



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 12 - 2011-2

Função implícita.

Teorema da Função Implícita.

1. Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita no ponto $P_0 = (1, 1)$ e calcule $y'(1)$ e $y''(1)$ para $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0$.
2. Considere a equação $y(x - 2)^3 + xe^{y-1} = 0$. É possível, pelo Teorema da Função Implícita, garantir que esta equação define implicitamente uma única função $y = f(x)$, com x numa vizinhança de x_0 e y numa vizinhança de y_0 , quando (x_0, y_0) é
 - (a) $(1, 1)$?
 - (b) $(0, 0)$?
 - (c) $(2, 1)$?
3. Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $z = F(x, y) = (y - x)^4$.
 - (a) Faça um esboço das curvas de nível de F associadas aos níveis $z = 0$, $z = 1$ e $z = 16$.
 - (b) Faça um esboço do gráfico de F .
 - (c) Mostre que $P = (0, 0)$ pertence à curva de nível

$$\mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$$

de F associada ao nível $z = 0$.

- (d) Mostre que $F_x(0, 0) = 0$ e $F_y(0, 0) = 0$.
 - (e) Mostre que a curva de nível $\mathcal{F}_0$ pode ser representada como o gráfico de uma função $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.
 - (f) Este exercício constitui um contra-exemplo para o teorema da função implícita para $\mathbb{R}^2$? Justifique cuidadosamente sua resposta.
4. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente uma função $y = f(x)$ de classe C^1 , cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, \sqrt[3]{4})$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y .
 5. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x , y e z .

Nos exercícios 6. e 7. obtenha f_x e f_y para $z = f(x, y)$ definida pela equação dada.

6. $\ln(xyz) + e^z = 1$

7. $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$

8. Seja uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f(0.5, 0.5) > 0$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(0.5, 0.5, f(0.5, 0.5))$.
9. Sabendo que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \sin z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 cujo gráfico está numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, para (x, y) na vizinhança de $(1, 1)$ e encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 0)$.
10. Seja $y = y(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde F é de classe C^1 . Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x , y e das derivadas parciais de F .

11. A função $z = z(x, y)$, de classe C^1 , é dada pela equação $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ é um real fixo), onde $f(u, v)$ é de classe C^1 e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$.

12. Sabendo que a equação $e^{x+y+z} + xyz = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 , cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, determine a taxa de variação de f no ponto $(0, 0)$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$.

13. Mostre que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ são funções diferenciáveis definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y + x = 1 \end{cases} \quad \text{numa vizinhança de } x = 0 \text{ tal que } y(0) = 1, z(0) = -1 \text{ e calcule } \frac{dy}{dx}(0) \text{ e } \frac{dz}{dx}(0).$$

14. Suponha que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ são diferenciáveis e definidas implicitamente por $\begin{cases} x^2 + z^2 = 25 \\ y^2 + z^2 = 20 \end{cases}$

(a) Expresse $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z .

(b) Determine explicitamente as funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ que são definidas implicitamente pelo sistema tal que $y(3) = -2$, $z(3) = 4$. Dê o maior intervalo aberto possível contendo $x = 3$ em que essas funções estão definidas.

15. Suponha que $y = y(u, v, w, x)$ e $z = z(u, v, w, x)$ estão definidas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} uv - xy = z \\ x^2 + y^2 = w \end{cases}$ Encontre todas as derivadas parciais de y e z em termos de u, v, w, x, y e z .

16. Se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são dadas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$

mostre que $\left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1$.

17. As equações $\begin{cases} x^2 - y \cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 - y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 0 \\ xy - \sin(u) \cos(v) + z = 0 \end{cases}$ definem x, y, z como funções de u e v próximo ao

ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = z = 0$? Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial u}$ em $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

18. Dado o sistema $\begin{cases} x + y^2 - 2yv - uv = 2z \\ x^2 - yz - 2u = v \end{cases}$

(a) Verifique que o sistema define implicitamente $(u, v) = f(x, y, z)$ na vizinhança de $(1, -1, 1)$ e tal que $f(1, -1, 1) = (2, -2)$

(b) Determine $f'(1, -1, 1)$

(c) Determine a função afim que aproxima f na vizinhança de $(1, -1, 1)$

(d) Calcule, aproximadamente, $f(1.08, -0.9, 0.98)$.

19. Seja $g(u, v) = f(x, y)$, onde f é real e diferenciável e satisfaz $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Suponha ainda $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente por $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$

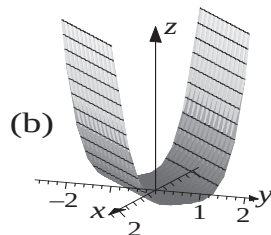
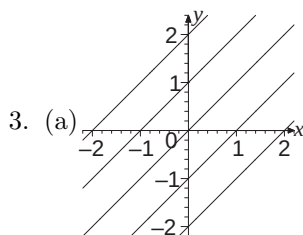
(a) Mostre que $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x} \frac{\partial x}{\partial u}$

(b) Supondo provado o item (a), calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$.

RESPOSTAS DA LISTA 12 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Hipóteses satisfeitas: $F(x, y) = \ln(xy) - 2xy + 2$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ no conjunto aberto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$ que contém $(1, 1)$, pois $F_x(x, y) = \frac{1}{x} - 2y$ e $F_y(x, y) = \frac{1}{y} - 2x$ são contínuas em A e ainda i) $F(1, 1) = 0$; ii) $F_y(1, 1) = -1 \neq 0$. $y'(1) = -1$ e $y''(1) = 2$.

2. $F(x, y) = y(x-2)^3 + xe^{y-1}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém qualquer (x_0, y_0) , pois $F_x(x, y) = 3y(x-2)^2 + e^{y-1}$ e $F_y(x, y) = (x-2)^3 + xe^{y-1}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, logo essa hipótese é válida nos três casos. Nas outras duas:
i) $F(1, 1) = 0$; $F(0, 0) = 0$; $F(2, 1) \neq 0$ e
ii) $F_y(1, 1) = 0$; $F_y(0, 0) = -8$; $F_y(2, 1) = 1 \neq 0$. A hipótese i) falha no ponto $(2, 1)$, logo é impossível encontrar uma função f tal que $f(2) = 1$. A hipótese ii) falha no ponto $(1, 1)$, neste caso nada se pode afirmar sobre a possibilidade da equação definir uma função $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$. As hipóteses i) e ii) são satisfeitas no ponto $(0, 0)$, logo o Teorema da Função Implícita é aplicável apenas neste ponto.



(c) $F(0, 0) = 0$

(e) $y = f(x) = x$

(f) Não é um contra-exemplo.

Não contradiz pois a condição $F_y(0, 0) \neq 0$ é uma condição suficiente, mas não é necessária para a existência de uma função implícita $y = f(x)$.

4. Sim, pois as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, a saber: $F(x, y) = y^3 + xy + y^3$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém $(0, \sqrt[3]{4})$, pois $F_x(x, y) = y + 3x^2$ e $F_y(x, y) = x + 3y^2$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e ainda i) $F(0, \sqrt[3]{4}) = 4$ e ii) $F_y(0, \sqrt[3]{4}) = 6\sqrt[3]{2} \neq 0$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{x + 3y^2}$.

5. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^3$, que contém $(1, 1, 1)$, pois $F_x(x, y, z) = 3x^2 - 1$, $F_y(x, y, z) = 3y^2 - 1$ e $F_z(x, y, z) = 3z^2 - 1$ são contínuas em $\mathbb{R}^3$. E ainda i) $F(1, 1, 1) = 0$ e ii) $F_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Logo as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, o que garante que a equação define implicitamente uma função $z = z(x, y)$ definida numa vizinhança de $(x_0, y_0) = (1, 1)$, cuja imagem está numa vizinhança de $z_0 = 1$, logo o gráfico estará numa vizinhança de $(1, 1, 1)$. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}$.

6. $f_x = \frac{-z}{x(1 + ze^z)}$; $f_y = \frac{-z}{y(1 + ze^z)}$

7. $f_x = \frac{-z^2}{2xz - 3y - \sin z}$; $f_y = \frac{3z}{2xz - 3y - \sin z}$

8. Reta tangente: $x + y + \sqrt{2}z = 2$; reta normal: $(x, y, z) = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2) + \lambda(1, 1, \sqrt{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. $z = x - 1$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$

11. Considere $F(x, y, z) = f(u, v)$. Sabendo-se que $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, aplicando essas equações no lado esquerdo da equação a ser demonstrada e simplificando-a, obtém-se: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Aplicando a regra da cadeia em $f(u, v)$ para determinar $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$, substituindo e simplificando, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^\lambda}{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\lambda z}{x^\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \lambda z$.

12. taxa de variação = $-\sqrt{2}$
13. Seja $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2, x + y - 1)$. Verifica-se que F é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$ pois suas derivadas parciais são funções polinomiais, que são contínuas e ainda $U = \mathbb{R}^3$ é aberto.
- Verifica-se também que (i) $F(0, 1, -1) = (0, 0)$ e (ii) para $X = x$ e $Y = (y, z)$, $\det(F_Y(0, 1, -1)) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Assim, todas as hipóteses do teorema da função implícita estão satisfeitas, logo vale a tese, a saber o par (x, y) está definido implicitamente pelo sistema perto de $x = 0$, tal que $y(0) = 1$ e $z(0) = -1$. E ainda $\frac{dy}{dx}(0) = -1$ e $\frac{dz}{dx}(0) = -1$.
14. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ e $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$ (b) $y = -\sqrt{x^2 - 5}$ e $z = \sqrt{25 - x^2}$; $\sqrt{5} < x < 5$
15. $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{1}{2y}$; $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial u} = v$; $\frac{\partial z}{\partial v} = u$; $\frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{x}{2y}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{y}$
17. (a) Sim, pois $F(u, v, x, y, z) = (x^2 - y \cos(uv) + z^2, x^2 - y^2 - \sin(uv) + 2z^2, xy - \sin(u) \cos(v) + z)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $U = \mathbb{R}^5$ (todas as derivadas parciais são composições, somas e multiplicações de funções contínuas), U é aberto. E ainda (i) $F\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right) = (0, 0, 0)$ (ii) para $Y = (x, y, z)$ tem-se $\det\left(F_Y\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right)\right) = -2 \neq 0$. Assim todas as hipóteses são satisfeitas e o Teorema da Função Implícita se aplica.
- (b) 0
18. (a) $F(x, y, z, u, v) = (x + y^2 - 2yv - uv, 2z, x^2 - yz - 2u)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $U = \mathbb{R}^5$ pois admite derivadas parciais contínuas em $U = \mathbb{R}^5$ (todas são funções polinomiais).
- Também (i) $F(1, -1, 1, 2, -2) = (0, 0)$ (ii) para $Y = (u, v)$, $\det(F_Y(1, -1, 1, 2, -2)) = -2 \neq 0$.
- Logo, estão satisfeitas as hipóteses do Teorema da Função Implícita, donde aplicando-se a tese, verifica-se que o sistema define implicitamente u e v perto de $(1, -1, 1, 2, -2)$, isto é, na vizinhança de $(1, -1, 1)$ tal que $f(1, -1, 1) = (2, -2)$.
- (b) $f'(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- (c) $A(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1/2 - x/2 - y + z \\ -3 + 3x + y - z \end{bmatrix}$
- (d) $\begin{bmatrix} 1,84 \\ -1,64 \end{bmatrix}$
19. (b) 0