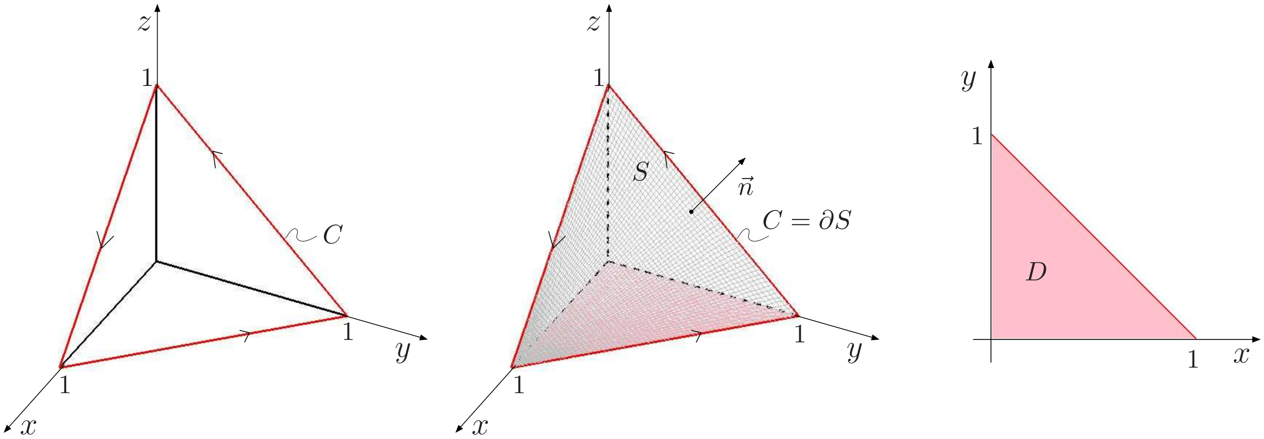
em S. Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ está orientado positivamente, então pelo teorema de Stokes, temos

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (0, y-2, y-2) \cdot (0,0,1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D (y-2)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (y-2)\, dxdy = \int_0^1 (y-2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2} - 2y\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}\,.$$

b) O esboço de C está representado na figura que se segue.



A equação do plano do triângulo é $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ onde $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, isto é, $x + y + z = 1$. Então, considere a superfície S, porção desse plano, limitada por C. Temos, então, $S : z = 1 - x - y$, com $(x, y) \in D : 0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq x$.

Como a curva C está orientada no sentido anti-horário, então pela "regra da mão direita", vemos que $\vec{n}$ aponta para cima. Logo, $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (1, 1, 1)$. Temos também que $dS = \|\vec{N}\|\, dxdy = \sqrt{3}\ dxdy$. Além disso, temos

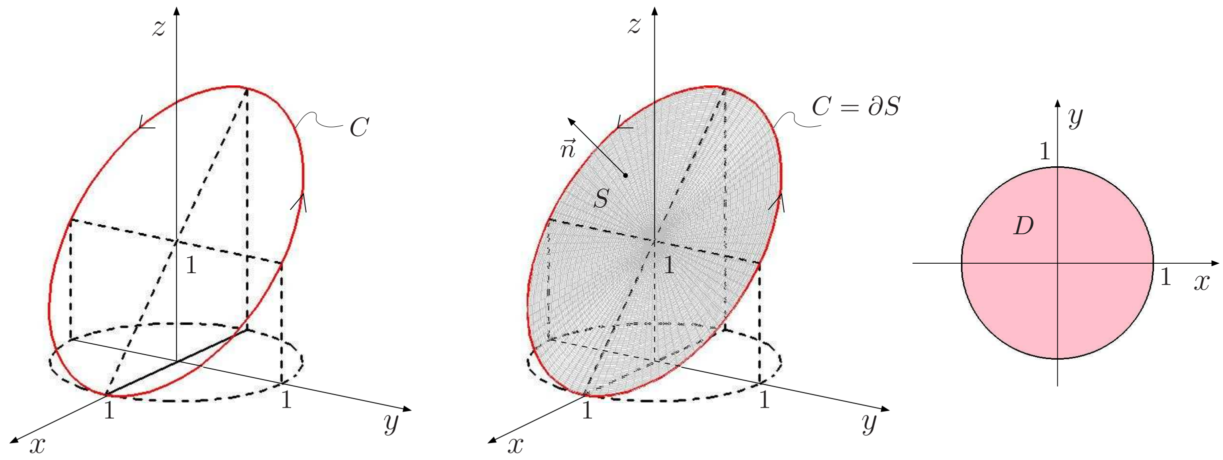
$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)\,.$$

Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ está orientada positivamente, então pelo teorema de Stokes temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (-1, -1, -1) \cdot (1, 1, 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D (-1 - 1 - 1)\, dxdy = -3A(D) = -3\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) = -\frac{3}{2}\,.$$

c) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Consideremos a superfície S, porção desse plano $x + z = 1$ que se projeta sobre o plano xy, segundo o disco $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Então temos que $S : z = 1 - x$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Como C está orientada no sentido anti-horário, então pela "regra da mão direita", vemos que $\vec{n}$ aponta para cima. Logo, $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ e $dS = \|\vec{N}\|\, dxdy$ onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (1, 0, 1)$ portanto $\vec{n} = \dfrac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \|\vec{N}\|\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy$. Por outro lado,

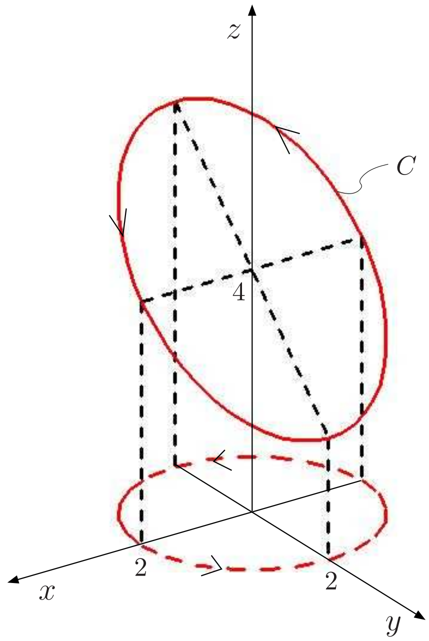
$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = (-1 - 1, -1 - 1, -1 - 1) = (-2, -2, -2)\,.$$

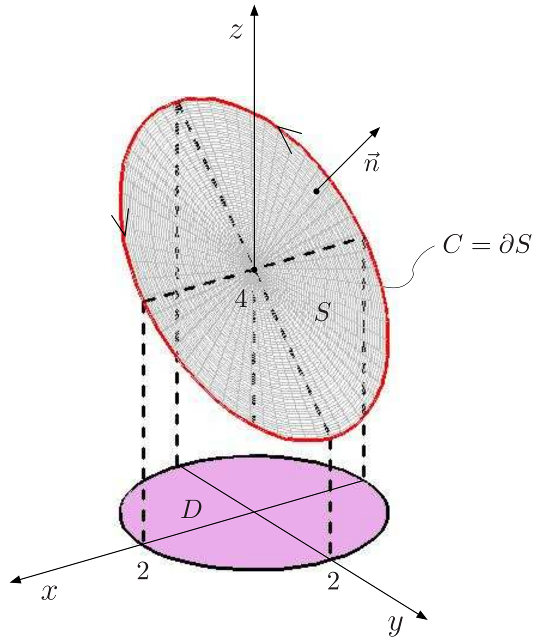
Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ (bordo de S) está orientada positivamente, então pelo teorema de Stokes temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (-2, -2, -2) \cdot (1, 0, 1)\, dxdy =$$

$$= -4A(D) = -4\left(\pi \cdot 1^2\right) = -4\pi\,.$$

d) Como $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (2, 0, 4)$, então C é uma curva fechada tendo equações paramétricas $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$ e $z = 4 - 2\,\text{sen}\,t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, portanto $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 4 - y$. Logo, C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = 4 - y$ e cujo esboço está representado na figura que se segue.





Da parametrização de C, vemos que C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Consideremos a superfície S porção do plano $z = 4 - y$, limitada por C. Então temos que $S : z = 4 - y$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$. Como C está orientada no sentido anti--horário então pela "regra da mão direita", vemos que $\vec{n}$ aponta para cima. Então $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (0, 1, 1)$. Logo $\vec{n} = \dfrac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2}\, dxdy$. Temos também,

$$\text{rot}\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z + y^2 & e^{y^2} + 1 & \ln(z^2 + 1) + y \end{vmatrix} = (1, 1, -2y)\,.$$

Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ está orientado positivamente, então pelo teorema de Stokes temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (1, 1, -2y) \cdot (0, 1, 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_D (1 - 2y)\, dxdy = \iint_D dxdy + \iint_D (-2y)\, dxdy\,.$$

Como

$$\iint_D dxdy = A(D) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

e

$$\iint_D (-2y)\, dxdy = 0$$

pois a função $f(x,y) = -2y$ é ímpar na variável y e D tem simetria em relação ao eixo x então,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi\,.$$

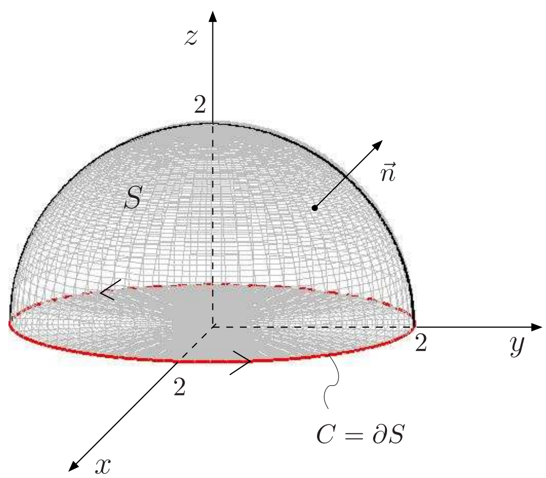
Exercício 3: Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$

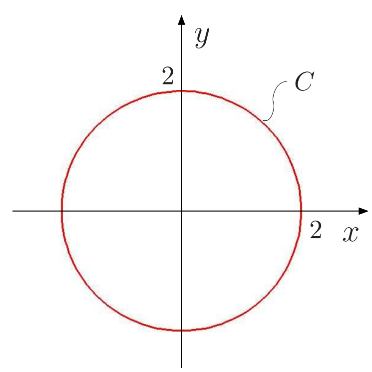
a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2 e^{yz}\,\vec{\mathbf{i}} + y^2 e^{x^2}\,\vec{\mathbf{j}} + z^2 e^{xy}\,\vec{\mathbf{k}}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ e com orientação para cima;

b) $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2, x, z^3)$ e S qualquer superfície cujo bordo seja a curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\,\text{sen}\,t, 1)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, com a normal apontando para cima.

Solução:

a) O esboço de C está representado na figura que se segue.





De acordo com a orientação de S, vemos que $C = \partial S$ tem orientação no sentido anti-horário quando vista de cima. Como $\vec{F}$ é de classe C^1 e $C = \partial S$ está orientado positivamente então pelo teorema de Stokes temos que

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C x^2 e^{yz}\, dx + y^2 e^{x^2}\, dy + z^2 e^{xy}\, dz$$

onde C é dada por $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$ portanto $dz = 0$. Logo,

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_C \underbrace{x^2 e^0}_{P} dx + \underbrace{y^2 e^{x^2}}_{Q} dy \stackrel{*}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left(2xy^2 e^{x^2} - 0 \right) dxdy = \iint_D 2xy^2 e^{x^2}\, dxdy = 0$$

pois a função $f(x,y) = 2xy^2 e^{x^2}$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y.

Em $*$ usamos o teorema de Green.

b) Temos que $C = \partial S : \gamma(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t, 1)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como a orientação de C, que é anti-horária quando vista de cima, está de acordo com a normal $\vec{n}$ e como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então pelo teorema de Stokes temos

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \vec{F}(2\cos t, 3\operatorname{sen} t, 1)\cdot(-2\operatorname{sen} t, 3\cos t, 0)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\cos t(3\operatorname{sen} t)^2, 2\cos t, 1\right)\cdot(-2\operatorname{sen} t, 3\cos t, 0)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-36\cos t\operatorname{sen}^3 t + 6\cos^2 t\right)\,dt = \left[-36\cdot\frac{\operatorname{sen}^4 t}{4} + \frac{6}{2}(t + \operatorname{sen} 2t)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 0 + 3\cdot 2\pi = 6\pi\,.$$

Exercício 4: Seja $\vec{F}(x,y,z) = (8x^3 + z^2, -3z, 2xz - 3y)$.

a) $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$? Por quê?

b) Se C é o segmento de reta que liga $(0,0,0)$ a $(2,1,3)$, calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Solução:

a) Temos que

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 8x^3 + z^2 & -3z & 2xz - 3y \end{vmatrix} = (-3+3, 2z - 2z, 0) = \vec{0}\,.$$

Como $\vec{F}$ é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ com rot $\vec{F} = \vec{0}$ e $\mathbb{R}^3$ é um conjunto simplesmente conexo então, pelo teorema das equivalências, segue que $\vec{F}$ é conservativo.

b) Como $\vec{F}$ é conservativo, então existe uma função $\varphi(x,y,z)$ diferenciável em $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em $\mathbb{R}^3$ ou

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 8x^3 + z^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -3z \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2xz - 3y \quad (3)$$

Integrando (1), (2) e (3) em relação a x, y e z, respectivamente, temos:

$$\varphi(x,y,z) = 2x^4 + xz^2 + f(y,z)$$

$$\varphi(x,y,z) = -3yz + g(x,z)$$

$$\varphi(x,y,z) = xz^2 - 3yz + h(x,y)$$

Para obtermos a mesma expressão para $\varphi(x,y,z)$ devemos tomar $f(y,z)=-3yz$, $g(x,z)=2x^4+$ $+xz^2$ e $h(x,y)=2x^4$. Assim, temos que

$$\varphi(x,y,z)=2x^4+xz^2-3yz$$

é uma função potencial de $\vec{F}$. Então, pelo teorema fundamental do cálculo para integral de linha, temos que

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(2,1,3)-\varphi(0,0,0)=\left(2\cdot 2^4+2\cdot 3^2-3\cdot 1\cdot 3\right)-0=32+18-9=41\,.$$

Exercício 5: A integral

$$\int_C 2xe^{2y}\,dx+2\left(x^2e^{2y}+y\cos z\right)\,dy-y^2\operatorname{sen} z\,dz$$

é independente do caminho? Calcule o valor da integral para a curva C obtida como interseção da superfície $z=9-x^2-y^2$, $z\geq 5$ com o plano $x=1$, orientada no sentido de crescimento de y.

Solução: O campo

$$\vec{F}=(P,Q,R)=\left(2xe^{2y},2\left(x^2e^{2y}+y\cos z\right),-y^2\operatorname{sen} z\right)$$

é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto simplesmente conexo. Como

$$\begin{aligned}
\text{rot}\,\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xe^{2y} & 2\left(x^2e^{2y}+y\cos z\right) & -y^2\operatorname{sen} z \end{vmatrix} = \\
&= \left(-2y\operatorname{sen} z+2y\operatorname{sen} z,0,4xe^{2y}-4xe^{2y}\right)=\vec{0},
\end{aligned}$$

então, pelo teorema das equivalências, a integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ não depende de C.

De $z=9-x^2-y^2$, $z=5$ e $x=1$ temos $5=9-1-y^2$ portanto $y^2=3$ e $y\pm\sqrt{3}$. Considerando que C está orientada no sentido de crescimento de y, concluímos que o ponto inicial de C é o ponto $A=(1,-\sqrt{3}\,,5)$ e o ponto final de C é $B=(1,\sqrt{3}\,,5)$. Como $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ não depende de C, então vamos substituir C por C_1, segmento de reta que liga A a B. Então temos $C_1: x=1$, $z=5, -\sqrt{3}\leq y\leq\sqrt{3}$ portanto $dx=0$ e $dz=0$. Então,

$$\begin{aligned}
&\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1}P(1,y,5)\,dx+Q(1,y,5)\,dy+R(1,y,5)\,dz\stackrel{*}{=}\\
&\stackrel{*}{=}\int_{C_1}Q(1,y,5)\,dy=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}2\left(1^2e^{2y}+y\cos 5\right)\,dy=\\
&=2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(e^{2y}+y\cos 5\right)\,dy=2\left[\frac{e^{2y}}{2}+\frac{y^2}{2}\cos 5\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\\
&=\left(e^{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\cos 5\right)-\left(e^{-2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\cos 5\right)=e^{2\sqrt{3}}-e^{-2\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Em $*$ temos que $dx=0$ e $dz=0$.