



Cálculo III-A – Lista 8

Exercício 1: Um objeto percorre uma elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$ no sentido anti-horário e se encontra submetido à força $\vec{F}(x, y) = (-3y, 3x)$. Ache o trabalho realizado.

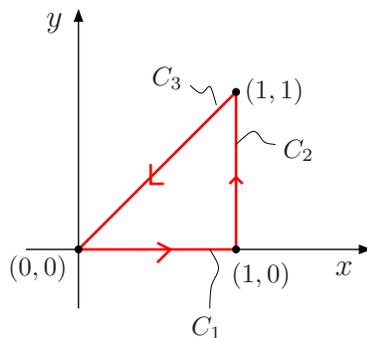
Solução: De $4x^2 + 25y^2 = 100$, temos $x^2/25 + y^2/4 = 1$. Então, $\gamma(t) = (5 \cos t, 2 \sin t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, é uma parametrização da elipse no sentido anti-horário. O trabalho é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -3y dx + 3x dy = \\ &= \int_0^{2\pi} [(-6 \sin t)(-5 \sin t) + (15 \cos t)(2 \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (30 \sin^2 t + 30 \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 30 dt = 60\pi. \end{aligned}$$

Exercício 2: Calcule $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para $\vec{F}(x, y) = (x^2, x + y)$ onde C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Temos $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Então,

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



Cálculo de $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $C_1 : y = 0$, com $0 \leq x \leq 1$. Logo, $dy = 0$. Então,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} x^2 dx + (x + y) dy = \int_{C_1} x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Cálculo de $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $C_2 : x = 1$, com $0 \leq y \leq 1$. Logo, $dx = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} x^2 dx + (x + y) dy = \int_{C_2} (1 + y) dy = \int_0^1 (1 + y) dy = \\ &= \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Cálculo de $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos que C_3^- é a curva C_3 percorrida no sentido contrário. Logo, $C_3^- : y = x$, com $0 \leq x \leq 1$, portanto, $dy = dx$. Então,

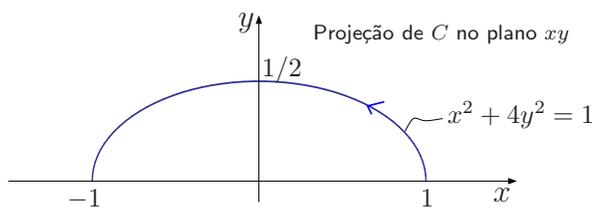
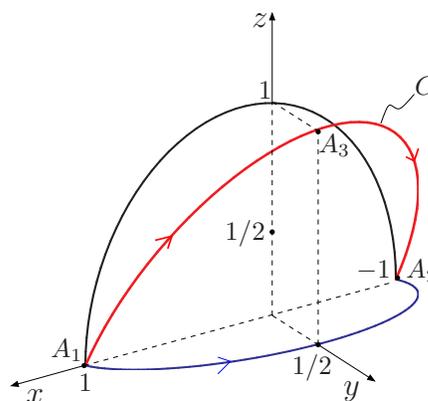
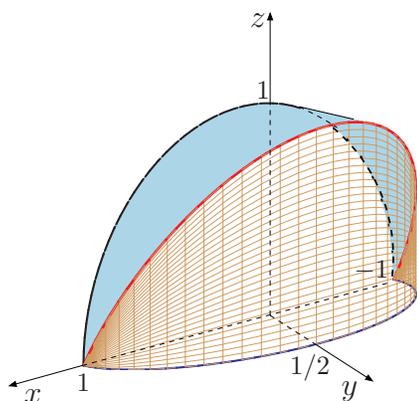
$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{C_3^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_3^-} x^2 dx + (x + y) dy = \\ &= - \int_{C_3^-} x^2 dx + (x + x) dx = - \int_{C_3^-} (x^2 + 2x) dx = - \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = - \left[\frac{1}{3} + 1 \right] = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 3: Calcule $\int_C -2y dx + 3z dy + x dz$, sendo C a interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, com $y \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$.

Solução: Esboçando os dois cilindros, vemos que $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (-1, 0, 0)$ e $A_3 = (0, 1/2, 1)$ são pontos de interseção. Ligando esses pontos encontramos C .



Se $(x, y, z) \in C$, então (x, y, z) satisfaz

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{1/4} = 1 & \text{com } y \geq 0 \\ x^2 + z^2 = 1 & \text{com } z \geq 0 \end{cases}$$

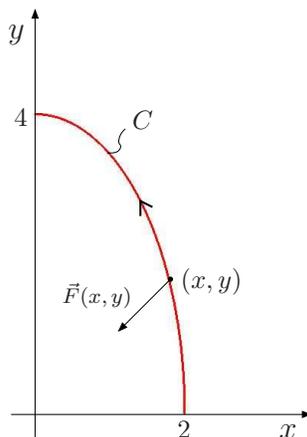
Então, $x = \cos t$ e $y = (1/2) \sin t$, com $0 \leq t \leq \pi$. Como $z = \sqrt{1-x^2}$ temos $z = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = \sin t$.

Logo, $\gamma(t) = (\cos t, (1/2) \sin t, \sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi$ é uma parametrização de C , orientada de A_1 para A_2 . Portanto, $dx = -\sin t dt$, $dy = (1/2) \cos t dt$ e $dz = \cos t dt$. Então,

$$\begin{aligned} \int_C -2y dx + 3z dy + x dz &= \\ &= \int_0^\pi \left[\left(-2 \cdot \frac{1}{2} \sin t\right) (-\sin t) + (3 \sin t) \cdot \frac{1}{2} \cos t + (\cos t)(\cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^\pi \left(\sin^2 t + \frac{3}{2} \sin t \cos t + \cos^2 t \right) dt = \int_0^\pi \left(1 + \frac{3}{2} \sin t \cos t \right) dt = \\ &= \left[t + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

Exercício 4: Achar o trabalho de uma força variável, dirigida para a origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação desta força descreve, no sentido anti-horário, a parte da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ no primeiro quadrante.

Solução: O esboço da trajetória C está representado na figura que se segue.



Como a força $\vec{F}(x, y)$ está dirigida para a origem e seu módulo é proporcional à distância de (x, y) à origem, os vetores $\vec{F}(x, y)$ e (x, y) têm mesma direção e sentidos contrários, e $\|\vec{F}(x, y)\| = k\sqrt{x^2 + y^2}$, onde $k > 0$ é uma constante. Assim, temos

$$\vec{F}(x, y) = -k(x, y).$$

O trabalho W é dado por $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é parametrizada por $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 4 \sin t)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$, portanto $\vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 4 \cos t)$. Logo,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(2 \cos t, 4 \sin t) \cdot \vec{r}'(t) dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} -k(2 \cos t, 4 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 4 \cos t) dt = \\ &= -k \int_0^{\pi/2} (-4 \sin t \cos t + 16 \sin t \cos t) dt = \\ &= -k \int_0^{\pi/2} 12 \sin t \cos t dt = -k \left[12 \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = -6k \text{ u.w.} \end{aligned}$$

Exercício 5: O campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x - 2, y - 2, z - 4x - 4)$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4x + 4y - 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}(x, y, z)$.

Solução: Das equações $z = x^2 + y^2$ e $z = 4x + 4y - 4$, temos $x^2 + y^2 - 4x - 4y = -4$ ou $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8 - 4 = 4$. Isto significa que a projeção de C no plano xy é a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Parametrizando a projeção no sentido anti-horário, temos $x = 2 + 2 \cos t$ e $y = 2 + 2 \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como $z = 4x + 4y - 4$, temos $z = 8 + 8 \cos t + 8 + 8 \sin t - 4 = 12 + 8 \cos t + 8 \sin t$. Então uma parametrização da curva C , com orientação oposta ao do enunciado é:

$$C^- : \gamma(t) = (2 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t, 12 + 8 \cos t + 8 \sin t)$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo,

$$\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, -8 \sin t + 8 \cos t)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{F}(\gamma(t)) &= (2 + 2 \cos t - 2, 2 + 2 \sin t - 2, 12 + 8 \cos t + 8 \sin t - 8 - 8 \cos t - 4) = \\ &= (2 \cos t, 2 \sin t, 8 \sin t). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t, 2 \sin t, 8 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, -8 \sin t + 8 \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin t \cos t + 4 \sin t \cos t - 64 \sin^2 t + 64 \sin t \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-64 \sin^2 t + 64 \sin t \cos t) dt = \\ &= -\frac{64}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} + 32 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = -64\pi. \end{aligned}$$

Por propriedade de integral de linha de campo vetorial, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(-64\pi) = 64\pi.$$

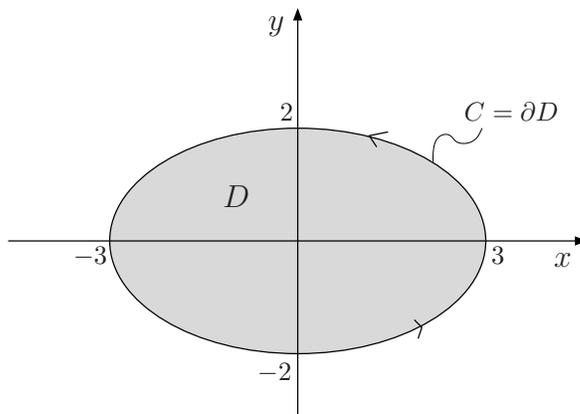
Como o trabalho é dado por $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $W = 64\pi$ u.w.

Exercício 6: Verifique o Teorema de Green calculando as duas integrais do enunciado para $\vec{F}(x, y) = (x^3 + xy^2)\vec{i} + (yx^2 + y^3 + 3x)\vec{j}$ e C a fronteira da região $D = \{(x, y); \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$.

Solução: Devemos verificar que

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde $P = x^3 + xy^2$ e $Q = yx^2 + y^3 + 3x$. O esboço de D é:



Cálculo de $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Parametrizando C , no sentido anti-horário, temos $x = 3 \cos t$ e $y = 2 \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, portanto $dx = -3 \sin t dt$ e $dy = 2 \cos t$. Logo,

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} [(3 \cos t)^3 + (3 \cos t)(2 \sin t)^2](-3 \sin t) + [(2 \sin t)(3 \cos t)^2 + (2 \sin t)^3 + \\ &+ 3(3 \cos t)](2 \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-81 \cos^3 t \sin t - 36 \cos t \sin^3 t + 36 \cos^3 t \sin t + 16 \cos t \sin^3 t + 18 \cos^2 t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-45 \cos^3 t \sin t - 20 \cos t \sin^3 t + 18 \cos^2 t) dt = \\ &= \left[45 \cdot \frac{\cos^4 t}{4} - 20 \cdot \frac{\sin^4 t}{4} + \frac{18}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 0 - 0 + 18\pi = 18\pi \end{aligned} \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (2xy + 3 - 2xy) dx dy = \iint_D 3 dx dy = 3A(D) = 3\pi ab,$$

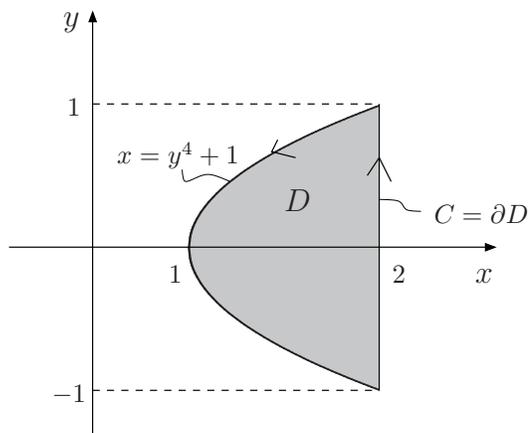
com $a = 3$ e $b = 2$. Logo,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 18\pi \quad (2)$$

De (1) e (2), vemos que o teorema está verificado.

Exercício 7: Calcule $\oint_C x^{-1}e^y dx + (e^y \ln x + 2x) dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$ e orientada no sentido anti-horário.

Solução: A região D , limitada por C , está ilustrada na figura que se segue.



Como $\vec{F} = (P, Q) = \left(\frac{e^y}{x}, e^y \ln x + 2x\right)$ é de classe C^1 no aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, contendo D e $C = \partial D$ está orientada positivamente, podemos aplicar o teorema de Green. Temos, então,

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \iint_D \left(\frac{e^y}{x} + 2 - \frac{e^y}{x}\right) dx dy = 2 \iint_D dx dy.$$

Descrevendo D como tipo II, temos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1, y^4 + 1 \leq x \leq 2\}.$$

Então,

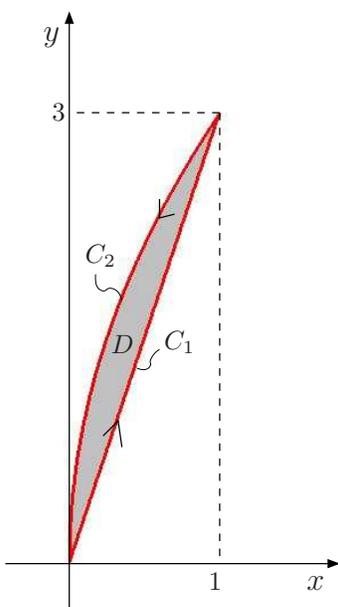
$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2 \int_{-1}^1 \int_{y^4+1}^2 dx dy = 2 \int_{-1}^1 (1 - y^4) dy = 2 \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = 2 \left(2 - \frac{2}{5} \right) = \frac{16}{5}.$$

Exercício 8: Use a fórmula $A(D) = \int_{C^+ = \partial D^+} x dy$ para calcular a área da região D limitada pelas curvas $y = 3x$ e $y^2 = 9x$.

Solução: De $y = 3x$ e $y^2 = 9x$ temos:

$$9x^2 = 9x \Leftrightarrow 9x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 9x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Logo, $(0, 0)$ e $(1, 3)$ são pontos de interseção. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Temos $C = \partial D = C_1 \cup C_2$. Logo,

$$A(D) = \int_{C_1} x \, dy + \int_{C_2} x \, dy.$$

$$\text{Cálculo de } \int_{C_1} x \, dy = \int_{C_1} 0 \, dx + x \, dy$$

Temos $C_1 : y = 3x$, com $0 \leq x \leq 1$, orientada de $(0,0)$ a $(1,3)$. Então, uma parametrização de C_1 é dada por $C_1 : \gamma(t) = (t, 3t)$, com $0 \leq t \leq 1$, portanto $\gamma'(t) = (1, 3)$. Logo, sendo $\vec{F}(x, y) = (0, x)$:

$$\int_{C_1} x \, dy = \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 3) \, dt = \int_0^1 3t \, dt = \left[\frac{3t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Cálculo de } \int_{C_2} x \, dy = \int_{C_2} 0 \, dx + x \, dy$$

Temos $C_2 : y^2 = 9x$, com $0 \leq y \leq 3$, orientada de $(1,3)$ a $(0,0)$. Então, uma parametrização de C_2^- , orientada de $(0,0)$ para $(1,3)$, é dada por $C_2^- : \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{9}, t \right)$, com $0 \leq t \leq 3$, portanto $\gamma'(t) = \left(\frac{2t}{9}, 1 \right)$. Então,

$$\int_{C_2} x \, dy = - \int_{C_2^-} x \, dy = - \int_0^3 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt,$$

onde $\vec{F}(x, y) = (0, x)$. Logo,

$$\int_{C_2} x \, dy = - \int_0^3 \left(0, \frac{t^2}{9} \right) \cdot \left(\frac{2t}{9}, 1 \right) \, dt = - \int_0^3 \frac{t^2}{9} \, dt = - \left[\frac{t^3}{27} \right]_0^3 = -1.$$

Assim,

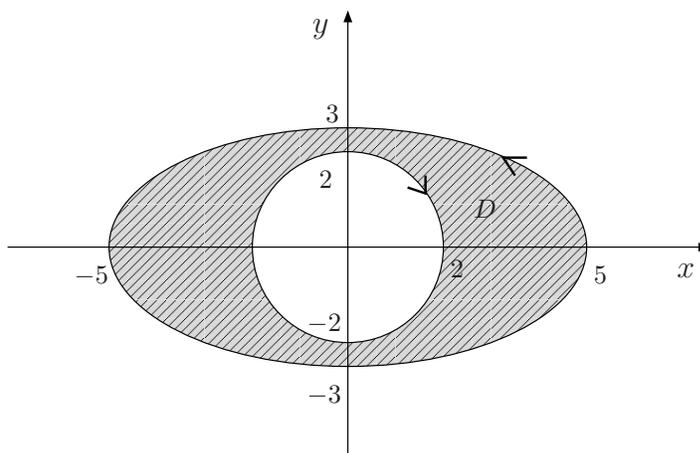
$$A(D) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Exercício 9: Se D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, calcule a integral de linha

$$I = \int_C (2xy + e^{x^2}) dx + (x^2 + 2x + \cos y^2) dy$$

onde $C = \partial D$ está orientada positivamente.

Solução: O esboço de D está representado na figura que se segue.



Como $\vec{F} = (P, Q) = (2xy + e^{x^2}, x^2 + 2x + \cos y^2)$ é um campo de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e ∂D está orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Green. Tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x,$$

portanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

Então, pelo Teorema de Green, tem-se:

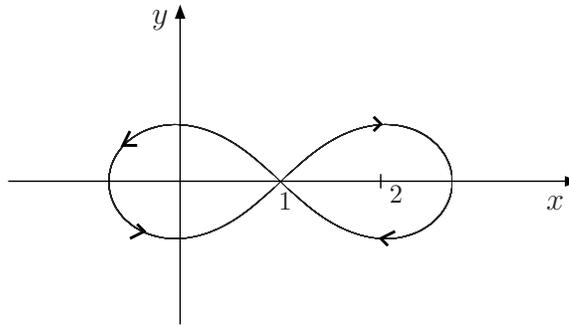
$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2A(D) = \\ &= 2 \cdot (\text{área da elipse} - \text{área do disco}) = 2(\pi ab - \pi r^2) = \\ &= 2(\pi \cdot 5 \cdot 3 - \pi \cdot 2^2) = 2(15\pi - 4\pi) = 22\pi. \end{aligned}$$

Exercício 10: Seja

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

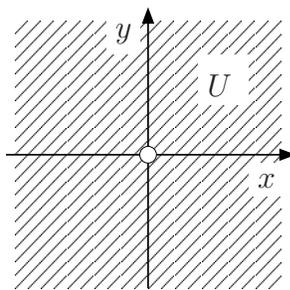
com $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- a) Calcule $\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C_1 é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, orientada no sentido anti-horário.
- b) Calcule $\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C_2 é a fronteira do quadrado $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, orientada no sentido anti-horário.
- c) Calcule $\oint_{C_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C_3 é dada na figura abaixo.



Solução:

- a) O campo $\vec{F} = (P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ é de classe C^1 em $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.



Observe que

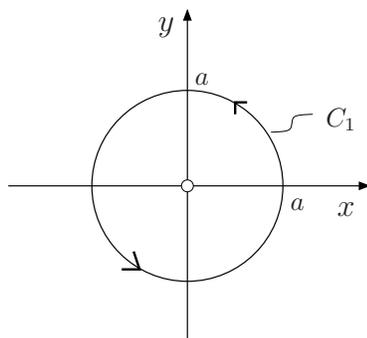
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

portanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

O esboço de C_1 está representado na figura que se segue.



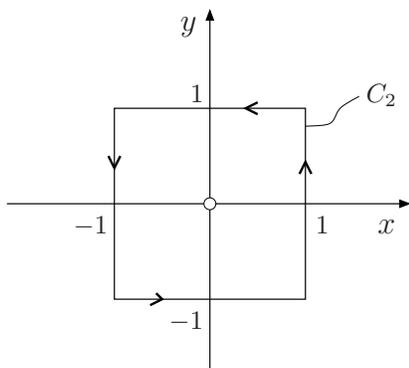
Seja D a região limitada por C_1 . Como D não está contida em U , domínio de \vec{F} , pois $(0,0) \in D$ e $(0,0) \notin U$, não podemos aplicar o Teorema de Green. Sendo assim, usaremos a definição.

Parametrizando C_1 , tem-se $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ portanto $\begin{cases} dx = -a \sin t dt \\ dy = a \cos t dt \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a \sin t}{a^2} \cdot (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} \cdot a \cos t \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 \sin^2 t}{a^2} + \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} \right) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Observe que a integral não depende do raio da circunferência.

b) O esboço de C_2 está representado na figura que se segue.



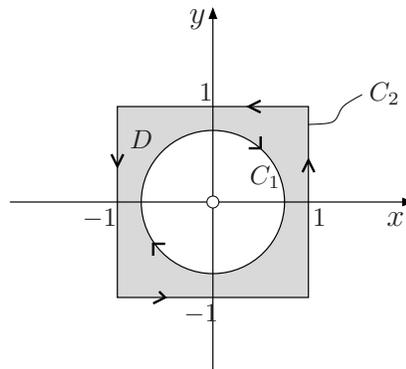
Aqui também não podemos usar o Teorema de Green, pois $(0,0)$ está no interior do quadrado. Usar a definição é uma tarefa complicada. Então, o que fazer? A ideia é isolar $(0,0)$ por uma circunferência $C_1 : x^2 + y^2 = a^2$, com $a < 1$, orientada no sentido horário.

Consideremos a região D limitada por C_2 e C_1 . Como D não contém $(0,0)$ e $\partial D = C_1 \cup C_2$ está orientada positivamente, podemos aplicar o Teorema de Green em D . Tem-se

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0$$

ou

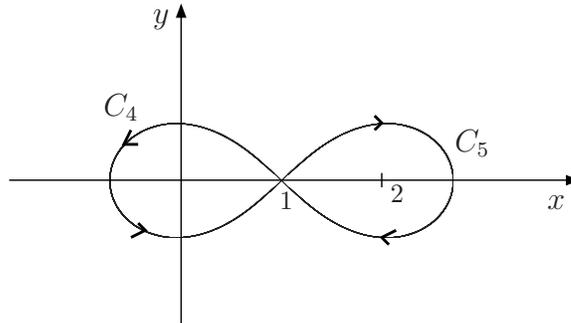
$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



ou

$$\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi \quad (\text{por (a)})$$

c)



A curva C_3 deve ser olhada como $C_3 = C_4 \cup C_5$. Logo,

$$\oint_{C_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_4^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_5^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Usando o mesmo argumento de (b), mostra-se que

$$\oint_{C_4^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

Como a região limitada por C_5 não contém $(0, 0)$ podemos aplicar o Teorema de Green e temos

$$\oint_{C_5^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

portanto

$$\oint_{C_5^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Logo,

$$\oint_{C_3^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 0 = 2\pi.$$

Exercício 11: Calcule

$$I = \int_C (e^{x^3} + y^2) dx + (x + y^5) dy,$$

onde C é formada por $y = x$ e $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, que vai do ponto $(1, 1)$ ao ponto $(1, 0)$.

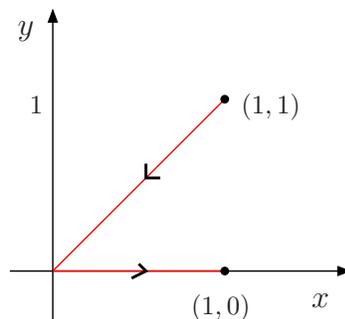
Solução: O campo $\vec{F}(P, Q) = (e^{x^3} + y^2, x + y^5)$ é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

portanto

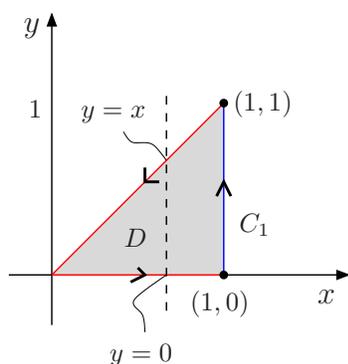
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y.$$

O esboço da curva C está representado na figura que se segue.



Calcular a integral I diretamente (através da definição) é uma tarefa ingrata. Será que podemos aplicar o Teorema de Green? NÃO, pois C não é uma curva fechada. Mas podemos fechá-la através de uma curva simples: segmento de reta C_1 , que liga $(1, 0)$ a $(1, 1)$, e depois usar o teorema de Green.

Seja então $\bar{C} = C \cup C_1$, que é uma curva fechada.



Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ a região limitada por \bar{C} . Como $\bar{C} = \partial D$ está orientada positivamente, podemos aplicar o teorema de Green. Tem-se então

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (1 - 2y) dx dy,$$

onde D é dado por $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$. Logo,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_0^x (1 - 2y) dy dx = \int_0^1 [y - y^2]_0^x dx = \\ &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

ou

$$I + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{6}.$$

Cálculo de $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Tem-se $C_1 : \begin{cases} x = 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$, portanto $dx = 0$. Então,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} (e^{x^3} + y^2) dx + (x + y^5) dy = \int_{C_1} (1 + y^5) dy.$$

pois $x = 1$ e $dx = 0$. Logo,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (1 + y^5) dy = \left[y + \frac{y^6}{6} \right]_0^1 = \frac{7}{6}.$$

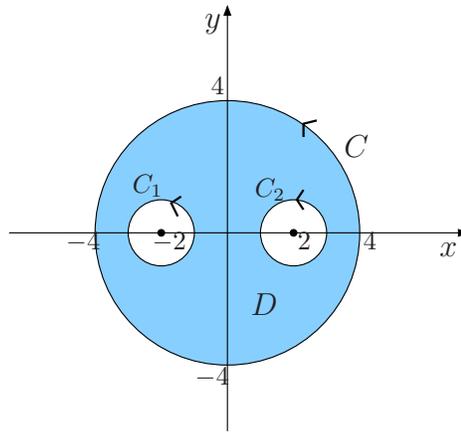
Assim,

$$I + \frac{7}{6} = \frac{1}{6},$$

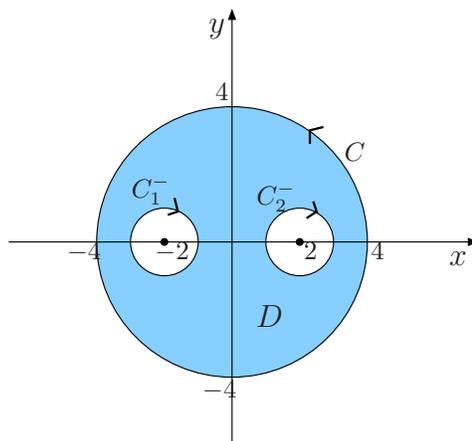
portanto $I = -1$.

Exercício 12: Considere um campo vetorial \vec{F} definido em $\mathbb{R}^2 - \{(-2,0), (2,0)\}$, satisfazendo a relação $\nabla \times \vec{F}(x,y) = \vec{0}$ em todos os pontos do domínio. Suponha que $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6$ e $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9$, onde C_1 é o círculo de raio 1 e centro $(-2,0)$ e C_2 é o círculo de raio 1 e centro $(2,0)$, orientados no sentido anti-horário. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é o círculo de raio 4 e centro $(0,0)$, orientado no sentido anti-horário.

Solução: Seja D a região do plano limitada por C , C_1 e C_2 . O esboço de D está representado na figura que se segue.



Orientando positivamente a fronteira ∂D , podemos aplicar o Teorema de Green.



Temos, então,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 \, dx dy,$$

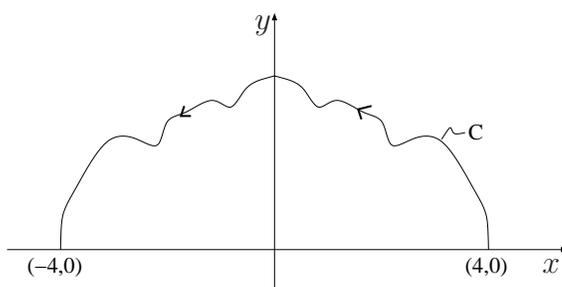
pois

$$\nabla \times \vec{F}(x, y) = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0, 0, 0).$$

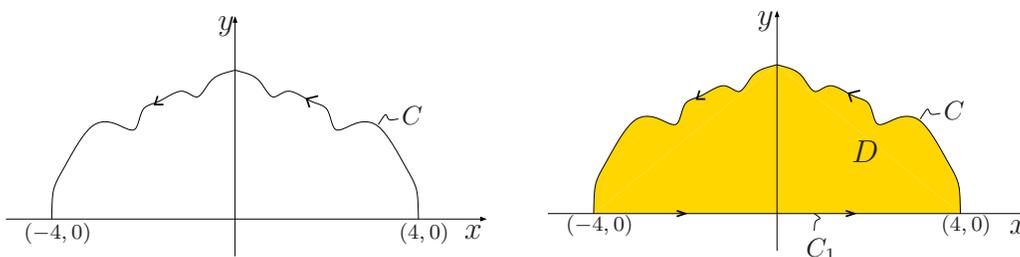
Então,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6 + 9 = 15.$$

Exercício 13: Seja C uma curva simétrica em relação ao eixo y , que vai de $(4, 0)$ a $(-4, 0)$, como mostrada na figura que se segue. Sabendo-se que a área da região delimitada por C e pelo eixo x vale 16, calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x^2}{4} + xy^3\right) \vec{i} + (2x + \arctg y) \vec{j}$.



Solução: Sabemos que o trabalho é dado por $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Mas é impossível calcular diretamente a integral pois não conhecemos a equação de C . Como $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 3xy^2 \neq 0$, \vec{F} não é conservativo. Assim, só nos resta aplicar o Teorema de Green. Para isso, devemos fechar a curva por um segmento de reta sobre o eixo x , de $(-4, 0)$ a $(4, 0)$.



Seja D a região limitada por $\bar{C} = C \cup C_1$. Como \vec{F} é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e \bar{C} , a fronteira de D , está contida em \mathbb{R}^2 e orientada no sentido anti-horário, podemos aplicar o Teorema de Green. Então, temos

$$\begin{aligned} \oint_{\bar{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\bar{C}} \underbrace{\frac{x^2}{4} + xy^3}_P dx - \underbrace{2x + \arctg y}_Q dy = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \iint_D (2 - 3xy^2) dx dy = \\ &= \iint_D 2 dx dy - \iint_D 3xy^2 dx dy. \end{aligned}$$

Como $f(x, y) = 3xy^2$ é uma função ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y , temos

$$\iint_D 3xy^2 \, dx dy = 0.$$

Assim,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2 A(D) = 2 \cdot 16 = 32.$$

Cálculo de $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $C_1 : y = 0$, com $-4 \leq x \leq 4$ portanto $dy = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \left(\frac{x^2}{4} + xy^3 \right) dx + (2x + \arctg y) dy = \int_{C_1} \frac{x^2}{4} dx = \\ &= \int_{-4}^4 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_{-4}^4 = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}.$$

Exercício 14: Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x} + x, \ln x + e^y \right)$ é definido em $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ e C é a cicloide parametrizada por $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, com $t \in [\pi, 2\pi]$.

Solução Observemos que o cálculo direto é extremamente difícil! Então, pesquisemos se $\vec{F} = (P, Q) = \left(\frac{y}{x} + x, \ln x + e^y \right)$ é um campo conservativo em U .

Vemos que \vec{F} é de classe C^1 em U e que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Como U é um conjunto simplesmente conexo, pelo teorema das equivalências, \vec{F} é conservativo e que uma função potencial $\varphi(x, y)$ é encontrada resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x} & (1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \ln x + e^y & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) e (2) em relação a x e y , respectivamente, temos

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = y \ln x + \frac{x^2}{2} + f(y) \\ \varphi(x, y) = y \ln x + e^y + g(x), \end{cases}$$

onde $f(y)$ e $g(x)$ são “constantes” de integração.

Fazendo $f(y) = e^y$ e $g(x) = x^2/2$, temos

$$\varphi(x, y) = y \ln x + \frac{x^2}{2} + e^y,$$

portanto $(x, y) \in U$ é uma função potencial de \vec{F} . Logo, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(2\pi)) - \varphi(\vec{r}(\pi)),$$

onde $\vec{r}(2\pi) = (2\pi, 0)$ e $\vec{r}(\pi) = (\pi, 2)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \varphi(2\pi, 0) - \varphi(\pi, 2) = \left(\frac{4\pi^2}{2}, e^0\right) - \left(2 \ln \pi + \frac{\pi^2}{2} + e^2\right) = \\ &= \frac{3\pi^2}{2} + 1 - 2 \ln \pi - e^2. \end{aligned}$$

Exercício 15: Verifique que a seguinte integral de linha independe do caminho e calcule o seu valor.

$$I = \int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x} \right) dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln x \right) dy.$$

Solução: Seja

$$\vec{F} = (P, Q) = \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x}, \frac{e^x}{y} - e^y \ln x \right),$$

para todo $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$, que é um conjunto simplesmente conexo. Temos

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^x}{y} - \frac{e^y}{x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

em D .

Logo, pelo Teorema das Equivalências, \vec{F} é conservativo. Portanto, existe uma função potencial $\varphi(x, y)$ para \vec{F} . Por inspeção, vemos que

$$\varphi(x, y) = e^x \ln y - e^y \ln x, \quad \forall (x, y) \in D$$

é uma função potencial. Então,

$$I = \varphi(3, 3) - \varphi(1, 1) = e^3 \ln 3 - e^3 \ln 3 - 0 - 0 = 0.$$

Outra solução:

Pelo Teorema das Equivalências, a integral I não depende do caminho que liga $(1, 1)$ a $(3, 3)$. Então, considere $C : \sigma(t) = (t, t)$, com $1 \leq t \leq 3$. Temos

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_1^3 \left(e^t \ln t - \frac{e^t}{t}, \frac{e^t}{t} - e^t \ln t \right) \cdot (1, 1) dt = \\ &= \int_1^3 \left(e^t \ln t - \frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t} - e^t \ln t \right) dt = \int_1^3 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Exercício 16: Mostre que o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = [\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2)] \vec{i} - 2x^2y \sin(xy^2) \vec{j}$$

é conservativo. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para a curva C dada por $\gamma(t) = (e^t, e^{t+1})$, com $-1 \leq t \leq 0$.

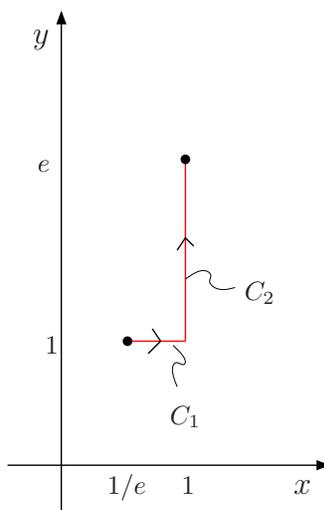
Sugestão: Prove que a integral não depende do caminho e escolha um caminho adequado.

Solução: Como $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^2$ (conjunto simplesmente conexo) e

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -4xy \sin(xy^2) - 2x^2y^3 \cos(xy^2) + 2xy \sin(xy^2) + \\ &+ 2xy \sin(xy^2) + 2x^2y^3 \cos(xy^2) = 0 \end{aligned}$$

pelo teorema das quatro equivalências, \vec{F} é conservativo.

Também pelo teorema das equivalências temos que a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende do caminho que liga $\gamma(-1) = (e^{-1}, 1)$ a $\gamma(0) = (1, e)$. Então, considere a poligonal $C = C_1 \cup C_2$, conforme figura que se segue:



Temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Cálculo de $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $C_1 : y = 1$, com $1/e \leq x \leq 1$ portanto $dy = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{1/e}^1 (\cos x - x \operatorname{sen} x) dx \\ &= \left[\operatorname{sen} x + x \cos x - \operatorname{sen} x \right]_{1/e}^1 \\ &= \left[x \cos x \right]_{1/e}^1 \\ &= \cos 1 - \frac{1}{e} \cos\left(\frac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

Cálculo de $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos $C_2 : x = 1$, com $1 \leq y \leq e$ portanto $dx = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_1^e -2y \operatorname{sen} y^2 dy \\ &= \left[\cos y^2 \right]_1^e \\ &= \cos(e^2) - \cos 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \cos(e^2) - \frac{1}{e} \cos\left(\frac{1}{e}\right).$$

Exercício 17: Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}.$$

- Calcule, caso exista, o potencial associado ao campo \vec{F} .
- Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$, orientada no sentido horário.

Solução:

a) Fazendo $\vec{F} = (P, Q) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ temos $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. Logo, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Como $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não é um conjunto simplesmente conexo, não podemos usar o teorema das equivalências. Mas isto não significa que \vec{F} não seja conservativo. Então, tentemos encontrar $\varphi(x, y)$ definida em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ ou

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) em relação a x , temos:

$$\varphi(x, y) = \int x (x^2 + y^2)^{-1/2} dx.$$

Fazendo

$$u = x^2 + y^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2},$$

temos

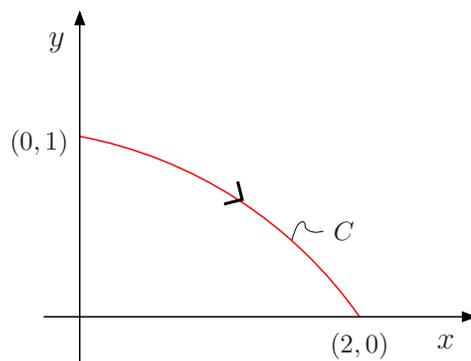
$$\varphi(x, y) = \int u^{-1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + f(y) \Rightarrow \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + f(y) \quad (3)$$

Derivando (3) em relação a y e comparando com (2), temos

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c.$$

Fazendo $c = 0$, temos que $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definida em \mathbb{R}^2 é uma função potencial de \vec{F} .

b) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(2, 0) - \varphi(0, 1) = \sqrt{2^2 + 0^2} - \sqrt{0^2 + 1^2} = 2 - 1 = 1.$$