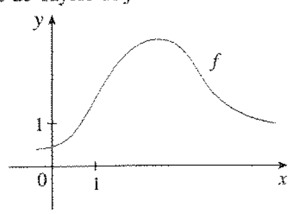
11.10 Exercícios

1. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para todo x, escreva uma fórmula para b_8.

2. (a) O gráfico de f é mostrado. Explique por que a série

$$1{,}6 - 0{,}8(x-1) + 0{,}4(x-1)^2 - 0{,}1(x-1)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 1.



(b) Explique por que a série

$$2{,}8 + 0{,}5(x-2) + 1{,}5(x-2)^2 - 0{,}1(x-2)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 2.

3–10 □ Encontre a série de Maclaurin para $f(x)$ usando a definição de uma série de Maclaurin. [Assuma que f tem expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

3. $f(x) = \cos x$
4. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
5. $f(x) = (1+x)^{-3}$
6. $f(x) = \ln(1+x)$
7. $f(x) = e^{5x}$
8. $f(x) = xe^x$
9. $f(x) = \operatorname{senh} x$
10. $f(x) = \cosh x$

11–18 □ Encontre a série de Taylor para $f(x)$ centrada no valor dado de a. [Assuma que f tem expansão em uma série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.]

11. $f(x) = 1 + x + x^2$, $a = 2$
12. $f(x) = x^3$, $a = -1$
13. $f(x) = e^x$, $a = 3$
14. $f(x) = \ln x$, $a = 2$
15. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$
16. $f(x) \operatorname{sen} x$, $a = \pi/2$
17. $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $a = 9$
18. $f(x) = x^{-2}$, $a = 1$

19. Prove que a série obtida no Exercício 3 representa $\cos x$ para todo x.
20. Prove que a série obtida no Exercício 16 representa $\operatorname{sen} x$ para todo x.
21. Prove que a série obtida no Exercício 9 representa $\sinh x$ para todo x.
22. Prove que a série obtida no Exercício 10 representa $\cosh x$ para todo x.

23–32 □ Use uma série de Maclaurin derivada nesta seção para obter a série de Maclaurin para a função dada.

23. $f(x) = \cos \pi x$
24. $f(x) = e^{-x/2}$
25. $f(x) = x \operatorname{tg}^{-1} x$
26. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$
27. $f(x) = x^2 e^{-x}$
28. $f(x) = x \cos 2x$
29. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ [*Dica*: Use $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]
30. $f(x) = \cos^2 x$
31. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
32. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

33–36 □ Encontre a série de Maclaurin de f (por qualquer método) e seu raio de convergência. Plote f e seus primeiros polinômios na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f?

33. $f(x) = \sqrt{1+x}$
34. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$
35. $f(x) = \cos(x^2)$
36. $f(x) = 2^x$

37. Encontre a série de Maclaurin para e^x e use-a para calcular $e^{-0{,}2}$ com precisão de cinco casas decimais.
38. Use a série de Maclaurin para $\operatorname{sen} x$ para calcular sen 3° com precisão de cinco casas decimais.

39–42 □ Avalie a integral indefinida como uma série infinita.

39. $\displaystyle\int x \cos(x^3)\,dx$
40. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$
41. $\displaystyle\int \sqrt{x^3+1}\,dx$
42. $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x}\,dx$

43–46 □ Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

43. $\displaystyle\int_0^1 x\cos(x^3)dx$ (três casas decimais)
44. $\displaystyle\int_0^{0,2} [\operatorname{tg}^{-1}(x^3) + \operatorname{sen}(x^3)]dx$ (cinco casas decimais)
45. $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ ($|\text{erro}| < 10^{-8}$)
46. $\displaystyle\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\,dx$ ($|\text{erro}| < 0{,}001$)

47–49 □ Use séries para avaliar o limite.

47. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg}^{-1} x}{x^3}$
48. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$
49. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

50. Use a série do Exemplo 10(b) para avaliar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$$

Encontramos esse limite no Exemplo 4 da Seção 4.4 do Volume I usando a Regra de L'Hôspital três vezes. Qual método você prefere?

51–54 □ Use multiplicação ou divisão de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para cada função.

51. $y = e^{-x^2} \cos x$

52. $y = \sec x$

53. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

54. $y = e^x \ln(1 - x)$

55–60 □ Encontre a soma da série.

55. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

56. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

57. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

58. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

59. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

60. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

61. Prove a Desigualdade de Taylor para $n = 2$, isto é, prove que, se $|f'''(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{for } |x - a| \leqslant d$$

62. (a) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é igual a sua série de Maclaurin.

(b) Plote a função na parte (a) e comente seu comportamento próximo da origem.