Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2010-2

Volume: método dos discos
Volume: método das cascas
Comprimento de arco

Em cada um dos exercícios 1 a 6 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método dos discos circulares, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

1. $R:\ y = x^3,\ y = 0,\ x = 2;$
   $E:$ eixo x

2. $R:\ y = \ln x,\ y = 0,\ x = e^2;$
   $E:$ eixo y

3. $R:\ y = x^2,\ x + y = 2;$
   $E:$ eixo x

4. $R:\ y = x^2 - 2x, y = 4 - x^2;$
   $E:$ reta $y = 4$

5. $R: y = \cos x,\quad y = \operatorname{sen} x,\quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};$
   $E:$ reta $y = -1$

6. $R:\quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1;$
   $E:$ eixo x

Em cada um dos exercícios 7 a 10 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método das cascas cilíndricas, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

7. $R:\ y = \dfrac{1}{4 - x^2},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;$
   $E:$ eixo y

8. $R:\ y = x^2,\ x = y^2;$
   $E:$ reta $x = -2$

9. $R:\ x = y^2,\ x = 0,\ y = 1;$
   $E:$ reta $y = 2$

10. $R:\ y = \ln x,\ y = 0,\ x = e^2;$
    $E:$ eixo x

Em cada um dos exercícios 11 a 14 considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Calcule, por dois métodos distintos, o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

11. $R:\ y = x^3,\ y = 0,\ x = 2;$
    $E:$ eixo y

12. $R:\ y = \dfrac{x}{2},\ y = \sqrt{x};$
    $E:$ eixo x

13. $R:\ xy = 4,\ x + y = 5;$
    $E:\ y = 1$

14. $R:\ y = \ln x,\ y = \dfrac{x-1}{e-1};$
    $E:$ eixo x

15. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo x, pelo método que achar conveniente.

$$R: \begin{cases} y = \dfrac{x}{4} + 1, & \text{se} \quad -4 \leq x < 0 \\ y = \sqrt{1 - x^2}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y = 0, & \text{se} \quad -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

16. Calcule o comprimento de arco do gráfico de $y = x^2$, desde o ponto $(0,0)$ até $(1,1)$.

17. Calcule o comprimento de arco do gráfico da função $g(y) = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{1}{4y}$, de $(1, g(1))$ até $(2, g(2))$.

18. Quando giramos o gráfico de uma função de classe C^1, $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo $0x$, obtemos uma **superfície de revolução**, cuja área é definida pela integral

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

(para maiores detalhes, veja o livro do Stewart vol. 1, seção 8.2)

Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação em torno de $0x$ do gráfico de cada função indicada. Faça um esboço da superfície.

a)$f(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$ b)$f(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1$ c)$f(x) = \sqrt{1-4x^2}, -1/2 \leq x \leq 1/2$

RESPOSTAS DA LISTA 6

1. $\displaystyle\int_0^2 \pi\left(x^3\right)^2\,dx = \frac{128\pi}{7}$
2. $\displaystyle\int_0^2 \pi\left(\left(e^2\right)^2 - (e^y)^2\right)\,dy = \frac{\pi\left(3e^4+1\right)}{2}$
3. $\displaystyle\int_{-2}^1 \pi\left((-x+2)^2 - \left(x^2\right)^2\right)dx = \frac{72\pi}{5}$
4. $\displaystyle\int_{-1}^2 \pi\left(\left(x^2-2x-4\right)^2 - \left(4-x^2-4\right)^2\right)dx = 45\pi$
5. $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi\left((1+\cos x)^2 - (1+\operatorname{sen} x)^2\right)\,dx = \left(4\sqrt{2}-3\right)\pi$
6. $\displaystyle 2\int_0^1 \pi\left(\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx = \frac{32\pi}{105}$
7. $\displaystyle\int_0^1 2\pi x\,\frac{1}{4-x^2}\,dx = \pi(\ln 4 - \ln 3)$
8. $\displaystyle\int_0^1 2\pi(x+2)\left(\sqrt{x}-x^2\right)\,dx = \frac{49\pi}{30}$
9. $\displaystyle\int_0^1 2\pi(2-y)y^2\,dy = \frac{5\pi}{6}$
10. $\displaystyle\int_0^2 2\pi y\left(e^2-e^y\right)\,dy = 2\pi\left(e^2-1\right)$
11. $\displaystyle\int_0^8 \pi\left(2^2 - (\sqrt[3]{y})^2\right)dy = \int_0^2 2\pi x\,x^3\,dx = \frac{64\pi}{5}$
12. $\displaystyle\int_0^4 \pi\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)dx = \int_0^2 2\pi y\left(2y-y^2\right)dy = \frac{8\pi}{3}$
13. $\displaystyle\int_1^4 \pi\left((5-x-1)^2 - \left(\frac{4}{x}-1\right)^2\right)dx = \int_1^4 2\pi(y-1)\left(5-y-\frac{4}{y}\right)dy = 2\pi(8\ln 2 - 3)$
14. $\displaystyle\int_1^e \pi\left((\ln x)^2 - \left(\frac{x-1}{e-1}\right)^2\right)dx = \int_0^1 2\pi y\left(1+(e-1)y-e^y\right)dy = \frac{\pi(2e-5)}{3}$

15. $\displaystyle\int_{-4}^{0} \pi\left(\frac{x}{4}+1\right)^2 dx + \int_0^1 \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \int_0^1 2\pi y\left(4-4y+\sqrt{1-y^2}\right) dy = 2\pi$

16. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}$

17. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+\left(y^2-\frac{1}{4y^2}\right)^2}\ dy = \frac{59}{24}$

18. a)$S = \dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$; b)$S = \pi[e\sqrt{1+e^2}+\ln(e+\sqrt{1+e^2})-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$;
c)$S = 4\sqrt{3}\pi[2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})]$