11.8 Exercícios

1. O que é uma série de potências?

2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?
   (b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3–28 ▢ Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n 4^n x^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^2 \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\,(x-1)^n$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-5)^n$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 2^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n 3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n \ln n}$

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} x^n$

29. Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ for convergente, as séries que se seguem são convergentes?
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Plote na mesma tela as primeiras somas parciais $s_n(x)$ da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto com a função-soma $f(x) = 1/(1-x)$. Em que intervalo essas somas parciais parecem estar convergindo para $f(x)$?

33. A função J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

é denominada *função de Bessel de ordem 1*.

(a) Encontre seu domínio.

(b) Plote as primeiras somas parciais na mesma tela.

(c) Se seu CAS tiver funções de Bessel programadas, plote J_1 na mesma tela das somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam J_1.

34. A função A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

é chamada *função de Airy*, em homenagem ao matemático e astrônomo inglês sir George Airy (1801-1892).

(a) Encontre o domínio da função de Airy.

(b) Plote as primeiras somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela.

(c) Se seu CAS tiver funções de Airy programadas, plote A na mesma tela que as somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam A.

35. Uma função f é definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

isto é, seus coeficientes são $c_{2n} = 1$ e $c_{2n+1} = 2$ para todo $n \geqslant 0$. Ache o intervalo de convergência da série e encontre uma fórmula explícita para $f(x)$.

36. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onde $c_{n+4} = c_n$ para todo $n \geqslant 0$, encontre o intervalo de convergência da série e uma fórmula para $f(x)$.

37. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$ onde $c \neq 0$, então o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ é $R = 1/c$.

38. Suponha que a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ satisfaz $c_n \neq 0$ para todo n. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ existe, então ele é igual ao raio de convergência da série de potências.

39. Suponha que a série $\sum c_n x^n$ tenha raio de convergência 2 e que a série $\sum d_n x^n$ tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série $\sum (c_n + d_n)x^n$? Explique.

40. Suponha que o raio de convergência da série de potência $\sum c_n x^n$ seja R. Qual é o raio da série de potência $\sum c_n x^{2n}$?