11.9 Exercícios

1. Se o raio de convergência da série de potências $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for 10, qual é o raio de convergência da série $\Sigma_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? Por quê?

2. Suponha que você saiba que a série $\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 ▫ Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{4x+1}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3 - x^3}$

11–12 □ Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x - 2}$

12. $f(x) = \dfrac{7x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$

13. (a) Use diferenciação para achar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Qual é o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Use item (b) para achar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Ache uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1 + x)$. Qual é o raio de convergência?

(b) Use item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x \ln(1 + x)$.

(c) Use item (a) para achar uma série de potências para $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

15–18 □ Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

15. $f(x) = \ln(5 - x)$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

18. $f(x) = \operatorname{arctg}(x/3)$

19–22 □ Encontre uma representação em série de potências para f, plote f e várias somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela. O que acontece quando n aumenta?

19. $f(x) = \ln(3 + x)$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 25}$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

22. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(2x)$

23–26 □ Avalie a integral indefinida como uma série de potências. Qual é o raio de convergência?

23. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{tg}^{-1}x}{x^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1}(x^2)\,dx$

27–30 □ Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

27. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{0,4} \ln(1 + x^4)dx$

29. $\displaystyle\int_0^{1/3} x^2 \operatorname{tg}^{-1}(x^4)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^6}$

31. Use o resultado do Exemplo 6 para calcular ln 1,1 com precisão de cinco casas decimais.

32. Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

33. (a) Mostre que J_0 (a função de Bessel de ordem 0 dada no Exemplo 4) satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Avalie $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ com precisão de três casas decimais.

34. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

35. (a) Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Mostre que $f(x) = e^x$.

36. Seja $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$. Mostre que a série $\Sigma f_n(x)$ converge para todos os valores de x, mas que a série de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ diverge quando $x = 2n\pi$, n um inteiro. Para quais valores de x a série $\Sigma f_n''(x)$ converge?

37. Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

38. (a) Começando com a série geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

39. Use a série de potências para $\operatorname{tg}^{-1} x$ para provar a seguinte expressão para π como a soma de uma série infinita

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Completando o quadrado, mostre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Ao fatorar $x^3 + 1$ como uma soma de cubos, reescreva a integral no item (a). Depois expresse $1/(x^3 + 1)$ como a soma de uma série de potências e use-a para provar a seguinte fórmula para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$