



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2013-1

Teorema de Gauss

Teorema de Stokes

1. Verifique o Teorema de Gauss, calculando as duas integrais do enunciado para
 - (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e o sólido W limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$.
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (z + 1)\vec{k}$ e o sólido W limitado pelas superfícies $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$.
2. Seja $\vec{F}(x, y, z) = 6x\vec{i} - 2y\vec{j} + 5z\vec{k}$. Seja S a superfície da esfera com centro $(1, 0, 1)$ e raio 5 . Ache o fluxo de \vec{F} , de dentro para fora de S .
3. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + z^2\vec{k}$, S é a fronteira do cilindro $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ e \vec{n} orientada para fora de W .
4. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, S é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e \vec{n} a orientação normal exterior a S .
5. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos x, y + y \operatorname{sen} x, 2z)$, através do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$, onde \vec{n} é a normal unitária exterior a S .
6. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + 4z^2\vec{k}$, através da superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z + y = 2$, com a normal S apontando para fora do sólido.
7. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + e^y)\vec{i} + (yz^2 + \operatorname{sen}^2 x)\vec{j} + (5 + zx^2)\vec{k}$, através da superfície aberta $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z \geq 0$, com \vec{n} tendo componente z positiva.
8. Seja $\vec{F}(x, y, z) = z \arctan(y^2)\vec{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\vec{j} + z\vec{k}$. Determine o fluxo de \vec{F} através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$, sendo \vec{n} a normal com componente z não negativa.
9. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + (-2y + e^x \cos z)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$ e S é definida por $\{z = 9 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 5\}, \{z = 5, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $\{z = 8 - 3(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 1\}$.
10. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{3} + y, \frac{y^3}{3}, \frac{z^3}{3} + 2\right)$, através da superfície S do sólido W definido por $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$, com campo de vetores normais a S apontando para fora de W .
11. Seja T o tetraedro de vértices $O = (0, 0, 0), A = (2, 0, 0), B = (0, 6, 0), C = (0, 0, 2)$. Sejam S a superfície lateral de T , constituída pelas faces de T que não estão no plano xy e $\vec{F}(x, y, z) = (3y + z, x + 4z, 2y + x)$ um campo vetorial de \mathbb{R}^3 . Calcule $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, com a normal exterior a S .
12. Seja a superfície cônica S de vértice $(0, 0, h), (h > 0)$, de base situada no plano xy com raio 1 e \vec{n} com componente \vec{k} não negativa. Seja $\vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\vec{j} + 2(z + 1)\vec{k}$, sendo $f(x, y, z)$ de classe C^2 em \mathbb{R}^3 . Calcule o fluxo de \vec{F} através de S .
13. Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , tal que $\nabla^2 f = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule $\iint_S \nabla f \cdot \vec{n} \, dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com \vec{n} exterior a S .
14. Seja S a calota esférica dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, onde $0 \leq z \leq 2$. Sobre S fixe a orientação \vec{n} , tal que $\vec{n}(0, 0, 2) = \vec{k}$. Calcule $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y^3}{3} + ze^x, \frac{x^3}{3} - \cos(yz), xy\right)$.

15. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x + e^z)\vec{i} + (3y - ze^x)\vec{j} + (z - 2)\vec{k}$, seja S a calota esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, com $z \geq 0$ e raio $a > 0$. Sabendo que o fluxo de \vec{F} na direção da normal exterior \vec{n} é igual a $2\pi a^3$, calcule o raio da calota.
16. Calcule $\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y + 2)\vec{i} + (x^3 + y^4)\vec{j} + (2yz - 1)\vec{k}$ e S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, com $z \leq 1$, orientada com \vec{n} exterior.
17. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Seja W um sólido e seja S a fronteira de W , com normal exterior \vec{n} . Prove que $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS = \iiint_W \nabla^2 f \, dx dy dz$, onde $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ é a derivada direcional de f na direção do vetor unitário \vec{n} .
18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , tal que $\nabla^2 f = x^2 + y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 1) = \frac{1}{3}$, para todo $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS$, onde S é a lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, com normal \vec{n} apontando para fora de S .
19. Considere o campo vetorial $\vec{F} = (x + f(y, z))\vec{i} + (x - y + z)\vec{j} + (z^4 - 3a^2)\vec{k}$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Seja S uma lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{a}$, $a > 0$ e $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$. Sabendo que o fluxo de \vec{F} através de S , de dentro para fora é igual a πa^3 , calcule o valor de a .
20. Encontre o fluxo do campo $\vec{F} = (e^y + \cos(yz))\vec{i} + (-2zy + \text{sen}(xz))\vec{j} + \left(z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}$ através da superfície S , orientada positivamente, $S = S_1 \cup S_2$, onde $S_1 : z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$ e $S_2 : z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.
21. Calcule $\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{j} + xy\vec{k}$, através de $S : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4}$, $z \leq 1$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0, 0, -2)$ seja o vetor $-\vec{k}$.
22. Verifique o teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado para
 - (a) $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$, S o parabolóide $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ e \vec{n} apontando para fora de S .
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, S o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $a > 0$, orientada com \vec{n} normal unitária exterior a S .
23. Use o o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva C em:
 - (a) $\oint_C (3y + z) \, dx + (x + 4y) \, dy + (2x + y) \, dz = -\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$, onde C é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $y + z = 1$.
 - (b) $\oint_C (y + z) \, dx + (z + 2x) \, dy + (x + y) \, dz = -\pi$, onde C é a interseção do plano $y = z$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.
 - (c) $\oint_C (2xy) \, dx + [(1 - y)z + x^2 + x] \, dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right) \, dz = \pi$, onde C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o cone $z = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$.
 - (d) $\oint_C (8x - 2y) \, dx + y \, dy + 3z \, dz = -4$, onde C é a fronteira do triângulo situado no plano $x + z = 2$, de vértices $(2, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$.
24. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + \left(x - z + \frac{y^2}{2 + \text{sen} y}\right)\vec{j} + y\vec{k}$ e C a interseção do parabolóide $4z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido anti-horário se projetada no plano xy .
25. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = (yz + z, xz + e^{-y}, xy + e^{-z})$ e C a curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $z = y + 3$, orientada no sentido anti-horário quando projetada no plano xy .
26. Calcule $\int_C (e^{x^2} + y^2) \, dx + (e^{y^2} - z^2) \, dy + (e^{z^2} - x^2) \, dz$, onde C é o contorno da parte do plano $x + y + z = 1$, que está no primeiro octante, no sentido anti-horário.

27. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (y - x + \sin x, z - x + \cos y, x - y + e^z)$ e C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ com o plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.
28. Calcule a circulação do campo $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + xz\vec{j} + z^2\vec{k}$ ao redor da curva C fronteira do triângulo recortado do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, no sentido horário quando vista da origem.
29. Calcule $\oint_C (e^{-x^3/3} - yz) dx + (e^{-y^3/3} + xz + 2x) dy + (e^{-z^3/3} + 5) dz$, onde C é dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.
30. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = yz^2\vec{i} + 2xz\vec{j} + \cos(xyz)\vec{k}$ e C é a interseção da superfície $z = x^2 + y^2$ com $z = 10 - x^2 - y^2$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.
31. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y, z) = (2^x + z^2)\vec{i} + (2^y + x^2)\vec{j} + (2^z + y^2)\vec{k}$ quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da borda da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está no primeiro octante, no sentido anti-horário quando vista de cima.
32. Calcule $\int_C (z - y) dx + \ln(1 + y^2) dy + [\ln(1 + z^2) + y] dz$, sendo C dada por $\vec{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 4 - 4 \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
33. Seja o campo \vec{F} , tal que $\text{rot } \vec{F} = (-4x, 2(y - 1), f(z))$, onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 com $f(0) = 1$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva dada pela interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.
34. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo \vec{F} um campo em \mathbb{R}^3 dado por $\vec{F} = (-y, x, f(x, y, z))$, onde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , tal que $\nabla f \cdot \vec{i} = -3$ em \mathbb{R}^3 e C é a interseção da superfície $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x - y = 2$, com uma orientação tal que quando projetada no plano $z = 0$ produz um percurso no sentido horário.
35. Utilizando o teorema de Stokes, transforme $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ em uma integral de linha e calcule:
- $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{k}$, $S: \vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, com $u^2 + v^2 \leq 1$, sendo \vec{n} a normal apontando para cima.
 - $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i}$, S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 \leq 1$ e $z \geq 0$, sendo \vec{n} a normal apontando para cima.
 - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{j} + xy\vec{k}$, $S: x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, $z \leq 1$, sendo \vec{n} tal que $\vec{n}(0, 0, -2) = -\vec{k}$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\vec{i} + 2y^3z\vec{j} + 3z\vec{k}$, $S: \vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\vec{i} + (r \sin \theta)\vec{j} + r\vec{k}$, com $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sendo \vec{n} a normal exterior.
36. Calcule $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (y, 2x, xyz)$, S é formada pelas cinco faces do cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ que não estão no plano xy com \vec{n} exterior a S .
- Utilizando o teorema de Gauss
 - Utilizando o teorema de Stokes.
37. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 + e^{x^2}, xz + e^y, 2xy + ze^z)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z = 1 - y^2$, $z \geq 0$, com o plano $x + z = 2$, orientada no sentido anti-horário quando vista do eixo x positivo.
38. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (z, z^2 + y \cos y, 2yz + ze^{-z})$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z = x^2$, com o plano $y + z = 4$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.
39. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (-2y + e^{\sin x}, -z + y, x^3 + e^{\sin z})$ e C é a interseção da superfície $z = y^2$, com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido de crescimento de y .

40. Determine $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (yz + x^3, xz + 3y^2, xz + 4)$ e C é a curva obtida como interseção das superfícies $z = 5 - y^2$, $z \geq 1$ e $x + z = 5$, orientada no sentido de crescimento de y .
41. Calcule $\int_C (ze^{xz} + ye^{xy} + 6x) dx + (xe^{xy} + ze^{yz}) dy + (xe^{xz} - \operatorname{sen} z) dz$, onde C é a curva dada por $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + (t-1)(t-3) \vec{j} + \pi t^3 \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.
42. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (e^{-y} - ze^{-x}, e^{-z} - xe^{-y}, e^{-x} - ye^{-z})$ e C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \left(\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}, \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right), \frac{1-e^t}{1-e} \right)$, $0 \leq t \leq 1$.
43. Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z, z + x + e^{-y^2/2}, x + y + e^{-z^2/2})$ ao longo da curva interseção da superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = -1$, orientada no sentido de crescimento de x .
44. Seja o campo vetorial $\vec{F} = (3yz^2 - 2xe^z) \vec{i} + (3xz^2 + \cos y) \vec{j} + (6xyz - x^2e^z) \vec{k}$
- (a) \vec{F} é conservativo? Por quê?
- (b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, se C é a curva descrita por $\vec{r}(t) = t \vec{i} + \left(\frac{\pi}{2} t^3 \right) \vec{j} + (t-1)(t-2) \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$
- (c) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a fronteira do plano $x + y + z = 2$, que fica no primeiro octante, orientada no sentido anti-horário.

Respostas

- | | | |
|--|-----------------------|--------------------------------|
| 1. (a) 24π | 16. $-\frac{9\pi}{2}$ | 34. π |
| (b) $\frac{\pi}{2}$ | 18. $\frac{\pi}{6}$ | 35. (a) 0 |
| 2. 1500π | 19. $\frac{1}{3}$ | (b) $-\pi$ |
| 3. 3π | 20. 6π | (c) $-\frac{3\pi}{4}$ |
| 4. $-\frac{12\pi}{5}$ | 21. $-\frac{3\pi}{4}$ | (d) $\frac{\pi}{4}$ |
| 5. $\frac{2}{3}$ | 22. (a) 2π | 36. (a) 4 |
| 6. 17π | (b) $-\pi a^2$ | (b) 4 |
| 7. $\frac{164\pi}{5}$ | 24. 4π | 37. $\frac{8}{3} - e + e^{-1}$ |
| 8. $\frac{3\pi}{2}$ | 25. -4π | 38. $-\frac{16}{3}$ |
| 9. $\frac{81\pi}{4}$ | 26. $\frac{1}{3}$ | 39. 2 |
| 10. $\frac{\pi}{15} (890 + 3\sqrt{2})$ | 27. $-2\pi a(a+b)$ | 40. 32 |
| 11. -12 | 28. $-\frac{1}{2}$ | 41. e^π |
| 12. $\frac{2\pi}{3} (h+3)$ | 29. 6π | 42. $3e^{-1}$ |
| 13. $\frac{4\pi}{5}$ | 30. 75π | 43. $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$ |
| 14. 8π | 31. 16 | 44. (a) É conservativo |
| 15. 1 | 32. 32π | (b) 0 |
| | 33. 5π | (c) 0 |