Equações diferenciais:

- Calculo $x \in \mathbb{R}$ que verifica

$$\underbrace{x^2 - 1 = 0}_{\text{equação}} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}$$

- Calculo a curva $y(x)$ que verifica $y' = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$ eq. dif.

Solução $y(x) = e^{\operatorname{sen} x} + C$ solução da eq. dif. (família de curva)

- Eq. dif + condição inicial: $\begin{cases} y' = e^{\operatorname{sen} x} \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ← cond. inicial fixa const. arbitraria

Solução: $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

Definição:

Uma equação diferencial ordinaria (ODE / EDO) de ordem n é uma equação da forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

onde F é uma função continua (de $n+1$ variaveis), e $y^{(n)}$ é a derivada n-esima.

Ex: I) anterior: $y'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$

$F(x, y, y') = y' - e^{\operatorname{sen} x} \cos x$ ODE ordem 1

II) $y''' - xy^2 + y' \operatorname{sen} x = 0$

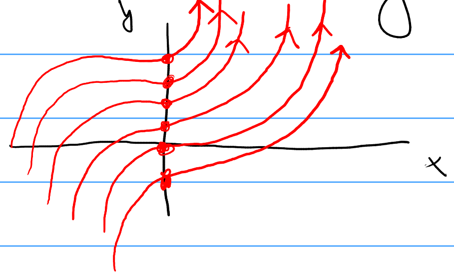
$F(x, y, y', y'', y''') = y''' - x y^2 + y' \operatorname{sen} x$ EDO ordem 3

III) $y^{(4)} + y^2 \cos x + (y')^2 = \cos x$

$F(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}) = y^{(4)} + y^2 \cos x + (y')^2 = \cos x$

OBS: Quando a equação é com derivadas parciais, não é ordinaria: $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$ EDP / PDE

OBS: Importante em modelagem:



ODE:
- correnças marinhas
- fluidos.

Solução:

- Uma solução geral da eq. dif. é uma função $y(x, c_1, c_2, \ldots, c_m)$ que depende de m constantes arbitrarias e satisfaz a equação:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$

para qualquer valor das constantes $(c_1, \ldots, c_m)$ e $y(x, c_1, \ldots, c_m)$ contem todas as soluções.

- Uma solução particular é uma solução da equação (*) onde fixamos os valores das constantes arbitrarias.

Ex: I) $y' = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$

Solução geral: $y(x, C) = e^{\operatorname{sen} x} + C$

Solução particular: $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ (solução verifica: $y(0) = 1$)

II) $y'' = e^x$

Verificar que $y(x, c_1, c_2) = e^x + c_1 x + c_2$ é solução geral

$y'(x) = e^x + c_1$ $\quad y''(x) = e^x$ $\quad \therefore y$ é solução

Solução particular: $y(x) = e^x + 2$, $\quad y(x) = e^x + 3x + 1$

Problema em valores iniciais:

$$\text{PVI}\begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Condição inicial

Ex: I) $\begin{cases} y' = e^{\operatorname{sen} x} \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ EDO ordem 1

$\leftarrow$ cond. inicial

- Associado a $y' = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$ temos uma solução geral $y(x, c) = e^{\operatorname{sen} x} + C$
- Associado ao PVI temos uma solução particular: $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

II) PVI $\begin{cases} y'' = e^{x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ cond. iniciais

Solução geral: $y(x) = e^{x} + C_1 x + C_2$

Solução particular

$$\boxed{\begin{aligned} y(0) &= 1 + C_2 = 1 \\ y'(0) &= 1 + C_1 = 2 \end{aligned}}$$

$y(x) = e^{x} + x$

Equações de primeira ordem (ODE ordem 1)

Uma equação dif. de primeira ordem tem a forma

$$y' = f(x,y)$$

onde f é uma função contínua em 2 variaveis.

- Uma solução geral tem a forma $y(x,c)$ (1 constante arbitraria)
- Uma solução particular fixa a constante arbitraria
- Um PVI : $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ← condição inicial

Ex: $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}(2-y) \\ y(1) = 0 \end{cases}$

I) Verificar que $\overbrace{y(x) = \frac{c}{x} + 2}^{(*)}$ é solução geral

- Derivo (*) $y' = -\frac{c}{x^2}$
- $\frac{1}{x}(2-y) = \frac{1}{x}\left(\cancel{2} - \frac{c}{x} \cancel{+2}\right) = -\frac{c}{x^2}$

$\Longrightarrow y' = \frac{1}{x}(2-y)$

II) Solução particular

Avaliar (*) em $x=1$ $\quad y(1) = c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2$

$$\boxed{\text{Solução particular } y(x) = \frac{-2}{x} + 2}$$

Ex: Verificar que $y(x) = x + 1 - \frac{1}{3}e^x$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1/3 \end{cases}$$

I) $y(x) = x + 1 - \frac{1}{3}e^x$ é sol. da eq. dif.

II) Verificar $y(0) = \frac{1}{3}$

Metodos para resolver eq. dif. (ODE ordem 1)

I) Separação de variaveis:

Consideramos $y' = f(x,y)$

Dizemos que f é variaveis separaveis quando f pode-se expressar como um produto de funções:

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

Se f é variaveis separaveis a eq. diferencial fica assim:

$$y' = f(x,y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$\underbrace{\frac{dy}{h(y)}}_{\text{integro relativo a } y} = \underbrace{g(x)\,dx}_{\text{integro relativo a } x}$$

Integramos cada lado da igualdade

Ex: $y' = (1+y^2)e^x$

$$f(x,y) = (1+y^2)\,e^x = h(y) \cdot g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)\,e^x \Longrightarrow \underbrace{\frac{dy}{(1+y^2)}}_{\text{integro relativo a } y} = \underbrace{e^x\,dx}_{\text{integro relativo } x}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x\,dx$$

$$\arctan y + C_1 = e^x + C_2 \Longrightarrow \arctan y = e^x + C$$

$$\boxed{y(x) = \tan(e^x + C)}$$

Solução geral

Ex: $y' = ky$ $\quad$ k constante
$y(0) = A$

I) Solução geral: $y' = ky$

$$\frac{dy}{dx} = ky$$ ← variáveis sep.

$$\frac{dy}{y} = k\,.\,dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k \, dx$$

$$\ln y = kx + C$$

$$y(x) = e^{kx+C} = \underbrace{\boxed{e^C}}_{=C} \cdot e^{kx} = C\, e^{kx}$$

$\boxed{\text{Sol. geral: } y(x) = C\, e^{kx}}$

II) Sol. particular: $y(0) = A$

$y(0) = C\,.\,1 = A$ $\qquad$ $\boxed{\text{Sol. part. } y(x) = A e^{kx}}$