Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 10 - 2011-2

Função vetorial de várias variáveis.
Matriz jacobiana. Aproximação afim.
Regra da cadeia.

Em cada exercício de 1. a 6. fazer o seguinte:

(i) calcular a derivada (matriz jacobiana) da função no ponto X_0 indicado;
(ii) se possível, calcular o jacobiano (determinante da matriz jacobiana) da função no mesmo ponto;
(iii) encontrar a diferencial $d_{X_0}f$ em $X - X_0$;
(iv) determinar a função afim $A(X)$ que melhor aproxima a função f dada em X perto de X_0.

1. $f(X) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{y + x^2}$ em $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $f(X) = f(u,v) = (u\cos 2v, u \operatorname{sen} 2v)$ em $X_0 = (u_0, v_0) = (2, \pi/2)$

3. $f(X) = f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$ em qualquer $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$

4. $f(X) = f(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$ em $X_0 = t_0 = 0$

5. $f(X) = f(x,y,z) = \left(x^2 - y^2, x^2 + z^2, x + y - z\right)$ em $X_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$

6. $f(X) = f(\rho, \theta, \phi) = (\rho\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)$ em $X_0 = (\rho_0, \theta_0, \phi_0) = (1, 3\pi/2, \pi/2)$

7. Usando uma função afim, calcule aproximadamente o vetor $\begin{pmatrix} \sqrt{16,02} - \sqrt[3]{0,97} \\ \sqrt[4]{16,02} - \sqrt{1,04} \\ \sqrt[5]{1,04} \end{pmatrix}$.

8. Considere $c \in \mathbb{R}$, c constante, $a < t < b$ e as funções $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Mostre que:

   (a) $(f+g)' = f' + g'$ e $(cf)' = cf'$
   (b) $(\phi f)' = \phi f' + \phi' f$
   (c) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$ Nesse caso, a ordem dos produtos escalares pode ser trocada.
   (d) para $n = 2$ ou 3, $(f \times g)' = f \times g' + f' \times g$ Nesse caso a ordem dos produtos vetoriais não pode ser trocada.
   (e) para f não nula, $f \cdot \dfrac{df}{dt} = \|f\| \dfrac{d\|f\|}{dt}$ (sugestão: use $\|f\| = \sqrt{f \cdot f}$)
   (f) para f não nula: $\|f\|$ é constante $\Leftrightarrow f \cdot f' = 0$

Nos exercícios 9. a 11. mostre que a função dada é diferenciável ou, se não for diferenciável, indique em que pontos não é diferenciável.

9. $f(x,y) = \left(\dfrac{x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}, \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, \dfrac{(x-1)^4}{(x-1)^2 + y^2}\right)$, se $(x,y) \neq (0,0); (x,y) \neq (1,0); (x,y) \neq (0,1)$

   $f(0,0) = (0,0,1)$; $f(1,0) = (-1/2, 1, 0)$; $f(0,1) = (0,0,1/2)$.

10. $f :\ R^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(X) = \|X\|$

11. $f\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(r-t) \\ s/(r+t) \end{bmatrix}$

12. Sejam $X \in \mathbb{R}^n$, A uma matriz $m \times n$ e f a função linear $f(X) = AX$. Prove:
    $d_{X_0}f(X) = AX$ para todo X_0, isto é, a diferencial em todo ponto X_0 de uma função linear f é a propria função linear f.

13. Sejam $F(x,y,z) = \left(3x^2 + yz, z + y^3\right)$ e $G(x,y) = \left(x^2 + y^2, xy, x^3, x + y^3\right)$.
    (a) Verifique que uma das compostas $F \circ G$ ou $G \circ F$ não está definida;
    (b) Determine $F'(x,y,z)$ e $G'(x,y)$;
    (c) Determine $(F \circ G)'(1,-1)$ ou $(G \circ F)'(1,-1,2)$, a que for possível.

14. Se a função f aplicada em um vector não nulo $\vec{r} = X \in \mathbb{R}^n$ é uma função real do seu comprimento $r = \|\vec{r}\|$, isto é, $f(\vec{r}) = g(r)$ e se g é diferenciável,
    (a) mostre que $\nabla f(\vec{r}) = \dfrac{g'(r)}{r}\,\vec{r}$;
    (b) determine $\nabla f(\vec{r})$ quando (i) $g(r) = \dfrac{1}{r^3}$ (ii) $g(r) = \ln r$.

15. Seja $h(x,y,z) = g(y^2 + xz, \sqrt{xyz})$, onde g é uma função real diferenciável. Encontre $\nabla h(1,-1,-4)$ sabendo que $\nabla g(-3,2) = (1,3)$ e $\nabla g(1,3) = (-3,2)$.

16. Seja $f(u) = \left(u^2 + 1, \sqrt{u}\right)$, onde $u = g(x,y,z)$ é uma função real diferenciável, tal que $g(2,1,3) = 1$ e $\nabla g(2,1,3) = (5,3,-1)$. Se $F = f \circ g$, encontre $\dfrac{\partial F}{\partial x}(2,1,3)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(2,1,3)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}(2,1,3)$.

RESPOSTAS DA LISTA 10 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. (i) $f'\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f\begin{pmatrix} x+1/2 \\ y-0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2} - x + y$ (iv) $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -x + y$

2. (i) $f'(2,\pi/2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ (ii) $det(Jf(2,\pi/2)) = 4$ (iii) $d_{X_0}f(u-2, v-\pi/2) = \begin{bmatrix} 2-u \\ 2\pi - 4v \end{bmatrix}$
   (iv) $A(u,v) = \begin{bmatrix} -u \\ 2\pi - 4v \end{bmatrix}$ ou $A(u,v) = (-u, 2\pi - 4v)$

3. (i) $f'\left(x_1^0, x_2^0\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ x_2^0 & x_1^0 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f\left(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - x_1^0 + x_2^0 \\ -x_1 + x_2 + x_1^0 - x_2^0 \\ x_2^0x_1 + x_1^0x_2 - 2x_1^0x_2^0 \end{bmatrix}$
   (iv) $A\left(x_1, x_2\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_2^0x_1 + x_1^0x_2 - x_1^0x_2^0 \end{bmatrix}$

4. (i) $f'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f(t-0) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. (i) $f'(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (ii) $det(Jf(1,0,-1)) = 4$
   (iii) $d_{X_0}f(x-1, y, z-0) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2x-2z-4 \\ x+y-z-2 \end{pmatrix}$ (iv) $A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2x-2z-2 \\ x+y-z \end{pmatrix}$

6. (i) $f'(1, 3\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $d_{X_0}f(\rho-1, \theta-3\pi/2, \phi-\phi) = \begin{pmatrix} \theta - 3\pi/2 \\ -\rho + 1 \end{pmatrix}$
   (iv) $A(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \theta - 3\pi/2 \\ -\rho \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3,0125 \\ 0,980625 \\ 1,008 \end{pmatrix}$

9. A primeira função coordenada de f não é contínua em $(0,1)$ (prove isso calculando os limites pelos caminhos $(x,y)=(t,1), t \to 1$ e $(x,y)=(t,t+1), t \to 0$), logo a função f não é contiuna em $(0,1)$. Aplicando a contra-recíproca do teorema "*função diferenciável em* $X \Longrightarrow$ *função contínua em* X " concluímos que a função f não é diferenciável em $(0,1)$.

   A função f não é diferenciável em $(0,0)$. Para provar isso, calcule as derivadas parciais em $(0,0)$ e verifique que o limite da definição de diferenciabilidade não existe.

   A função f é diferenciável em $(1,0)$. Para provar isso, calcule as derivadas parciais em $(1,0)$ e verifique que o limite da definição de diferenciabilidade é o vetor $(0,0,0)$.

   A função f é diferenciável nos pontos restantes. Para provar isso, calcule as derivadas parciais e verifique que todas são contínuas nesses pontos, daí aplique o teorema "*uma função é de classe* $\mathcal{C}^1$ *em* X*, isto é, tem todas as derivadas parciais contínuas em* $X \Longrightarrow$ *a função é diferenciável em* X".

10. f não é diferenciável ponto $(0,0...,0)$. Para provar isso verifique que não existem as derivadas parciais em $(0,0...,0)$ e aplique a contra-recíproca do teorema "*uma função é diferenciável em* $X \Longrightarrow$*existem todas as derivadas parciais da função em* X".

11. f é diferenciável pois é diferenciável em todos os pontos do domínio. Para provar isso verifique que f é de classe $\mathcal{C}^1$ em todos os pontos do domínio. Observe que $(r,s,t); r=t$ ou $r=-t$ não estão no domínio.

13. (a) Apenas $(G \circ F)$ está definida pois a imagem de F e o domínio de G estão contidos no espaço de dimensão 2. A composta $(F \circ G)$ não está definida pois a imagem de G e o domínio de F estão contidos em espaços de dimensões diferentes, 4 e 3 respectivamente.

    (b) $F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & z & y \\ 0 & 3y^2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad G'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ 3x^2 & 0 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}$

    (c) $G'(F(1,-1,2))\ .\ F'(1,-1,2) = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 18 & 6 & -3 \\ 6 & 11 & 2 \end{pmatrix}$

14. **(b)** Quando $g(r) = \dfrac{1}{r^3}$, $\nabla f(\vec{r}) = \dfrac{-3}{r^5}\,\vec{r}$. Quando $g(r) = \ln r$, $\nabla f(\vec{r}) = \dfrac{1}{r^2}\,\vec{r}$

15. $(-1,-5,1/4)$

16. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(2,1,3) = (10,5/2)$ $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(2,1,3) = (6,3/2)$ $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x}(2,1,3) = (-2,-1/2)$