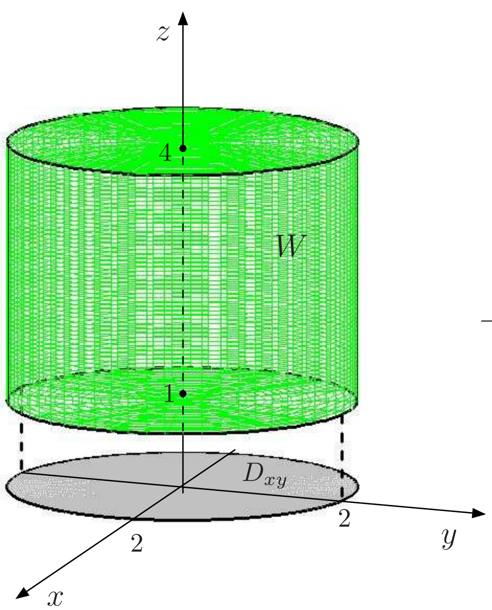
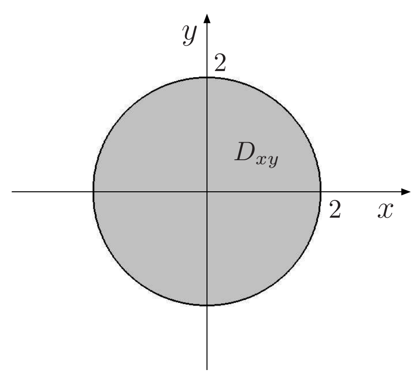
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Lista 5

Exercício 1: Calcule $\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ onde W é a região contida dentro do cilindro $x^2+y^2=4$ e entre os planos $z=1$ e $z=4$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.





Como o integrando envolve $\sqrt{x^2+y^2}$ e a região de integração é um cilindro, devemos calcular a integral utilizando coordenadas cilíndricas. Temos,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &=& z \\ dV &=& r\,dr\,d\theta\,dz \\ x^2+y^2 &=& r^2 \end{array}\right.$$

e a descrição de W é dada pelas seguintes desigualdades $W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le z \le 4\,. \end{cases}$ Então,

$$\iiint\limits_{W} \sqrt{x^2+y^2}\; dV = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} \sqrt{r^2}\; r\; drd\theta = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2\; drd\theta dz =$$

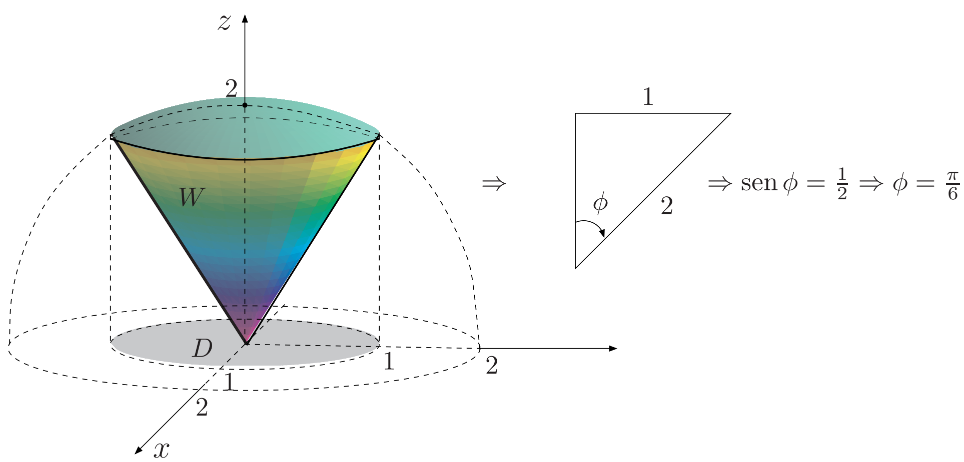
$$= \int_0^2 r^2 \int_1^4 \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2\pi \int_0^2 r^2 \int_1^4 dz dr = 2\pi \int_0^2 r^2 \Big[z\Big]_1^4 dr =$$

$$= 6\pi \int_0^2 r^2\; dr = 6\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 16\pi\,.$$

Exercício 2: Calcule $\displaystyle\iiint\limits_{W} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\; dV$, onde W é limitado inferiormente pelo cone $z = \sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$ e superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Solução: De $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $z = \sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$, tem-se $x^2+y^2 = 1$ que é a projeção, no plano xy, da curva interseção das duas superfícies. A projeção do sólido W é o disco $D : x^2+y^2 \le 1$.

O sólido W e sua projeção D são mostrados a seguir:



Passando para coordenadas esféricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &=& \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &=& \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &=& \rho\cos\phi \\ dxdydz &=& \rho^2 \operatorname{sen}\phi\; d\rho d\phi d\theta \\ x^2+y^2+z^2 &=& \rho^2 \end{cases}\,.$$

A equação da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ fica em coordenadas esféricas $\rho^2 = 4$ ou $\rho = 2$. Então,

$$W_{\rho\phi\theta} = \left\{(\rho,\phi,\theta);\; 0 \le \rho \le 2\,,\, 0 \le \phi \le \pi/6\,,\, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}.$$

Logo,

$$\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta =$$

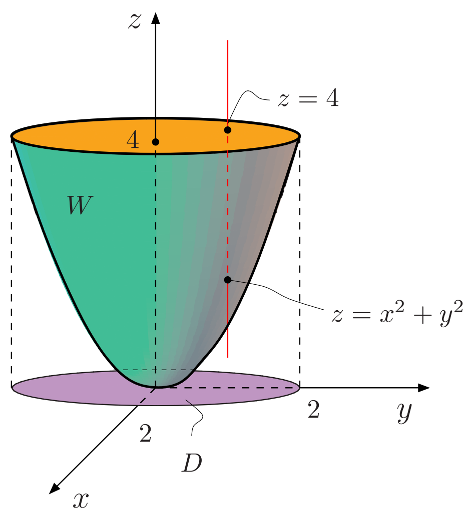
$$= \int_0^{\pi/6}\int_0^2\int_0^{2\pi} \rho^3 \operatorname{sen}\phi\ d\theta d\rho d\phi = 2\pi\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi \int_0^2 \rho^3\ d\rho d\phi =$$

$$= 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi\ d\phi = 8\pi\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/6} = 8\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 8\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\pi(2-\sqrt{3})\,.$$

Exercício 3: Calcule a massa do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2+y^2$ e pelo plano $z = 4$, sendo a densidade em cada ponto do sólido dada por $\delta(x,y,z) = \big(x^2+y^2\big)^{1/2}$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.



A massa de W é dada por:

$$M = \iiint\limits_W \delta(x,y,z)\ dV = \iiint\limits_W \big(x^2+y^2\big)^{1/2}\ dxdydz\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ z &= z \\ dxdydz &= r\ drd\theta dz \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}$$

Como W é dado por $W : \begin{cases} (x,y) \in D \\ x^2+y^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$ então $W_{r\theta z}$ é dado por $W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$.

Assim,

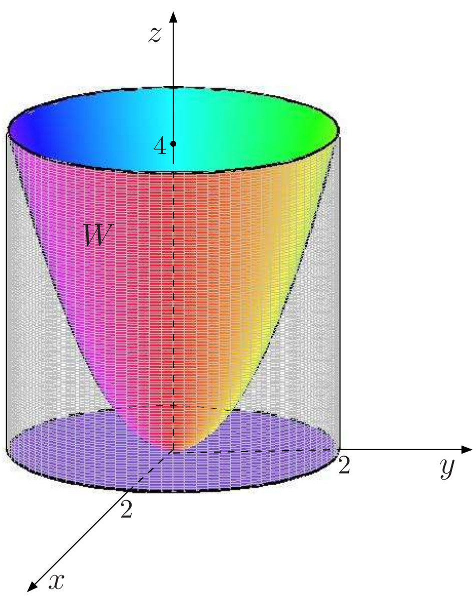
$$M = \iiint_W \left(x^2+y^2\right)^{1/2}\,dxdydz = \iiint_{W_{r\theta z}} \left(r^2\right)^{1/2} r\,drd\theta dz =$$

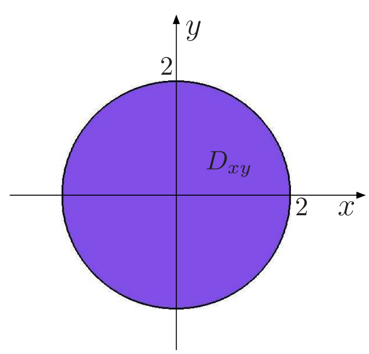
$$= \iiint_{W_{r\theta z}} r^2\,drd\theta dz = \int_0^2 r^2 \int_{r^2}^4 \int_0^{2\pi} d\theta dzdr = 2\pi \int_0^2 r^2 \int_{r^2}^4 dzdr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^2\left(4-r^2\right)\,dr = 2\pi \int_0^2 \left(4r^2-r^4\right)\,dr = 2\pi \left[\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{5}\ \textit{u.m.}$$

Exercício 4: Determine o volume e o centroide do sólido W limitado pelo paraboloide $z = x^2+y^2$, pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelo plano xy.

Solução: De $z = x^2+y^2$ e $x^2+y^2=4$, temos $z=4$. Isso significa que as duas superfícies se interceptam no plano $z=4$, segundo a circunferência $x^2+y^2=4$. Considerando que o sólido W é limitado também pelo plano xy, de equação $z=0$, temos o esboço de W.





Como o sólido W é limitado pelo cilindro $x^2+y^2=4$, vamos aplicar a transformação cilíndrica:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \\ dV &= r\ drd\theta dz \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}.$$

O paraboloide $z=x^2+y^2$ se converte em $z=r^2$ e o cilindro $x^2+y^2=4$ se converte em $r^2=4$ ou $r=2$. Observemos que a projeção de W sobre o plano xy é o disco $D_{xy}: x^2+y^2\leq 4$. Como as variações de r e θ são determinadas na projeção D_{xy}, então $0\leq r\leq 2$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$. Considerando um ponto (x,y,z) no interior de W e pelo ponto uma paralela ao eixo z, vemos que a essa paralela intercepta a fronteira inferior no plano xy, onde $z=0$, e intercepta a fronteira superior no paraboloide $z=x^2+y^2$ onde $z=r^2$. Então $0\leq z\leq r^2$. Assim, a região transformada é:

$$W_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z);\ 0\leq r\leq 2\,,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\,,\ 0\leq z\leq r^2\right\}.$$

Como $V(W)=\iiint\limits_W dV$ então:

$$V(W)=\iiint\limits_{W_{r\theta z}} r\ drd\theta dz=\int_0^2 r\int_0^{r^2}\int_0^{2\pi} d\theta dzdr=2\pi\int_0^2 r\int_0^{r^2} dzdr=$$

$$=2\pi\int_0^2 r\cdot r^2\ dr=2\pi\int_0^2 r^3\ dr=2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2=8\pi\ \textit{u.v.}$$

O centro de massa de um sólido homogêneo é dito centroide e como a densidade $\delta(x,y,z)$ é constante ela pode ser cancelada e temos:

$$V(W)\,\overline{x}=\iiint\limits_W x\ dV$$

$$V(W)\,\overline{y}=\iiint\limits_W y\ dV$$

$$V(W)\,\overline{z}=\iiint\limits_W z\ dV\,.$$

Cálculo de $\iiint\limits_W x\ dV$

Temos,

$$\iiint\limits_W x\ dV=\iint\limits_{D_{xy}} x\int_0^{x^2+y^2} dzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} x\left(x^2+y^2\right)dxdy=0$$

pois a função $x\left(x^2+y^2\right)$ é ímpar na variável x e D_{xy} tem simetria em relação ao eixo y. Logo, $\overline{x}=0$.

Cálculo de $\displaystyle\iiint\limits_W y\ dV$

Temos,

$$\iiint\limits_W y\ dV = \iint\limits_{D_{xy}} y \int_0^{x^2+y^2} dzdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} y\left(x^2+y^2\right) dxdy = 0\,,$$

pois a função $y\left(x^2+y^2\right)$ é ímpar na variável y e D_{xy} tem simetria em relação ao eixo x. Logo, $\overline{y} = 0$.

Cálculo de $\displaystyle\iiint\limits_W z\ dV$

Temos,

$$\iiint\limits_W z\ dV = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} zr\ drd\theta dz = \int_0^2 r \int_0^{r^2} z \int_0^{2\pi} d\theta dzdr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r \int_0^{r^2} z\ dzdr = 2\pi \int_0^2 r \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} dr = \pi \int_0^2 r \cdot r^4\ dr =$$

$$= \pi \int_0^2 r^5\ dr = \pi \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}\,.$$

Logo

$$8\pi\overline{z} = \frac{32\pi}{3}$$

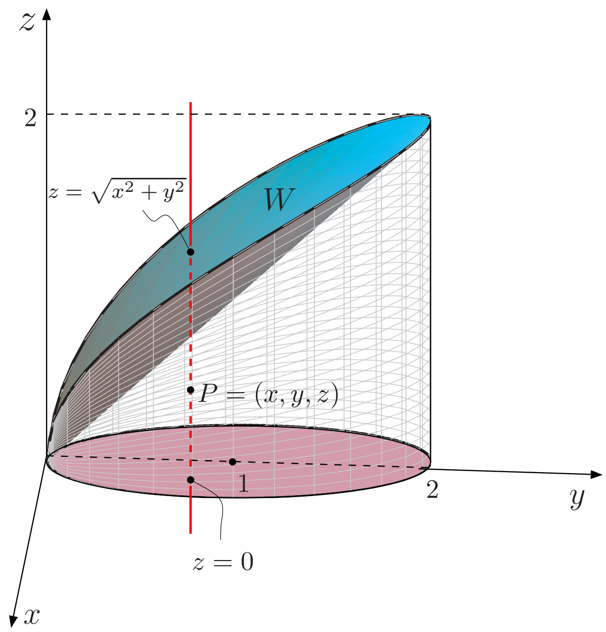
portanto

$$\overline{z} = \frac{4}{3}\,.$$

Portanto, o centroide localiza-se em $(0, 0,\ 4/3)$.

Exercício 5: Considere o sólido homogêneo, limitado pelo plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z.

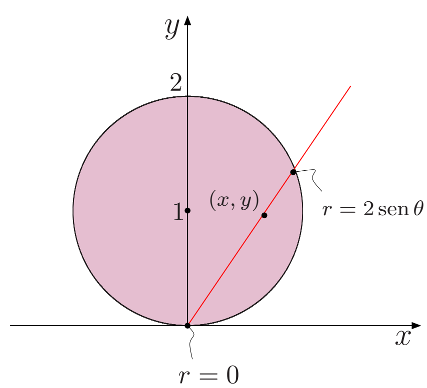
Solução: O esboço do sólido W, limitado superiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ ou $x^2 + (y-1)^2 = 1$ está representado na figura que se segue.



Passando para coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r \operatorname{sen}\theta \\ z = & z \\ dV = & r\ drd\theta dz \\ x^2+y^2 = & r^2 \end{cases}.$$

Seja $P = (x, y, z) \in W$. A reta passando por P e paralela ao eixo z intercepta a fronteira de W em $z = 0$ e $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$. As variações de r e θ são olhadas na projeção de W no plano $xy : x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ ou $x^2 + y^2 \leq 2y$.



De $x^2 + y^2 = 2y$, temos $r^2 = 2r\operatorname{sen}\theta$ ou $r = 2\operatorname{sen}\theta$ se $r \neq 0$. Então $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta \end{cases}$. Logo $W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\operatorname{sen}\theta \\ 0 \leq z \leq r \end{cases}$. O momento de inércia em relação ao eixo z é:

$$I_z = \iiint\limits_W (x^2+y^2) \cdot \delta(x, y, z)\ dV$$

onde $\delta(x,y,z)=k$. Logo,

$$I_z = k\iiint\limits_W (x^2+y^2)\ dV = k\iiint\limits_{W_{r\theta z}} r^2\cdot r\,drd\theta dz =$$

$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^3\int_0^r dzdrd\theta = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^4\,drd\theta =$$

$$= k\int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = \frac{32k}{5}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^5\,\theta\,d\theta =$$

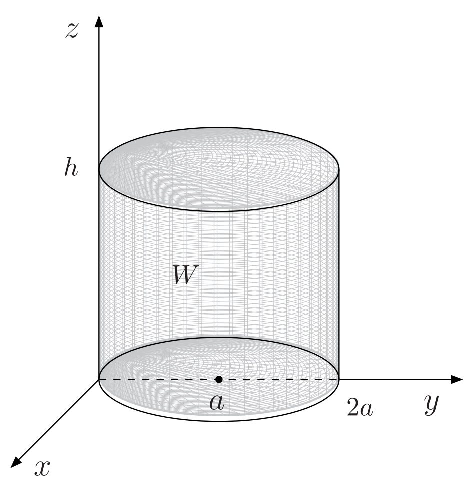
$$= \frac{32k}{5}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)^2\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta =$$

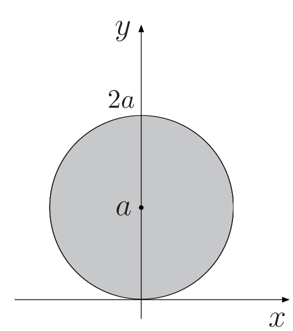
$$= \frac{32k}{5}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{-32k}{5}\left[\cos\theta-\frac{2\cos^3\theta}{3}+\frac{\cos^5\theta}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{64k}{5}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{512}{75}k\,.$$

Exercício 6: Considere o cilindro homogêneo $x^2+(y-a)^2\leq a^2$ e $0\leq z\leq h$. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z, em função da massa M do cilindro.

Solução: O esboço do cilindro está representado na figura que se segue.





Se a densidade constante for denotada por k, então o momento de inércia em relação ao eixo z é

$$I_z = k\iiint\limits_W (x^2+y^2)\ dxdydz\,.$$

Passando para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \\ z &= z \\ dxdydz &= r\ drd\theta dz \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}.$$

O conjunto $W_{r\theta z}$ é dado por $W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2a\operatorname{sen}\theta \end{cases}$. Logo,

$$I_z = k \iiint_{W_{r\theta z}} r^2 \cdot r\ drd\theta dz = k \iiint_{W_{r\theta z}} r^3\ drd\theta dz =$$

$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2a\operatorname{sen}\theta} r^3 \int_0^h dzdrd\theta = hk\int_0^{\pi}\int_0^{2a\operatorname{sen}\theta} r^3\ drd\theta =$$

$$= hk\int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2a\operatorname{sen}\theta} d\theta = 4a^4hk\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4\theta\ d\theta\,.$$

Da trigonometria, tem-se:

$$\operatorname{sen}^4\theta = (\operatorname{sen}^2\theta)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\big(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\big)\,.$$

Então,

$$\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}^4\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\big(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\big)\ d(2\theta) =$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\theta - 2\operatorname{sen}2\theta + \frac{1}{2}\left(2\theta + \frac{\operatorname{sen}4\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{8}(2\pi+\pi) = \frac{3\pi}{8}\,.$$

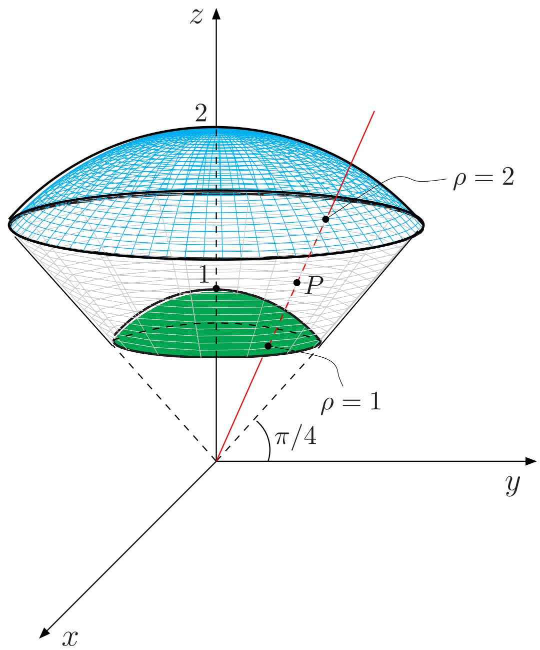
Logo,

$$I_z = \frac{3\pi a^4hk}{2} = \frac{3}{2}Ma^2$$

pois $M = k\pi a^2 h$.

Exercício 7: Calcule $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV$, sendo W a região interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.



Descrição de W em coordenadas esféricas

Consideremos um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer em W; observemos que o raio OP intercepta a superfície do sólido (ou a fronteira do sólido) inicialmente em $\rho = 1$ e depois em $\rho = 2$. Logo, $1 \leq \rho \leq 2$. O ângulo ϕ varia de 0 (eixo z positivo) até $\pi/4$ (parede do cone); a variação do ângulo θ é encontrada na projeção de W no plano $xy : 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo, $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} .$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ e $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta$, então:

$$\iiint_W \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, dV = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \big[\rho\big]_1^2 \big[-\cos \phi\big]_0^{\pi/4} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \pi \left(2 - \sqrt{2} \right) .$$

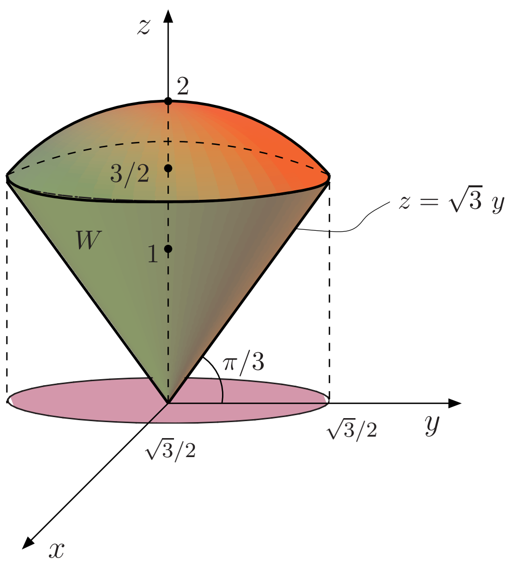
Exercício 8: Calcule a massa do sólido W inferior ao cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e limitado pela esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, sendo a densidade igual ao quadrado da distância de (x, y, z) ao plano $z = 0$.

Solução: Primeiramente, calculemos a interseção das duas superfícies.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ z^2 = 3(x^2 + y^2) \end{cases} \Rightarrow \frac{z^2}{3} + z^2 = 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z^2 - 6z = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{3}{2} .$$

Logo, a interseção se dá no plano $z = 3/2$, e a sua projeção no plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 3/4$. Assim, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Como o ângulo da reta $z = \sqrt{3}\ y$ (corte do cone $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$, considerando $x = 0$) é o ângulo $\pi/3$, então ϕ varia de 0 (eixo z positivo) a $\pi/2 - \pi/3 = \pi/6$. Transformando a equação $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ para coordenadas esféricas temos $\rho^2 = 2\rho\cos\phi$ logo $\rho = 0$ ou $\rho = 2\cos\phi$. Isso significa que ρ varia de 0 a $2\cos\phi$. A variação de θ é encontrada na projeção de W no plano xy. Logo, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assim, $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/6 \\ 1 \leq \rho \leq 2\cos\phi\,. \end{cases}$$

Como a distância de (x, y, z) ao plano $z = 0$ é $|z|$ então $\delta(x, y, z) = |z|^2 = z^2$. A massa de W é:

$$M = \iiint\limits_{W} \delta(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{W} z^2\,dV = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho\cos\phi)^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\,d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\cos\phi} \rho^4\,d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{2\cos\phi} d\phi d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^7\phi \operatorname{sen}\phi\,d\phi d\theta =$$

$$= \frac{32}{5}\left[\frac{-\cos^8\phi}{8}\right]_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8\pi}{5}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8\right] = \frac{8\pi}{5}\cdot\frac{2^8 - 3^4}{2^8} = \frac{35\pi}{32} \ \textit{u.m.}$$

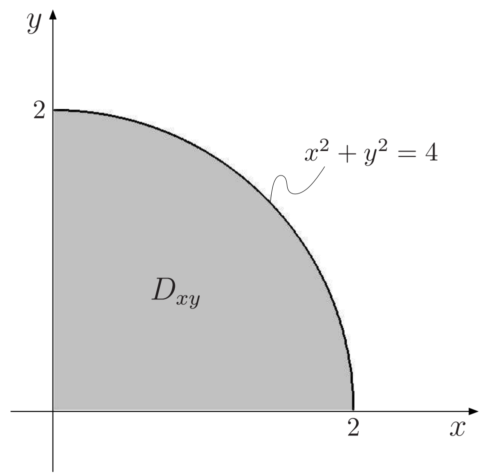
Exercício 9: Expresse a integral

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^4 \sqrt{1 + x^2 + y^2}\ dzdydx$$

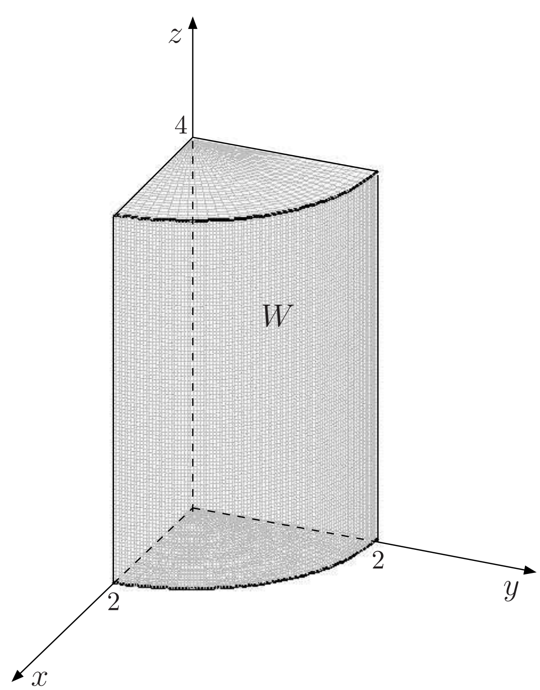
como uma integral tripla em coordenadas cilíndricas, e calcule a integral obtida.

Solução: Temos que $I = \iiint\limits_W \sqrt{1+x^2+y^2}\, dV$, onde W é o sólido dado por $W : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$.

Também podemos descrever W por $W = = \{(x, y, z);\ (x, y) \in D_{xy}\, ,\ 0 \leq z \leq 4\}$ onde D_{xy} é a projeção de W sobre o plano xy e é dado por $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{cases}$.



Logo, o esboço de W está representado na figura que se segue.



Descrevendo W em coordenadas cilíndricas, temos $W_{r\theta z}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases}$. Então,

$$I = \iiint\limits_{W_{r\theta z}} \sqrt{1+r^2}\, r \; dr d\theta dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^4 \left(1+r^2\right)^{1/2} r \; dz dr d\theta =$$

$$= \frac{4}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \left[\left(1+r^2\right)^{3/2}\right]_0^2 d\theta = \frac{4}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)\pi\,.$$

Exercício 10: Expresse cada integral como uma integral tripla iterada em coordenadas esféricas e calcule a integral obtida:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz dy dx}{1+x^2+y^2+z^2}\,.$

b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} xz \; dz dy dx\,.$

Solução:

a) Denotando a integral iterada por I, temos,

$$I = \iiint\limits_W \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} \; dx dy dz$$

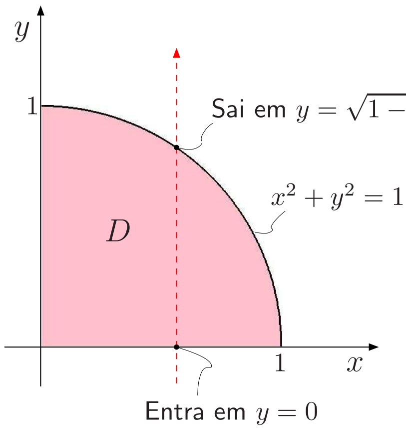
onde

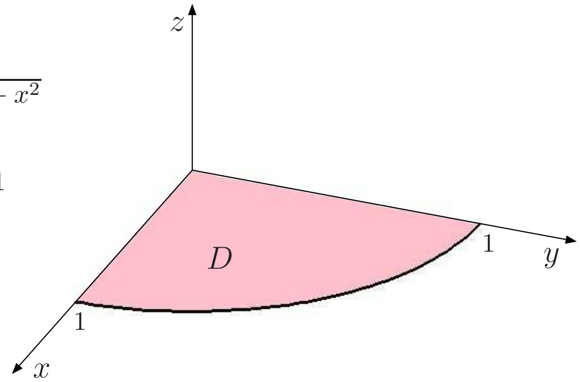
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \underbrace{0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}}_{D}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

ou

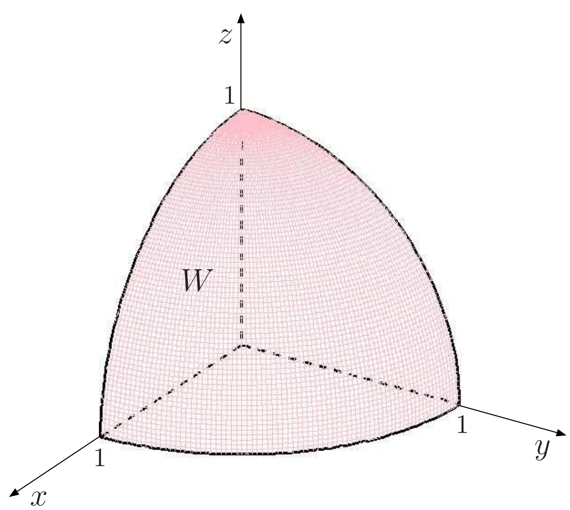
$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

onde $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ é a projeção de W no plano xy.





De $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$ concluímos que o sólido W é limitado superiormente pela superfície $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ou $x^2+y^2+z^2 = 1$, com $z \geq 0$, que é a semiesfera superior de raio 1 e centro $(0,0,0)$, e é limitado inferiormente pelo plano xy de equação $z = 0$. Considerando que a projeção de W no plano xy é a região D, temos:



Passando para coordenadas esféricas, temos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y & = & \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z & = & \rho\cos\phi \\ dxdydz & = & \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta \\ x^2+y^2+z^2 & = & \rho^2 \end{array}\right. .$$

Como a projeção de W no plano xy é o conjunto D, vemos que θ varia de 0 a $\pi/2 : 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Efetuando uma "varredura" em W, a partir do eixo z positivo vemos que ϕ varia de 0 (no eixo z positivo) até $\pi/2$ (no plano xy): $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Considerando um ponto P no interior de W e a semirreta OP, vemos que ela entra em W na origem onde $\rho = 0$ e sai de W em um ponto da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ onde $\rho = 1$. Logo, $0 \leq \rho \leq 1$.

Assim, W transforma-se em:

$$W_{\rho\phi\theta}:\begin{cases}0\leq\theta\leq\pi/2\\0\leq\phi\leq\pi/2\\0\leq\rho\leq 1\end{cases}.$$

Como o integrando $\dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ transforma-se em $\dfrac{1}{1+\rho^2}$ então:

$$I=\iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}}\frac{1}{1+\rho^2}\cdot\rho^2\operatorname{sen}\phi\ d\rho d\phi d\theta=$$

$$=\int_0^1\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\phi\int_0^{\pi/2}d\theta d\phi d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\phi\ d\phi d\rho=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\ d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1+\rho^2-1}{1+\rho^2}\ d\rho=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+\rho^2}\right)d\rho=\frac{\pi}{2}\Big[\rho-\operatorname{arctg}\rho\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{arctg}1)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}(4-\pi)\,.$$

b) Temos,

$$I=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}}xz\ dzdydx=\iiint\limits_W xz\ dxdydz$$

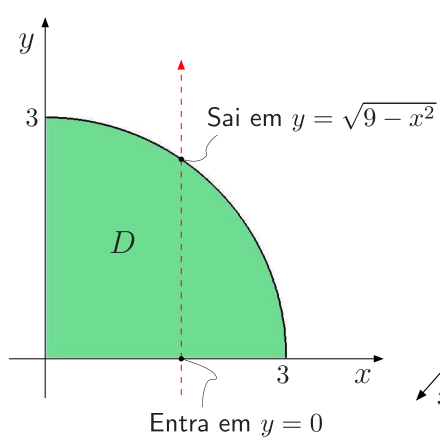
onde

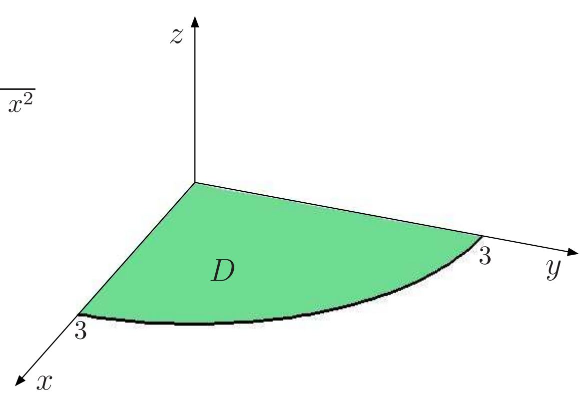
$$W=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \underbrace{0\leq x\leq 3\,,0\leq y\leq\sqrt{9-x^2}}_{D},0\leq z\leq\sqrt{9-x^2-y^2}\Big\}$$

ou

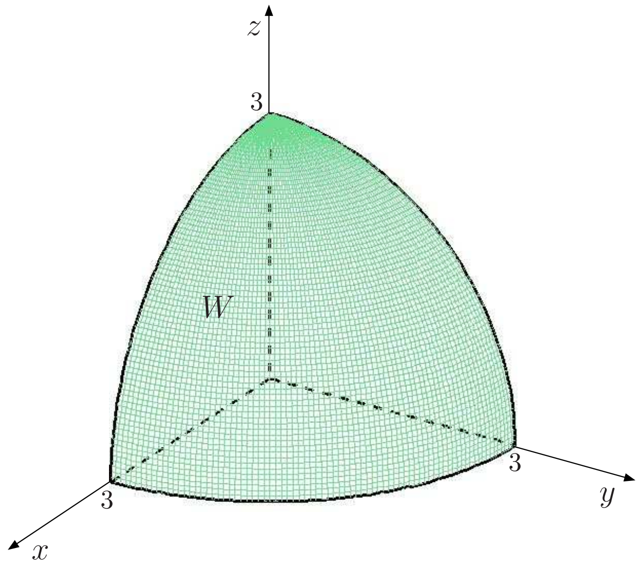
$$W=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (x,y)\in D\ \text{ e }\ 0\leq z\leq\sqrt{9-x^2-y^2}\Big\}$$

onde $D:\begin{cases}0\leq x\leq 3\\0\leq y\leq\sqrt{9-x^2}\end{cases}$ é a projeção de D no plano xy.





Considerando um ponto P no interior de W e uma reta paralela ao eixo z, passando por P e levando em conta que $0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}$, concluímos que a reta entra em W em $z=0$ e sai de W em $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ ou $x^2+y^2+z^2=9$, com $z \geq 0$. Logo, W é limitado superiormente pela semiesfera superior e limitado inferiormente pelo plano $z=0$.



Passando para coordenadas esféricas temos:

$$W_{\rho\phi\theta}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 3 \end{cases}$$

e

$$xz = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta)(\rho \cos \phi) = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos \theta\,.$$

Então,

$$I = \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \left(\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos \theta\right)\left(\rho^2 \operatorname{sen} \phi\right) d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \iiint\limits_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^4 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta \; d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^3 \rho^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \; d\theta d\phi d\rho =$$

$$= \underbrace{\Big[\operatorname{sen} \theta\Big]_0^{\pi/2}}_{=1} \int_0^3 \rho^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \; d\phi d\rho = \left[\frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{3}\right]_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^4 \; d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^3 = \frac{81}{5}\,.$$