11.3 Exercícios

1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,3}}\,dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

2. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geqslant 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 □ Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

9–24 □ Determine se a série é convergente ou divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0,85}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1,4} + 3n^{-1,2})$

11. $1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{4}} + \dfrac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$

14. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{n-2}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$

25–28 □ Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

25. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

26. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\,[\ln(\ln n)]^p}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

29. A função zeta ζ de Riemann é definida por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de ζ?

30. (a) Encontre a soma parcial s_{10} da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime o erro usando s_{10} como uma aproximação para a soma da série.
(b) Utilize (3) com $n = 10$ para dar uma estimativa melhorada da soma.
(c) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00001.

31. (a) Use a soma dos dez primeiros termos para estimar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Quão boa é essa estimativa?
(b) Melhore essa estimativa usando (3) com $n = 10$.
(c) Encontre um valor de n que garanta que o erro na aproximação $s \approx s_n$ seja menor que 0,001.

32. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ com precisão de três casas decimais.

33. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ com precisão de 0,01.

34. Quantos termos da série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ você precisaria adicionar para encontrar sua soma com precisão de 0,01?

35. Mostre que, se queremos aproximar a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1,001}$ de maneira que o erro seja menor que 5 na nona casa decimal, então precisamos somar mais que $10^{11.301}$ termos!

36. (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ é convergente.
(b) Encontre um limite superior para o erro na aproximação $s \approx s_n$.
(c) Qual é o menor valor de n tal que esse limite superior seja menor que 0,05?
(d) Encontre s_n para esse valor de n.

37. (a) Use (4) para mostrar que, se s_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) A série harmônica diverge, mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor que 15 e que a soma do primeiro bilhão de termos é menor que 22.

38. Use as seguintes etapas para mostrar que a seqüência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por γ e é chamado constante de Euler.)
(a) Desenhe uma figura como a Figura 6 com $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como uma área [ou use (5)] para mostrar que $t_n > 0$ para todo n.
(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto $\{t_n\}$ é uma seqüência decrescente.
(c) Use o Teorema da Seqüência Monotônica para mostrar que $\{t_n\}$ é convergente.

39. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.