

1. Calcule $\int_C x \, dx + x^2 \, dy$ de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ ao longo
 - (a) do eixo x
 - (b) de $C : \vec{r}(t) = (-\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \pi$
 - (c) da poligonal de vértices: $(-1, 0), (0, 1), (1, 1)$ e $(1, 0)$
2. Calcule $\oint_C -y \, dx + x \, dy$, ao longo dos seguintes caminhos fechados, orientados no sentido anti-horário.
 - (a) circunferência de centro na origem e raio 2
 - (b) elipse $x^2 + 36y^2 = 36$
 - (c) triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$.
3. Calcule $\int_C (3x + 2y) \, dx + (3x - y) \, dy$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, ao longo
 - (a) do segmento de reta
 - (b) do arco de parábola $y = x^2$
 - (c) do arco de circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, orientado no sentido anti-horário.
4. Calcule $\int_C 3xz \, dx + 4yz \, dy + 2xy \, dz$, do ponto $A = (0, 0, 0)$ ao ponto $B = (1, 1, 2)$, ao longo dos seguintes caminhos:
 - (a) segmento de reta AB
 - (b) interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x = y$.
5. Calcule $\int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz$, onde
 - (a) $\vec{F} = (P, Q, R) = (y, z, x)$ e C é a interseção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, percorrida no sentido anti-horário quando vista da origem.
 - (b) $\vec{F} = (P, Q, R) = (-2y, z, x)$ e C é a interseção das superfícies $4x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(0, -1, 0)$ ao ponto $(0, 1, 0)$.
 - (c) $\vec{F} = (P, Q, R) = (z, x, y)$ e C é a interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x + 2y + z = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário.
6. Seja C a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o semiplano $y + z = 0, y \geq 0$, percorrida de modo que sua projeção no plano xy tenha sentido anti-horário e seja $\vec{F}(x, y, z) = x^4 \vec{i} + y^4 \vec{j} + z^4 \vec{k}$. Calcule a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
7. O campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = (x - 2, y - 2, z - 4x - 4)$ atua sobre uma partícula trasladando-a ao longo da curva interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4x + 4y - 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez, no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por \vec{F} .
8. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F} = (x, y, z)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva interseção das superfícies $x + z = 5$ e $z = 4 - y^2$, orientada do ponto $(5, -2, 0)$ a $(5, 2, 0)$.
9. Achar o trabalho de uma força variável, dirigida para a origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação desta força descreve, no sentido anti-horário, a parte da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ no primeiro quadrante.

10. Um campo de forças bidimensional \vec{F} define-se por $\vec{F}(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$.
- (a) Prove que o trabalho realizado por esta força ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, depende unicamente de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ e $g(b)$.
- (b) Determine o trabalho realizado quando $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $g(a) = 3$ e $g(b) = 4$.
11. Uma partícula de peso w desce de $(0, 4)$ a $(2, 0)$ ao longo da parábola $y = 4 - x^2$. Agem sobre a partícula a força da gravidade e também uma força horizontal dirigida para a direita, de módulo igual à coordenada y do ponto. Determine o trabalho realizado por essas duas forças.
12. Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de g , tal que $h(1) = 2$, $h(2) = 4$. Calcule $\int_C x g(x^2 + y^2 + z^2) dx + y g(x^2 + y^2 + z^2) dy + z g(x^2 + y^2 + z^2) dz$, onde C está situada no primeiro octante, e é a interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima.
13. Verifique o Teorema de Green, calculando as duas integrais do enunciado, para $\vec{F}(x, y) = (4x - 2y, 2x + 6y)$, onde D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
14. Se D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, calcule a integral de linha $I = \int_C (2xy + e^{x^2}) dx + (x^2 + 2x + \cos(y^2)) dy$, onde $C = \partial D$ está orientada positivamente.
15. Calcule as integrais de linha diretamente e também pelo Teorema de Green:
- (a) $\int_C (3x - y) dx + (x + 5y) dy$, onde C é a circunferência unitária $x = \cos t$, $y = \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.
- (b) $\int_C (xy - y^2) dx + (xy) dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1$ e $y = x$, orientado positivamente.
16. Calcule as seguintes integrais:
- (a) $\oint_C (2x + \sqrt[3]{1 + x^5}) dx + (5x - e^{y^2}) dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.
- (b) $\oint_C \frac{-xy}{1+x} dx + \ln(1+x) dy$, onde C é formada por $y = 0$, $x + 2y = 4$ e $x = 0$.
- (c) $\oint_C \frac{y^2}{2} dx + 2xy dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $y = x$, $y = -x$ e $x^2 + y^2 = 4$, com $y \geq 0$.
- (d) $\oint_C x^{-1}e^y dx + (2x + e^y \ln x) dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.
- (e) $\oint_C (y - x + \arctan x) dx + (2x - y + \sqrt{1 + y^2}) dy$, onde C é a fronteira da região limitada pelas curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$.
- (f) $\oint_C \left(xy - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(x + \frac{x^3}{3} + y \right) dy$, onde C é a fronteira da região D entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$, orientada positivamente.
17. Calcule as seguintes integrais:
- (a) $\int_C (e^{x^3} + y^2) dx + (x + y^5) dy$, onde C é formada por $y = x$ e $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, que vai do ponto $(1, 1)$ ao ponto $(1, 0)$.
- (b) $\int_C (1 + 2x \cos y) dx + (7xy - x^2 \sin y) dy$, onde C é a curva $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, percorrida de $A = (\frac{\pi}{2}, 0)$ a $B = (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

(c) $\int_C (2x \ln(y + x^2) - 3y) dx + (\ln(y + x^2) - 2x) dy$, onde C é a poligonal aberta que une os pontos $(2, 0)$, $(2, 2)$ e $(1, 0)$, nesta ordem.

(d) $\int_C (e^x \ln y - 2y) dx + (y^{-1}e^x) dy$, onde C é o arco de parábola $y = x^2 + 1$, orientado de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$.

18. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = \left(2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3}, x^2e^y + \sin y\right)$, ao mover uma partícula ao longo da trajetória C dada por $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

19. Considere o campo vetorial dado por $\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y) - (y, -x)$, onde $f(x, y) = x^2e^{xy} \cos(y^2)$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, percorrida no sentido anti-horário.

20. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , tal que $\nabla^2 \varphi = -3x$. Considere o campo $\vec{F} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva formada por $y = x^3$ e $y = x$.

21. Seja $\vec{F} = (P, Q)$ um campo vetorial de classe C^1 , em $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, tal que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + 4$, para todo $(x, y) \in U$. Sabendo que $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6\pi$, onde $C_1 : x^2 + y^2 = 1$, calcule $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $C_2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$.

22. Considere um campo \vec{F} definido em $U = \mathbb{R}^2 - \{(-2, 0), (2, 0)\}$ tal que $\nabla \times \vec{F}(x, y) = \vec{0}$ em $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Suponha que $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6$, $C_1 : (x + 2)^2 + y^2 = 1$ e $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9$, $C_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $C : x^2 + y^2 = 16$.

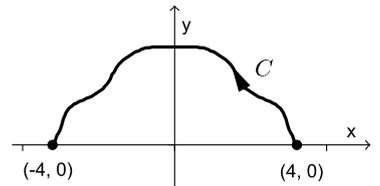
23. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2-2x+1}, \frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1} + x\right)$ e C é a curva fechada formada pelas curvas $x + y + 2 = 0$, $x - y + 2 = 0$ e $x^2 + y^2 = 4$, $-2 \leq x \leq 2$, percorrida no sentido anti-horário.

24. Calcule $\int_C \left(xy - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(2x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$, onde C é a curva $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y \geq 0$, orientada de $(4, 0)$ a $(-4, 0)$.

25. Seja $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} - y, \frac{-x}{x^2+(y-1)^2}\right)$, $(x, y) \neq (0, 1)$. Calcule a integral de linha do campo \vec{F} ao longo de C_1 e C_2 , orientadas no sentido anti-horário, onde

(a) $C_1 : x^2 + (y - 1)^2 = 1$; (b) $C_2 : x^2 + y^2 = 16$.

26. Seja C uma curva simétrica em relação ao eixo y , que vai de $(4, 0)$ a $(-4, 0)$, como mostrada na figura ao lado. Sabendo-se que a área da região delimitada por C e o eixo x vale 16, calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x^2}{4} + xy^3\right) \vec{i} + (2x + \arctan y) \vec{j}$.



27. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (1 + 2x \cos y) \vec{i} + (7xy - x^2 \sin y) \vec{j}$ e C é a curva $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, percorrida de $A = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $B = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

28. Seja $\vec{F} = (P, Q)$ de classe C^1 em $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 2), (0, -2)\}$, tal que $\frac{\partial Q}{\partial x} = x + 2 + \frac{\partial P}{\partial y}$. Sejam $C_1 : x^2 + y^2 = 16$, $C_2 : x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e $C_3 : x^2 + (y + 2)^2 = 4$. Calcule $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sabendo que $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - 10\pi = \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} - 8\pi$.

29. Calcule $\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) dy$, onde C é o arco da parábola $2x = \pi y^2$ de $P_1 = (0, 0)$ a $P_2 = (\frac{\pi}{2}, 0)$.
30. Seja $\vec{F} = (P, Q) = \left(\cos(x^2) + x^2y^3 - \frac{y}{2-x}, x^3y^2 + \ln(2-x) \right)$.
- (a) \vec{F} é conservativo? Por quê?
- (b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $C: \vec{r}(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- (c) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$, $x \leq 1$, orientada no sentido anti-horário.
31. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (P, Q) = (\cos(xy^2) - xy^2 \sin(xy^2), -2x^2y \sin(xy^2))$ e C é dada por
- (a) $C: \vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- (b) $C: \vec{r}(t) = (t + (t-1) \ln(1+t^2), -\cos(\frac{\pi}{2}t))$, $0 \leq t \leq 1$.
32. Seja C qualquer curva unindo qualquer ponto na circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ a qualquer ponto na circunferência $x^2 + y^2 = b^2$, $b > a > 0$. Seja $\vec{F}(x, y) = 3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(x, y)$. Mostre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ tem sempre o valor $b^3 - a^3$.
33. Verifique que a seguinte integral independe do caminho e calcule o seu valor: $I = \int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y} dx - \frac{x^3}{y^2} dy$.
34. Encontre todos os valores possíveis de $I = \int_C \frac{(x+y) dx + (y-x) dy}{x^2 + y^2}$, onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.
35. Considere a curva C parametrizada por $r(t) = (\sin \frac{\pi}{t}, e^{t-1})$, com $1 \leq t \leq 2$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (-y^2 \sin x, 2y \cos x)$.
36. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (y^2 + 1) \vec{i} + (3xy^2 + 1) \vec{j}$ e C é a semicircunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$, orientada de $(0, 0)$ a $(2, 0)$.
37. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (\sin y - y \sin x) \vec{i} + (x \cos y + \cos x) \vec{j}$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = (\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^3})$, com $0 \leq t \leq 1$.
38. Verifique que a integral $\int_{(1,1)}^{(3,3)} (e^x \ln y - e^x) dx - (\frac{e^x}{y} - e^y \ln x) dy$ independe do caminho e calcule o seu valor.

Respostas

1. (a) 0
(b) 0
(c) $-\frac{2}{3}$
2. (a) 8π
(b) 12π
(c) 1
3. (a) $\frac{7}{2}$
(b) $\frac{11}{3}$
(c) $\frac{\pi}{4} + 3$
4. (a) 6
(b) $\frac{11}{2}$
5. (a) $-2\sqrt{2}\pi$
(b) π
(c) -42π
6. $\frac{64}{5}$
7. 64π
8. 0
9. $-6k$
10. 3
11. $\frac{16}{3} + 4w$
12. 1
13. 8π
14. 22π
15. (a) 2π
(b) $\frac{1}{12}$
16. (a) 12π
(b) 4
(c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
(d) $\frac{16}{5}$
(e) $\frac{9}{2}$
(f) 48π
17. (a) -1
(b) $\frac{3\pi}{4}$
(c) $\frac{7}{2} - 8 \ln 2$
(d) $(e - e^{-1}) \ln 2 - \frac{16}{3}$
18. $\frac{10}{3}$
19. 12π
20. $\frac{2}{5}$
21. 42π
22. 15
23. $\frac{44}{3} + 2\pi$
24. 9π
25. (a) $-\pi$
(b) 14π
26. $\frac{64}{3}$
27. $\frac{3\pi}{4}$
28. 2π
29. $\frac{\pi^2}{4}$
30. (a) é conservativo
(b) 0
(c) $\frac{2}{3}$
31. (a) 0
(b) 1
33. $\frac{1}{3}$
34. $2\pi, 0, -2\pi$
35. $e^2 \cos 1 - 1$
36. 2
37. 1
38. 0