



Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 11 - 2011-2

Função vetorial de várias variáveis.
Função inversa e Teorema da Função Inversa.

$$1. \text{ Considere as funções } f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad g: V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow g(V) \subset \mathbb{R}^2$$

$$(u, v) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{u-v}{2}}, \frac{u+v}{2} \right) \quad (x, y) \longrightarrow (y+x^2, y-x^2)$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > v\}$ e $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

(a) Verifique que $(g \circ f)(u, v) = (u, v), \forall (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ e $(f \circ g)(x, y) = (x, y); \forall (x, y) \in V \subset \mathbb{R}^2$.
O que se pode concluir sobre f e g ?

(b) Determine $Df(u, v)$ e $Dg(x, y)$.

(c) Se $(x, y) = f(u, v)$ e $(u, v) = g(x, y)$ e I é a matriz identidade 2×2 , faça os produtos nos lados esquerdos das igualdades a seguir e verifique que:

$$Dg(f(u, v)) \times Df(u, v) = I, \quad \forall (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e}$$

$$Df(g(x, y)) \times Dg(x, y) = I, \quad \forall (x, y) \in V \subset \mathbb{R}^2.$$

Sem calcular esses produtos, já era esperado que essas igualdades se verificassem. Por que?

2. Seja $(u, v, w) = f(x, y, z), (x, y, z) \in U$, onde U é um conjunto aberto e f é de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{Sabe-se que } (1, 0, -1) \in U, \quad f(1, 0, -1) = (1, 2, -3) \quad \text{e} \quad Df(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Existe uma função f^{-1} inversa da função f definida em $f(V)$, onde V é uma vizinhança de $(1, 0, -1)$, $f(V)$ é um conjunto aberto, $(1, 2, -3) \in f(V)$ e f^{-1} é de classe $\mathcal{C}^1$.
Porque é possível garantir que essa afirmação é verdadeira?

(b) Encontre $Df^{-1}(1, 2, -3)$

(c) Encontre $Df^{-1}(1, 2, -3)[(u, v, w) - (1, 2, -3)]$, para $(u, v, w) \in f(V)$;

(d) Encontre uma aproximação afim de $f^{-1}(u, v, w)$, para $(u, v, w) \in f(V)$.

$$3. \text{ Seja } f: U = \mathbb{R}^3 \longrightarrow f(U) = \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (u, v, w) = (x, y^3, z^5)$$

(a) Encontre explicitamente a inversa de f , que é uma função $f^{-1}: f(U) = \mathbb{R}^3 \longrightarrow U = \mathbb{R}^3$

$$(u, v, w) \longrightarrow (x, y, z)$$

(b) Encontre o jacobiano $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ em qualquer (x, y, z)

(c) Verifique que $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$ em qualquer $(x, 0, z)$ e em qualquer $(x, y, 0)$

(d) Os itens (a) e (c) contradizem o Teorema da Função Inversa? Explique.

4. Seja $F(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ com domínio $U = \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que F admite inversa numa vizinhança de qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Determine $DF^{-1}(F(-1, -1))$.

5. Seja $F(x, y, z) = (x - y^2, y - z^2, z - x^2)$
- (a) Mostre que F admite inversa numa vizinhança de qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.
- (b) Verifique que $F(1, 0, 1) = (1, -1, 0)$, calcule $(F^{-1})'(1, -1, 0)$ e obtenha a função afim que melhor aproxima f^{-1} na vizinhança de $(1, -1, 0)$.
6. A função $f(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$ está definida em $\forall(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$. Em que pontos $(\rho_0, \theta_0, \phi_0) \in \mathbb{R}^3$ é possível garantir que esta função admite inversa numa vizinhança de $(\rho_0, \theta_0, \phi_0)$?

RESPOSTAS DA LISTA 11 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

2. (a) Essa é a tese do Teorema da Função Inversa e as hipóteses do teorema estão satisfeitas, pois as hipóteses do enunciado, a saber f de classe $\mathcal{C}_1$ e U é aberto, são justamente as hipóteses gerais do teorema. A hipótese específica do teorema, a saber $\det(Df(1, 0, -1)) \neq 0$, também está satisfeita, pois $\det(Df(1, 0, -1)) = -2$.

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} u - v - w - 2 \\ 1 - v/2 \\ 1 + v + w \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} u - v - w - 1 \\ 1 - v/2 \\ v + w \end{pmatrix}$$

3. (a) $f^{-1}: f(U) = \mathbb{R}^3 \rightarrow U = \mathbb{R}^3$
 $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z) = (u, \sqrt[3]{v}, \sqrt[5]{w})$

(c) $15y^2z^4$

- (d) Não, pois a hipótese do teorema é $\det(Df(X_0)) \neq 0$, não afirma nada sobre $\det(Df(X_0)) = 0$. Na verdade, este exemplo mostra que pode existir inversa, mesmo quando $\det(Df(X_0)) = 0$, ou seja, o exemplo mostra que a recíproca do teorema não é válida.

4. (a) Como $DF(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$ e os elementos dessa matriz, que são as derivadas parciais de F , são contínuas, então F é de classe $\mathcal{C}^1$. Também se verifica que o domínio $U = \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. Assim as hipóteses gerais do Teorema da Função Inversa estão satisfeitas. A hipótese $\det(DF(x, y)) \neq 0$ está satisfeita para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pois $\det(DF(x, y)) = -2e^{2x} < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, a tese do teorema é válida, a saber, F admite inversa numa vizinhança de (x, y) , para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\begin{pmatrix} \frac{e^2}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{e^2}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. (a) Como $DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & -2z \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ os elementos dessa matriz, que são as derivadas parciais de F , são contínuas, donde F é de classe $\mathcal{C}^1$. Também se verifica que o domínio $U = \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto. Assim as hipóteses gerais do Teorema da Função Inversa estão satisfeitas. Como $\det(DF(x, y, z)) = 1 - 8xyz$, a hipótese $\det(DF(x, y, z)) \neq 0$ está satisfeita para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.

Assim, podemos aplicar o Teorema da Função Inversa em F em todo ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.

(b) $\begin{pmatrix} u \\ 4u + v + w - 3 \\ 2u + w - 1 \end{pmatrix}$

6. Como $\det(Df(\rho, \theta, \varphi)) = \rho^2 \sin \varphi$, os pontos estão no conjunto $\{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3; \rho \neq 0 \text{ e } \varphi \neq k\pi\}$.