



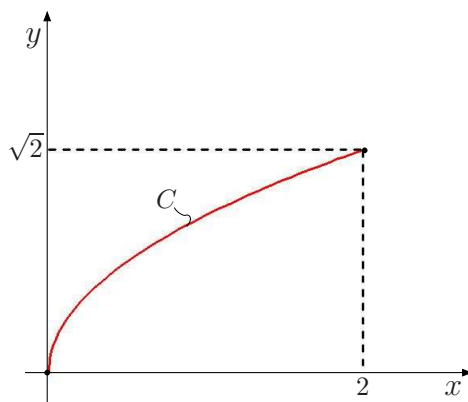
Cálculo III-A – Lista 6

Exercício 1: Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

- a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2, 0 \leq x \leq 2\}$
- b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 1\}$
- c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + x + y = 0\}$
- d) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x \geq 0\}$

Solução:

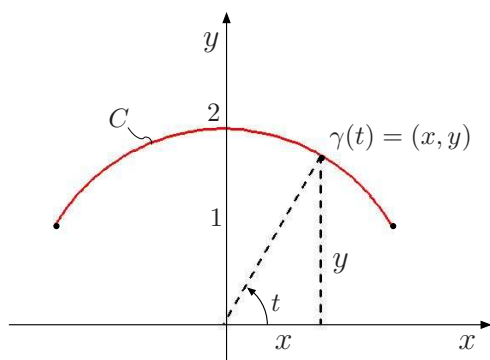
a) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Fazendo $y = t$ temos que $x = t^2$. Como $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq t^2 \leq 2$ portanto $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Portanto, uma parametrização de C é $\gamma(t) = (t^2, t)$, com $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Esta parametrização é diferenciável pois existe $\gamma'(t) = (2t, 1)$ para todo t em $[0, \sqrt{2}]$. Observe que $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{t})$ com $0 \leq t \leq 2$ é também uma parametrização de C , mas não é diferenciável pois não existe $\gamma'(0)$. Observe também que essas parametrizações percorrem C da origem $(0, 0)$ para $(2, \sqrt{2})$.

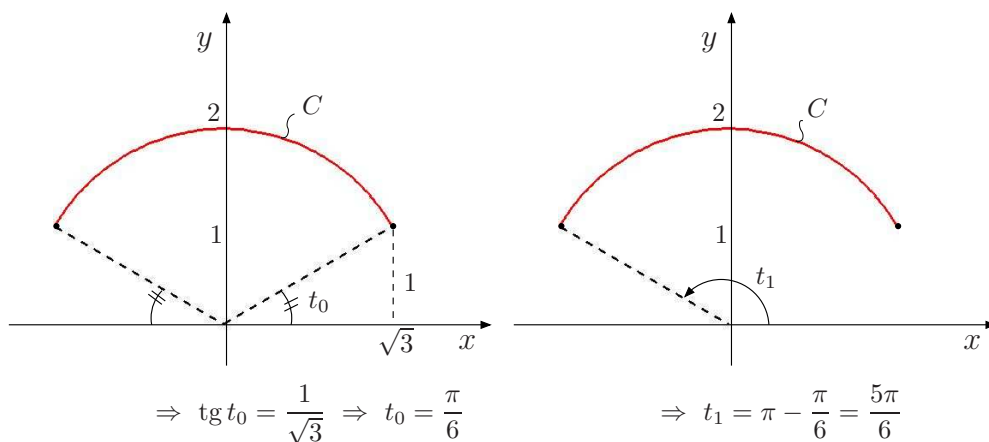
b) Se $x^2 + y^2 = 4$ e $y \geq 1$ então C é um arco de circunferência de extremidades $(\sqrt{3}, 1)$ e $(-\sqrt{3}, 1)$. Sendo assim, o esboço de C está representado na figura que se segue.



Adotando o ângulo t (em radianos) como parâmetros, temos que $x = 2 \cos t$ e $y = 2 \sin t$.

Varição de t

Temos que $t_0 \leq t \leq t_1$.



Logo $\pi/6 \leq t \leq 5\pi/6$. Assim, uma parametrização diferenciável de C é $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, com $\pi/6 \leq t \leq 5\pi/6$. Observe que essa parametrização percorre C no sentido anti-horário.

c) De $x^2 + y^2 + x + y = 0$ temos:

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

ou

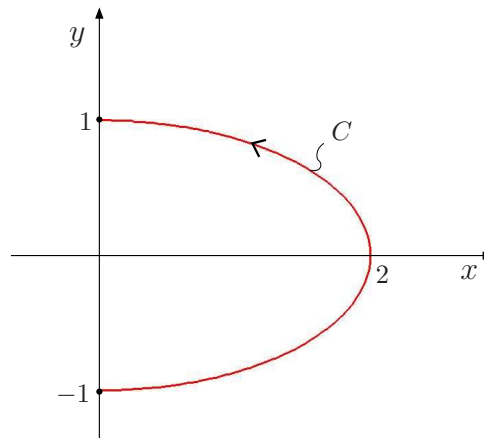
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Logo, C é uma circunferência de centro $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e raio $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Então, uma parametrização diferenciável de C no sentido anti-horário é

$$\gamma(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t\right), \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

d) O esboço da semielipse C está representado na figura que se segue.



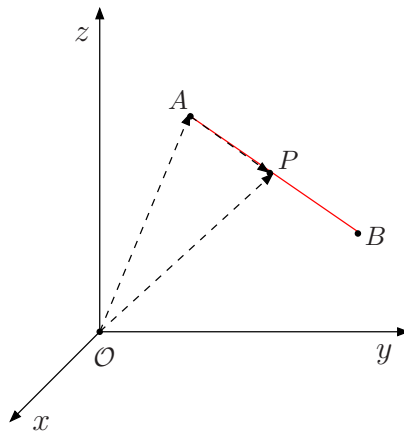
Uma parametrização de C (no sentido anti-horário) é $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Exercício 2: Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas no espaço:

- C é o segmento de reta que liga o ponto $(0, 1, 0)$ ao ponto $(2, 3, 4)$.
- C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = y - x$.
- C é a interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = y + 1$.

Solução:

a) Sejam A e B pontos do espaço. Seja $P = (x, y, z)$ pertencente ao segmento AB .



Então $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$. Mas \vec{AP} é um múltiplo escalar de \vec{AB} , ou seja, $\vec{AP} = t \cdot \vec{AB}$ onde $0 \leq t \leq 1$. Logo,

$$\gamma(t) = \vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB} = (A - 0) + t(B - A) = A + t(B - A)$$

com $0 \leq t \leq 1$, é a equação vetorial do segmento.

No nosso caso, temos que $A = (0, 1, 0)$ e $B = (2, 3, 4)$. Portanto, uma parametrização do segmento AB é:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (0, 1, 0) + t[(2, 3, 4) - (0, 1, 0)] = (0, 1, 0) + t(2, 2, 4) = \\ &= (2t, 1 + 2t, 4t)\end{aligned}$$

com $0 \leq t \leq 1$.

b) Seja $P = (x, y, z)$ pertence à curva C . Logo, x e y satisfazem à equação $x^2 + y^2 = 1$ portanto $x = \cos t$ e $y = \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $z = y - x$, então $z = \sin t - \cos t$. Portanto, uma parametrização de C é $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t - \cos t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

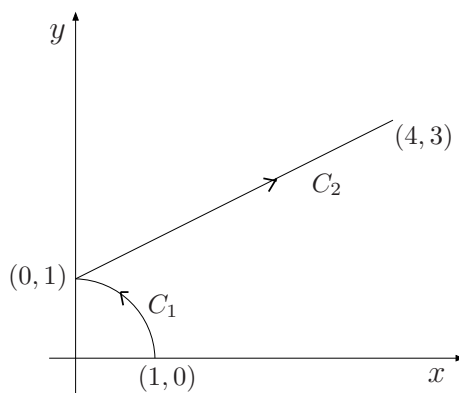
c) De $z = x^2 + y^2$ e $z = y + 1$ temos $x^2 + y^2 - y = 1$ ou $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Logo, a projeção de C no plano xy é a circunferência $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Assim, $x = \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t$ e $y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $z = y + 1$, então $y = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t$. Temos que,

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cos t, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t \right)$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercício 3: Calcule $\int_C (x + y) ds$, onde C consiste no menor arco de circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e do segmento de reta de $(0, 1)$ a $(4, 3)$.

Solução: O esboço de $C = C_1 \cup C_2$ está representado na figura que se segue.



Por propriedade da integral temos:

$$\int_C (x + y) ds = \int_{C_1} (x + y) ds + \int_{C_2} (x + y) ds.$$

Cálculo de $\int_{C_1} (x + y) ds$

Uma parametrização de C_1 é dada por $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$. Logo $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e $\|\gamma'_1(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Como $ds = \|\gamma'_1(t)\| dt$ então $ds = dt$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (x + y) ds &= \int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t) dt = \left[\sin t - \cos t \right]_0^{\pi/2} = \\ &= (1 - 0) - (0 - 1) = 2. \end{aligned}$$

Cálculo de $\int_{C_2} (x + y) ds$

Sejam $A = (0, 1)$ e $B = (4, 3)$. Uma parametrização de $C_2 = \text{segmento de reta } AB$ é dada por $\gamma_2(t) = A + t(B - A)$, com $0 \leq t \leq 1$ ou $\gamma_2(t) = (0, 1) + t[(4, 3) - (0, 1)] = (0, 1) + t(4, 2) = (4t, 1 + 2t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Logo $\gamma'_2(t) = (4, 2)$ portanto $\|\gamma'_2(t)\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ e $ds = \|\gamma'_2(t)\| dt = 2\sqrt{5} dt$. Então,

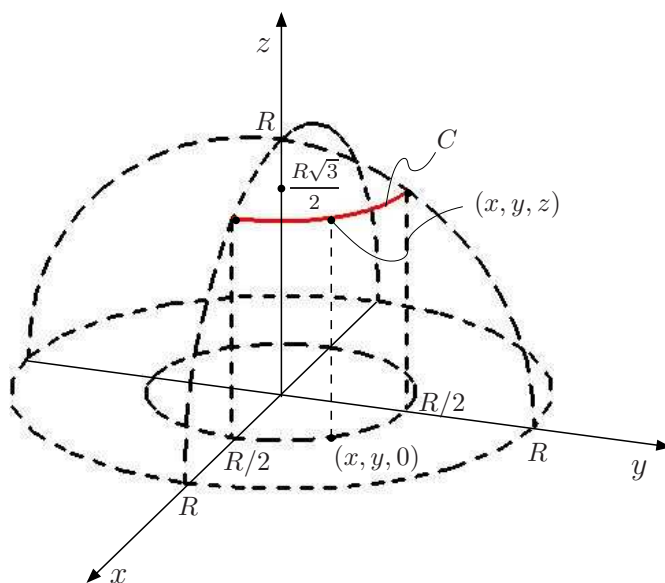
$$\begin{aligned} \int_{C_2} (x + y) ds &= \int_0^1 (4t + 1 + 2t) 2\sqrt{5} dt = 2\sqrt{5} \int_0^1 (6t + 1) dt = \\ &= 2\sqrt{5} [3t^2 + t]_0^1 = 8\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_C (x + y) ds = 2 + 8\sqrt{5}.$$

Exercício 4: Seja C parte da curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, com $R > 0$, situada no primeiro octante. Determine o valor de R de modo que $\int_C xyz ds = \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

Solução: De $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ temos $z^2 = \frac{3R^2}{4}$, logo $z = \frac{\sqrt{3}R}{2}$ pois $z \geq 0$. Isso significa que a curva C está contida no plano horizontal $z = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.



Seja $(x, y, z) \in C$. Então x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, portanto $x = \frac{R}{2} \cos t$ e $y = \frac{R}{2} \sin t$. Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos $0 \leq t \leq \pi/2$. Como $z = \frac{\sqrt{3}R}{2}$, uma parametrização de C é dada por $\gamma(t) = \left(\frac{R}{2} \cos t, \frac{R}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}R}{2} \right)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$. Logo,

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{R}{2} \sin t, \frac{R}{2} \cos t, 0 \right)$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{R^2}{4} \sin^2 t + \frac{R^2}{4} \cos^2 t} = \frac{R}{2}.$$

Assim,

$$ds = \|\gamma'(t)\| dt = \frac{R}{2} dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_C xyz \, ds &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{R}{2} \cos t \right) \left(\frac{R}{2} \sin t \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R \right) \frac{R}{2} dt = \\ &= \frac{R^4 \sqrt{3}}{16} \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \, dt = \frac{R^4 \sqrt{3}}{16} \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{R^4 \sqrt{3}}{32}. \end{aligned}$$

Como $\int_C xyz \, ds = \frac{81\sqrt{3}}{2}$ então

$$\frac{R^4 \sqrt{3}}{32} = \frac{81\sqrt{3}}{2}$$

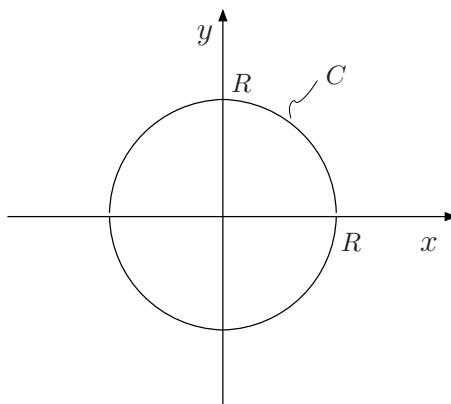
ou

$$R^4 = 16 \cdot 81 = 2^4 \cdot 3^4$$

portanto $R = 2 \cdot 3 = 6$.

Exercício 5: Mostre que o momento de inércia de um fio homogêneo com a forma de uma circunferência de raio R em torno de um diâmetro é igual a $\frac{MR^2}{2}$, onde M é a massa do fio.

Solução: Sem perda de generalidade, podemos considerar a circunferência de raio R , centrada em $(0, 0)$.



Então a equação de C é $x^2 + y^2 = R^2$ e, portanto, uma parametrização é $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como o fio é homogêneo então a densidade é constante, isto é, $\delta(x, y) = k$ para todo $(x, y) \in C$. Assim, da Física temos $M = k \times (\text{comprimento de } C) = k(2\pi R) = 2k\pi R$. Considerando um diâmetro no eixo x temos

$$I_x = \int_C y^2 k \, ds = k \int_C y^2 \, ds$$

onde

$$\begin{aligned} ds &= \|\gamma'(t)\| \, dt = \|(-R \sin t, R \cos t)\| \, dt = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} \, dt = \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} \, dt = \sqrt{R^2} \, dt = R \, dt. \end{aligned}$$

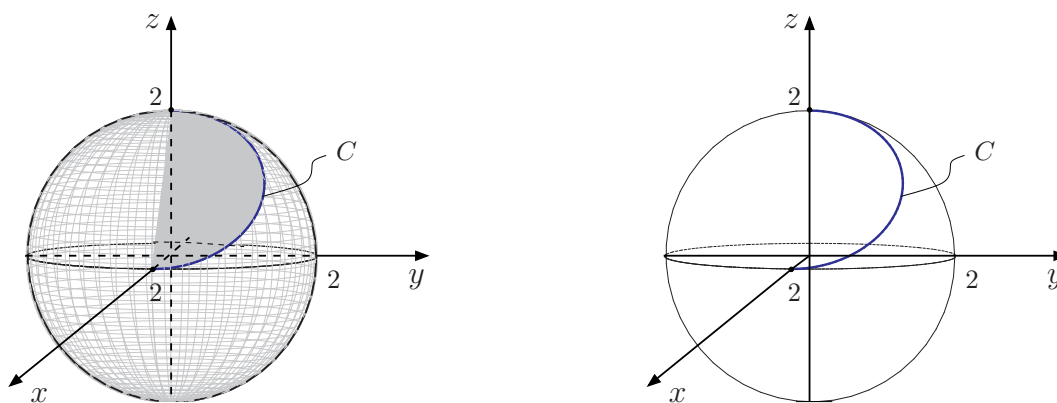
Então,

$$\begin{aligned} I_x &= k \int_0^{2\pi} (R \sin t)^2 R \, dt = kR^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = kR^3 \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= k\pi R^3 = 2k\pi R \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}. \end{aligned}$$

Exercício 6: Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$ com o plano $x + z = 2$. Sabendo-se que a densidade em cada ponto do arame é dada por $f(x, y, z) = xy$, calcule a massa total do arame.

Solução:

a) A curva C está ilustrada na figura que se segue.



Seja $(x, y, z) \in C$. Então $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$ e $x + z = 2$, logo $x^2 + y^2 + (2 - x)^2 = 4$, $y \geq 0$ ou $2x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y \geq 0$ ou $2(x - 1)^2 + y^2 = 2$, $y \geq 0$, ou $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, $y \geq 0$. Logo, a projeção de C no plano xy é a semi-elipse $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, $y \geq 0$. Então

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \\ z = 2 - (1 + \cos t) = 1 - \cos t. \end{cases}$$

Como $y \geq 0$, então $\sqrt{2} \sin t \geq 0$ portanto $0 \leq t \leq \pi$. Logo, uma parametrização para C é dada por

$$\sigma(t) = (1 + \cos t, \sqrt{2} \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Temos

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \sqrt{2} \cos t, \sin t)$$

portanto

$$ds = \|\sigma'(t)\| dt = \sqrt{\sin^2 t + 2 \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \sqrt{2} dt.$$

Como $M = \int_C f(x, y, z) ds = \int_C xy ds$, então

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi (1 + \cos t) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin t \cdot \sqrt{2} dt = 2 \int_0^\pi (\sin t + \sin t \cos t) dt = \\ &= 2 \left[-\cos t + \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^\pi = 4 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Exercício 7: Achar a massa da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, situada no primeiro quadrante se a densidade em cada ponto é igual ao produto das coordenadas do ponto.

Solução: A densidade $\delta(x, y)$ é dada por $\delta(x, y) = xy$. Logo, a massa M é dada por

$$M = \int_C \delta(x, y) ds = \int_C xy ds$$

onde C é parametrizada por:

$$\gamma(t) = (3 \cos t, 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$\gamma'(t) = (-3 \sin t, 2 \cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t}$$

Então,

$$M = \int_C xy \, ds = \int_0^{\pi/2} 6 \cos t \sin t \sqrt{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} \, dt.$$

Fazendo $u = 9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t$, tem-se:

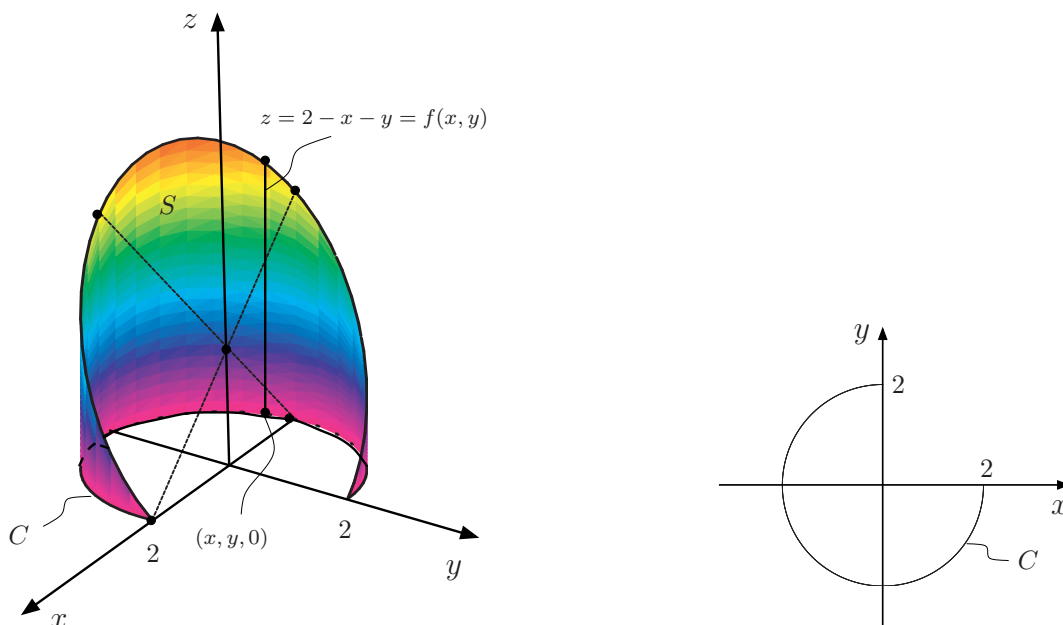
$$du = (18 \sin t \cos t - 8 \cos t \sin t) \, dt = 10 \cos t \sin t \, dt.$$

Se $t = 0$ e $t = \pi/2$, tem-se $u = 4$ e $u = 9$, respectivamente. Então,

$$M = 6 \int_4^9 u^{1/2} \frac{du}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[u^{3/2} \right]_4^9 = \frac{2}{5} (3^3 - 2^3) = \frac{38}{5} \text{ u.m.}$$

Exercício 8: Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2$, com $z \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa M reais, calcule o preço total da peça. Faça um esboço da mesma.

Solução:



Seja S a superfície lateral de base C contida no plano xy e altura $f(x, y) = 2 - x - y$ em cada $(x, y) \in C$. Então

$$A(S) = \int_C f(x, y) \, ds = \int_C (2 - x - y) \, ds$$

onde C é parametrizada por $\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$.

Assim, $\sigma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ portanto $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt = 2 \, dt$. Então,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{\pi/2}^{2\pi} (2 - 2 \cos t - 2 \sin t) 2 \, dt = 4 \left[t - \sin t + \cos t \right]_{\pi/2}^{2\pi} = \\ &= 4 \left[(2\pi - 0 + 1) - \left(\frac{\pi}{2} - 1 + 0 \right) \right] = 4 \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \right) = 6\pi + 8 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Logo, o preço da peça é igual a $(6\pi + 8)M$ reais.

Exercício 9: Calcule a massa de um arame cuja forma é dada pela curva interseção da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$, situada no primeiro octante com o plano $z = y$, supondo que a densidade em um ponto P é proporcional ao quadrado da distância de P à origem.

Solução: De $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ e $z = y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, temos $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$ se, e somente se

$$x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Logo, a projeção do arame C no plano xy é um quarto da elipse

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1,$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$, cuja parametrização é dada por $x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t$ e $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$, com $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, pois $x \geq 0$. Para encontrar uma parametrização de C utilizamos a equação do plano $z = y$.

Temos,

$$C : \gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t \right)$$

com $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Assim,

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \cos t \right)$$

portanto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo,

$$ds = \|\gamma'(t)\| dt = \frac{\sqrt{2}}{2} dt.$$

A densidade em $P = (x, y, z)$ é dada por

$$\delta(x, y, z) = k \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 = k (x^2 + y^2 + z^2),$$

onde $k > 0$. Como $M = \int_C \delta(x, y, z) ds$ então:

$$\begin{aligned} M &= k \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = 2k \int_C y ds = \\ &= 2k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t \right) \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} k \left[t - \cos t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} k \pi \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Exercício 10: Calcule a primeira coordenada do centro de massa de um fio homogêneo que está ao longo de uma curva $\gamma(t) = t\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}\vec{j} + \frac{t^4}{4}\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2$, se a densidade for $\delta(x, y, z) = 10x$.

Solução: De $\gamma(t) = \left(t, \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}, \frac{t^4}{4}\right)$ temos que $\gamma'(t) = (1, \sqrt{2}t^{3/2}, t^3)$, portanto obtemos $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 2t^3 + t^6} = \sqrt{(1 + t^3)^2} = 1 + t^3$. Logo, $ds = \|\gamma'(t)\| dt = (1 + t^3) dt$. A primeira coordenada do centro de massa do fio homogêneo é dada por

$$\bar{x} = \frac{\int_C x ds}{L}$$

onde L é o comprimento de C , isto é,

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^2 (1 + t^3) dt = \left[t + \frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 6.$$

Por outro lado,

$$\int_C x ds = \int_0^2 t(1 + t^3) dt = \int_0^2 (t + t^4) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{5}\right]_0^2 = 2 + \frac{32}{5} = \frac{42}{5}.$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{\frac{42}{5}}{6} = \frac{7}{5}.$$