11.6 Exercícios

1. O que você pode dizer sobre a série $\sum a_n$ em cada um dos seguintes casos?

   (a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0{,}8$

   (c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–28 ▫ Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^4}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5+n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\operatorname{arctg} n)^n}$

25. $\displaystyle 1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$

26. $\displaystyle \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

29. Os termos de uma série são definidos recursivamente pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

30. Uma série $\Sigma\, a_n$ é definida pelas equações

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

31. Para quais das seguintes séries o Teste da Razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

32. Para quais inteiros positivos k a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

é convergente?

33. (a) Mostre que $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo x.
(b) Deduza que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para todo x.

34. Seja $\Sigma\, a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, assim $\Sigma\, a_n$ converge pelo Teste da Razão. Como habitualmente, faça R_n ser o resto depois de n termos, isto é,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Se $\{r_n\}$ for uma seqüência decrescente e $r_{n+1} < 1$, mostre, pela soma de uma série geométrica, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Se $\{r_n\}$ for uma seqüência crescente, mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

35. (a) Calcule a soma parcial s_5 da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Use o Exercício 34 para estimar o erro ao usar s_5 como uma aproximação da soma da série.
(b) Calcule um valor de n de maneira que s_n aproxime a soma com precisão 0,00005. Use esse valor de n para aproximar a soma da série.

36. Utilize a soma dos primeiros dez termos para aproximar a soma da série $\Sigma_{n=1}^{\infty} n/2^n$. Use o Exercício 34 para estimar o erro.

37. Prove que, se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

38. Prove o Teste da Raiz. [*Dica para a parte (i)*: Tome qualquer número r tal que $L < r < 1$ e use o fato de que existe um inteiro N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ quando $n \geqslant N$.]

39. Dada uma série qualquer $\Sigma\, a_n$ definimos uma série $\Sigma\, a_n^+$ cujos termos são todos termos positivos de $\Sigma\, a_n$ e uma série $\Sigma\, a_n^-$ cujos termos são todos termos negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específico, seja

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Note que, se $a_n > 0$, então $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$, ao passo que, se $a_n < 0$, então $a_n^- = a_n$ e $a_n^+ = 0$.
(a) Se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são convergentes.
(b) Se $\Sigma\, a_n$ for condicionalmente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são divergentes.

40. Prove que, se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ cuja soma é r. [*Dicas*: Use a notação do Exercício 39. Tome um número apenas suficiente de termos positivos a_n^+ de modo que sua soma seja maior que r. Então adicione um número apenas suficiente de termos negativos a_n^- de tal modo que a soma cumulativa seja menor que r. Continue dessa maneira e use o Teorema 11.2.6.]