11.4 Exercícios

1. Suponha que Σa_n e Σb_n sejam séries com termos positivos e Σb_n seja sabidamente convergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre Σa_n? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre Σa_n? Por quê?

2. Suponha que Σa_n e Σb_n sejam séries com termos positivos e Σb_n seja sabidamente divergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre Σa_n? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre Σa_n? Por quê?

3–32 □ Determine se a série converge ou diverge.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 4}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2 + 3^n}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^4 + 1}$

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 - 1}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{10^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+7n}{3^n(n^2+5n-1)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 □ Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^5}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

37. O significado da representação decimal de um número $0,d_1d_2d_3\ldots$ (onde o dígito d_i é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 9$) é que

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

38. Para quais valores de p a série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ converge?

39. Prove que, se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ convergir então $\sum a_n^2$ também converge.

40. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja convergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

então $\sum a_n$ também é convergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja divergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

então $\sum a_n$ também é divergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries divergem.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Dê um exemplo de um par de séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos positivos onde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ diverge, mas $\sum a_n$ converge. (Compare com o Exercício 40.)

43. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\sum a_n$ é divergente.

44. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ for convergente, então $\sum \ln(1 + a_n)$ é convergente.

45. Se $\sum a_n$ for uma série convergente com termos positivos, é verdade que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ também é convergente?

46. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\sum a_n b_n$ também é convergente?