Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 2 - 2013-1
Integral Tripla

---

1. Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido W limitado por:
   (a) $y = 0,\ y = 4,\ z = 9 - x^2,\ y + z = 4.$
   (b) $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = y$, situado no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0.$
   (c) $z = 3x^2,\ z = 4 - x^2,\ y = 0$ e $z + y = 6.$
   (d) $y = 0,\ z = 0,\ x + y = 2,\ 2y + x = 6,\ y^2 + z^2 = 4$, no primeiro octante.
   (e) $y = 0,\ z = 0,\ z + x^2 = 4,\ y + z = 4.$
   (f) $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0,\ y + z = 1,\ z = 1.$
   (g) $z = 1 - x^2,\ y + z = 2,\ z - y = 1,\ z = 0.$
   (h) $z = -y,\ y = x^2 - 1,\ z = 0.$

2. Calcule $\iiint_W (y-1)\, dV$, onde W é a região delimitada por $x = 0,\ z = 0,\ x + z = 2$ e $z = 1 - y^2$.

3. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W está situado no primeiro octante, limitado pelos planos $z = 0,\ x = 0$, $y = 2x$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$.

4. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W é o sólido limitado pelos planos $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y + z = 1$ e $x + z = 1$.

5. Calcule $\iiint_W 24z\, dV$, onde W é o sólido limitado por $x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, e $z = 1$.

6. Calcule $\iiint_W z\, dV$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = \sqrt{3\,(x^2 + y^2)}$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7. Calcule $\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dV$, onde W é a região interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, limitada superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. Calcule $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e $z = 2$.

9. Considere a integral iterada $I = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2}\ dzdydx.$
   (a) Expresse I em coordenadas cilíndricas e calcule o seu valor.
   (b) Expresse I em coordenadas esféricas e calcule o seu valor.

10. Calcule o volume do sólido W que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = \sqrt{3\,(x^2 + y^2)}$.

11. Calcule o volume do sólido W dado por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ e $z \geq x^2 + y^2$.

12. Calcule a massa do sólido W situado no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 0,\ y = 2x$ e pelo cilindro $y^2 + z^2 = 2$, supondo que a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional à distância deste ponto ao plano xy.

13. Calcule a massa do sólido W, limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 1,\ z + y = 2$ e $z = 0$, se a densidade em (x, y, z) é dada por $\rho(x, y, z) = z$.

14. Calcule a massa do sólido limitado pelo plano $z = 0$, o cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, se a densidade é $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

15. Calcule a massa do sólido limitado superiormente por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, inferiormente por $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$, sendo a densidade igual ao quadrado da distância de (x, y, z) ao plano $z = 0$.

16. Calcule a massa do sólido $W : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$, sendo a densidade dada por $\rho(x, y, z) = 2z$.

17. Encontre a massa da região sólida limitada pelas superfícies $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ e $z = 2x^2 + 2y^2$, se a densidade do sólido é $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18. Encontre o momento de inércia I_z do sólido no primeiro octante, limitado pelas superfícies $z = y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $x = 0$, sendo a densidade dada por $\rho(x, y, z) = kz$, onde $k > 0$ é uma constante.

19. Calcule a componente $\bar{z}$ do centro de massa do sólido W dado por $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8z$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, se a densidade no ponto (x, y, z) é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.

20. Considere o cilindro homogêneo $x^2 + (y - a)^2 \leq a^2$ e $0 \leq z \leq h$. Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z, em função da massa M do cilindro.

21. Seja $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y^2} dzdydx$. Reescreva a integral I na ordem $dxdydz$.

22. Seja o volume do sólido W comum às esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$. Expresse (sem calcular) o volume de W em
    (a) em coordenadas cilíndricas na ordem $dzdrd\theta$.
    (b) Expresse I em coordenadas esféricas na ordem $d\rho d\phi d\theta$.

Respostas

1. (a) $\frac{8}{15}\left(243 - 25\sqrt{5}\right)$
   (b) $\frac{21\pi - 4}{6}$
   (c) $\frac{304}{15}$
   (d) $\frac{4}{3}(3\pi - 2)$
   (e) $\frac{128}{5}$
   (f) $\frac{2}{3}$
   (g) $\frac{44}{15}$
   (h) $\frac{8}{15}$
2. $-\frac{32}{15}$
3. 1
4. $\frac{1}{12}$
5. 11
6. π
7. $\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$
8. $\frac{64\pi}{15}$
9. (a) $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 z \, dzd\theta dr = \frac{16\pi}{15}$
   (b) $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \cos\phi \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi d\theta d\rho = \frac{16\pi}{15}$
10. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$
11. $\frac{7\pi}{6}$
12. $\frac{k}{4}$
13. $\frac{7\pi}{8}$
14. $\frac{512}{75}$
15. $\frac{51\pi}{32}$
16. $\frac{7\pi}{2}$
17. $\frac{512\pi}{15}$
18. $\frac{k\pi}{48}$
19. $\frac{25}{8}$
20. $\frac{3Ma^2}{2}$
21. $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{y^2} dxdydz$
22. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dzdrd\theta$
    (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta +$
    $+ \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta$