11.1 Exercícios

1. (a) O que é uma seqüência?
   (b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
   (c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma seqüência convergente? Dê dois exemplos.
   (b) O que é uma seqüência divergente? Dê dois exemplos.

3–8 □ Liste os cinco primeiros termos da seqüência.

3. $a_n = 1 - (0,2)^n$
4. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$
5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$
6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$
7. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1$
8. $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$

9–14 □ Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da seqüência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.

9. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$
10. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\}$
11. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$
12. $\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\}$
13. $\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\}$
14. $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, \ldots\}$

15–40 □ Determine se a seqüência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

15. $a_n = n(n-1)$
16. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$
17. $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$
18. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$
19. $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$
20. $a_n = \dfrac{n}{1+\sqrt{n}}$
21. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$
22. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$
23. $a_n = \cos(n/2)$
24. $a_n = \cos(2/n)$
25. $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$
26. $\{\operatorname{arctg} 2n\}$
27. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$
28. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$
29. $\{n^2 e^{-n}\}$
30. $\{n \cos n\pi\}$
31. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$
32. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$
33. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$
34. $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n^2 - 1}$
35. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{1/n}$
36. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1+\sqrt{n}}$
37. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$
38. $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$
39. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$
40. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

41–48 □ Use um gráfico da seqüência para decidir se a seqüência é convergente ou divergente. Se a seqüência for convergente, estime o valor do limite a partir do gráfico e então prove sua estimativa. (Veja a margem esquerda na página 704 com sugestões para gráficos de seqüências).

41. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$
42. $a_n = 2 + (-2/\pi)^n$
43. $\left\{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right\}$
44. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}\right\}$
45. $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$
46. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$
47. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$
48. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$

49. Se \$ 1.000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1.000(1{,}06)^n$ dólares.
   (a) Encontre os cinco primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$.
   (b) A seqüência é convergente ou divergente? Explique.

50. Calcule os primeiros 40 termos da seqüência definida por
$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{se } a_n \text{ é um número par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é um número ímpar} \end{cases}$$
e $a_1 = 11$. Faça o mesmo para $a_1 = 25$. Estabeleça uma conjectura sobre esse tipo de seqüência.

51. Para quais valores de r a seqüência $\{nr^n\}$ é convergente?

52. (a) Se $\{a_n\}$ for convergente, mostre que
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$
   (b) Uma seqüência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1/(1+a_n)$ para $n \geqslant 1$. Assumindo que $\{a_n\}$ é convergente, encontre seu limite.

53. Suponha que você saiba que $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a seqüência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

54–60 □ Determine se a seqüência dada é crescente, decrescente ou não monotônica. A seqüência é limitada?

54. $a_n = \dfrac{1}{5^n}$
55. $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$
56. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$
57. $a_n = \cos(n\pi/2)$
58. $a_n = ne^{-n}$