11.5 Exercícios

1. (a) O que é uma série alternada?
   (b) Sob que condições uma série alternada converge?
   (c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

2–20 □ Teste a série para convergência ou divergência.

2. $-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{5}+\frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\cdots$

3. $\frac{4}{7}-\frac{4}{8}+\frac{4}{9}-\frac{4}{10}+\frac{4}{11}-\cdots$

4. $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\dfrac{1}{\ln 6}-\cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{4n^2+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2+1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{1/n}}{n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\ln n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{5}\right)^n$

21–22 □ Calcule as dez primeiras somas parciais da série e plote a seqüência de termos e a seqüência das somas parciais na mesma tela. Estime o erro ao usar a décima soma parcial para aproximar a soma total.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$

23–26 □ Quantos termos da série precisamos adicionar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ $\quad(|\text{erro}|<0{,}01)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ $\quad(|\text{erro}|<0{,}001)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ $(|\text{erro}| < 0{,}01)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}$ $(|\text{erro}| < 0{,}002)$

27–30 ▢ Aproxime a soma da série com a precisão de quatro casas decimais.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{8^n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

31. A qüinquagésima soma parcial s_{50} da série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ é uma estimativa por cima ou uma estimativa por baixo da soma total? Explique.

32–34 ▢ Para quais valores de p cada série é convergente?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Mostre que a série $\Sigma\,(-1)^{n-1} b_n$, onde $b_n = 1/n$ se n for ímpar e $b_n = 1/n^2$ se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

36. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sejam h_n e s_n as somas parciais das séries harmônica e alternada harmônica.

(a) Mostre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Do Exercício 38, da Seção 11.3, temos

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e portanto

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Use esses fatos junto com a parte (a) para mostrar que $s_{2n} \to \ln 2$ quando $n \to \infty$.