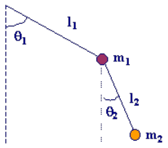
Equações diferenciais

Lista preparatoria para a segunda prova

1. Considere um sistema de um pêndulo duplo: um pêndulo ligado a outro pêndulo que oscilam num plano vertical sob a influência da gravedade. As equações de movimento do sistema são:



$$\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1\theta_1''(t)+m_2l_1l_2\theta_2''(t)+(m_1+m_2)l_1g\theta_1&=0\\ m_2l_2\theta_2''+m_2l_1l_2\theta_1''+m_2l_2g\theta_2&=0\end{aligned}$$

   Resolver o sistema de equações do movimento do pêndulo $\Theta(t)=(\theta_1(t),\theta_2(t))$ se $l_1=l_2=1$, $m_1=3$, $m_2=1$ com condições iniciais $\Theta(0)=(\pi/4,-\pi/4)$ e $\Theta'(t)=(0,0)$.

   Video do pêndulo duplo: `https://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU`

2. A corrente $c(t)$ de um circuito é governada pela equação integro-diferencial

$$Lc'(t)+Rc(t)+\frac{1}{C}\int_0^t c(\tau)d\tau=E(t),$$

   onde $Lc'(t)$, $Rc(t)$, $\frac{1}{C}\int_0^t c(\tau)d\tau$ determinan as quedas de voltagem de um indutor, resistor e capacitor respetivamente e $E(t)$ representa a voltagem aplicada. Calcular a corrente $c(t)$ se $L=C=1/10$, $R=2$, $E(t)=120t-120t\mathcal{U}(t-1)$ com condição inicial $c(0)=0$.

3. Considere a função $f(t)=\begin{cases}1 & t\leq\pi/2,\\ \sin t & t\geq\pi/2.\end{cases}$

   (a) Escreva f em termos da *função degrau unitário*.

   (b) Calcule o seguinte problema em valor inicial $\begin{cases}y''+y=f(t),\\ y(0)=1, y'(0)=0\end{cases}$

4. Calcule os seguintes sistemas de equações

$$\text{(a)}\ \begin{cases}x'=2x+y+2z,\\ y'=3x+6z,\\ z'=-4x-3z.\end{cases}\qquad\qquad \text{(b)}\ \begin{cases}x'=3x-18y+3\sin t,\\ y'=2x-9y+\sin t.\end{cases}\ .$$

   (c) Se analisamos o sistema homogêneo associado ao sistema de equações (b), qual é o ponto de equilibrio? que tipo de equilibrio é?

   (d) Escrever um sistema de equações $\begin{cases}x'=ax-by,\\ y'=cx-dy,\end{cases}$ com a,b,c,d constantes, tal que a origem seja um atrator.

5. Seja $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}$, com $\lambda_i\in\mathbb{R}$.

(a) Verificar que $A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$ e $A^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_n^m \end{pmatrix}$.

(b) Calcular e^{At} usando a serie de potencias associada à exponencial.

(c) Usando o item (b) calcular a solução do sistema $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$.

6. Provar que se f é uma função periódica de periodo T então

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

7.