D S T Q Q S S

Para calcular a solução da eq. de Ricatti, temos que conhecer uma solução particular.

Suponhamos que y_0 é solução particular da eq. de Ricatti.

• Solução: $y(x) = y_0 + z$ onde $z(x)$ verifica:

1) Substituição de y na eq. de Ricatti

$$y' + P(x)y = Q(x) + R(x)y^2$$
$$y_0' + z' + P(x)(y_0 + z) = Q(x) + R(x)(y_0 + z)^2$$
$$\underbrace{y_0' + P(x)y_0 - Q(x) - R(x)y_0^2}_{=0} + z' + P(x)z = 2y_0 z R(x) + z^2 R(x)$$
$$z' + [P(x) - 2y_0 R(x)]z = R(x)z^2 \quad \text{Bernoulli}$$

$\therefore z$ é solução da eq. de Bernoulli.

2) Solução geral $y(x) = z(x) + y_0$

Ex: $y' + y/x + y^2/x^2 = 3$

a) Verificar que $y = x$ é solução particular
b) Calcular a solução geral.

a) $y(x) = x$ verifica $1 + x/x + x^2/x^2 = 3$ ✓

b) Eq. é Ricatti $y' + \frac{1}{x}y = 3 - \frac{1}{x^2}y^2 \Rightarrow P(x) = 1/x$

$Q(x) = 3$

$R(x) = \frac{-1}{x^2}$

Scanned by CamScanner

Solução geral é $y(x) = x + z$ onde:

$\cancel{1} + z' + \frac{x+z}{x} + \frac{(x^2 + 2xz + z^2)}{x^2} = \cancel{0}$

$z' + z/x + \frac{2}{x} z + \frac{z^2}{x^2} = 0 \Rightarrow z' + \left(\frac{3}{x}\right) z = -\frac{1}{x^2} z^2$

Eq. de Bernoulli: $\frac{z'}{z^2} + \frac{3}{x}\frac{1}{z} = -\frac{1}{x^2}$

• Mudança variáveis: $t = \frac{1}{z}$ $\quad t' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$

$\therefore \; -t' + \frac{3}{x} t = -\frac{1}{x^2}$

• Eq. linear: $t' - \frac{3}{x} t = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) t' - \frac{3}{x} v(x) t = \frac{v(x)}{x^2}$

I) $\therefore$ Fator integrante: $v'(x) = -\frac{3}{x} v(x) \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{3}{x} dx$

$\ln v = -3 \ln x$

$v(x) = x^{-3}$

II) Resolvemos: $\frac{d}{dx}\left(x^{-3} t\right) = \frac{x^{-3}}{x^2} = \frac{1}{x^5}$

$\therefore \; t(x) = x^3 \int x^{-5} dx = -x^3\left(\frac{x^{-4}}{4} + C\right) = -\frac{1}{4x} - Cx^3 = \frac{-1 - Cx^4}{4x}$

Variáveis originais:

$z(x) = \frac{1}{t(x)} = \frac{4x}{-1 - Cx^4} \Rightarrow y(x) = x + z(x)$

$= x + \frac{4x}{-1 - Cx^4}$

EX: $y' + (2x-1)y - xy^2 = x - 1$

• Solução particular $y = 1$