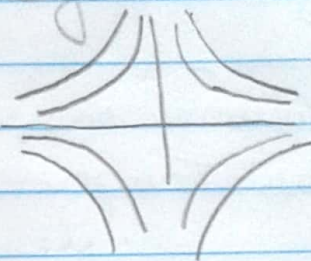


## Trajetórias ortogonais

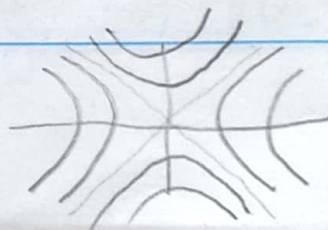
Ex. Encontrar as trajetórias ortogonais da família  $F = \{ (x, y) : xy = a \}$



• Calculamos a inclinação das retas tangentes:  $y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$

• Calculo a curva cuja derivada verifica  $y' = \frac{x}{y}$   
 $\therefore y dy = x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

$\therefore F_{ort} = \{ (x, y) : x^2 - y^2 = C \}$



## Problema de Misturas

Ex. Um tanque contém 200 litros de uma solução com corante de concentração 1 gr / litro. O tanque requer ser lavado com água pura que entra com uma vazão de 2 litros / min. e a solução homogênea sai novamente do tanque com a mesma vazão. Determine o tempo necessário para que a solução tenha uma concentração de 1% do valor original.

- $Q_0 = 200$  gr
- $Q_e = 0$       vazão: 2 litros/min

∴ Taxa entrada = 0

$$\text{Taxa saída} = Q(t) \cdot \frac{1}{200} \text{ gr/litros} \cdot 2 \text{ litros/min} = \frac{Q(t)}{100} \text{ gr/min}$$

$$\therefore \begin{cases} Q'(t) = -\frac{Q(t)}{100} \\ Q(0) = 200 \end{cases} \Rightarrow Q(t) = 200 e^{-t/100}$$

• Calculamos  $t$  para que  $Q(t) = 2$

$$200 e^{-t/100} = 2 \Rightarrow -\frac{t}{100} = \ln\left(\frac{1}{100}\right) = -\ln(100)$$

$$\therefore t = 100 \ln(100) = 200 \ln(10) \approx 460 \text{ min.} \approx 7 \text{ h, } 40 \text{ min}$$

## Problemas de Juros (ou crescimento populacional)

Ex I: Se a taxa anual de juros é de 0,11 do capital por ano ( $k=0,11$ ). Quanto é o capital inicial que preciso para obter, depois de 6 anos, 250000?

$$\text{P.V.I. : } \begin{cases} f'(t) = 0,11 f(t) \\ f(6) = 250\,000 \end{cases}$$

$$f(t) = C e^{0,11t}. \text{ Se } f(6) = 250\,000 \Rightarrow 250\,000 = C e^{0,11 \cdot 6} \Rightarrow 250\,000 \cdot e^{-0,11 \cdot 6} = C$$

$$C_0 = 250\,000 \cdot e^{-0,11 \cdot 6}$$

Ex II) Sabe-se que um investimento de R\$ 100 000 rendeu 4400 após 6 anos. Determine qual foi o rendimento deste investimento nos 3 primeiros anos?

$$f(t) = C e^{kt}, \quad C = 100\,000$$

$$f(6) = C e^{k \cdot 6} = 104\,400 \Rightarrow k = \frac{1}{6} \ln \left( 1 + \frac{44}{10000} \right) \Rightarrow f(3) = \underbrace{C e^{k \cdot 3}}_{\text{rendim.}}$$