Módulo 1

Volume 1
3ª edição

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

Cálculo I

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I

Volume 1- Módulo 1
3ª edição

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Ana Tereza de Andrade
Anna Maria Osborne
Jane Castellani
Laura da Silveira Paula
Leonardo Villela
Nilce P. Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Marília Barcelos

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

COORDENAÇÃO DE ILUSTRAÇÃO
Eduardo Bordoni

ILUSTRAÇÃO
Ana Paula Trece Pires
Rafael Monteiro

CAPA
Eduardo Bordoni
Fábio Moura

PRODUÇÃO GRÁFICA
Oséias Ferraz
Patricia Seabra

P784c

Pombo Júnior, Dinamérico P.
Cálculo 1. v.1 / Dinamérico P. Pombo Júnior. – 3.ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
146p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN 85-88731-21-5

1. Cálculo. 2. Funções. 3. Limites. 4. Velocidade e aceleração I. Gusmão, Paulo Henrique C. II. Título.

CDD: 515.15

2010/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Módulo 1

Limite, Continuidade e Derivação

Este módulo é dedicado, essencialmente, ao estudo das noções de limite, continuidade e derivabilidade para funções reais de uma variável real e de propriedades básicas a elas relacionadas. Como as duas últimas noções repousam, fundamentalmente, na de limite, é então claro que esta desempenha um papel central no desenvolvimento do curso.

Optamos por introduzir o conceito de limite a partir daquele de seqüência convergente, por considerar este enfoque mais acessível a um estudante iniciante do que aquele baseado em épsilons e deltas, utilizado em muitos livros.

Após definir a noção de limite e obter algumas propriedades elementares de limites, dedicamos uma aula exclusivamente ao limite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Limites infinitos e limites no infinito são também discutidos.

Estudamos as funções contínuas e algumas das suas propriedades elementares. Enunciamos também os teoremas de Weierstrass e do valor intermediário, procurando realçar a importância dos mesmos por meio de exemplos elucidativos.

Finalmente, estudamos as funções deriváveis e algumas das suas propriedades elementares. Abordamos também o que se entende por derivação implícita, assim como o significado da derivada no contexto da Física.

Aula 1 – O limite de uma seqüência.

Referências: Aulas 10, 11 e 12 de Pré-Cálculo.

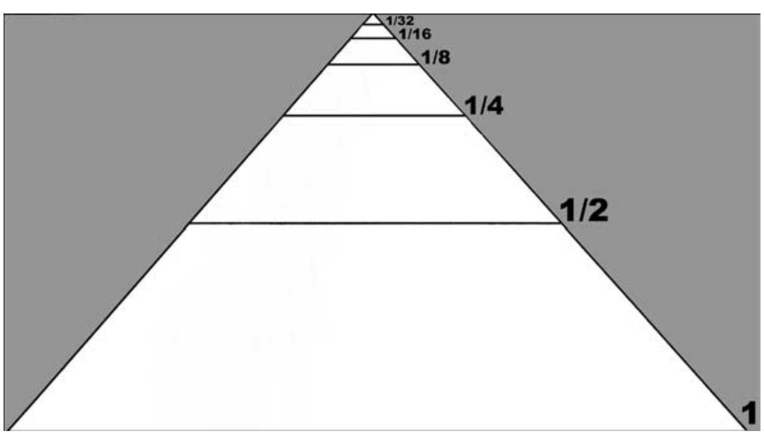
Objetivo

Compreender, a partir da discussão de exemplos concretos, o conceito de seqüência convergente. Este importante conceito será utilizado para definirmos a noção de limite, uma das noções fundamentais da Matemática, que desempenhará um papel central em tudo que estudaremos a seguir.

Faça o seguinte esforço de abstração: imagine que você esteja no seu quarto a uma distância de 1 metro de uma das paredes. Seu objetivo é tentar chegar à parede percorrendo uma linha reta de maneira que, ao dar o primeiro passo, você atinja a metade da distância; ao dar o segundo passo, você atinja a metade da distância restante, e assim por diante. Assim, após o primeiro passo você estará a $\frac{1}{2}$ metro da parede; após o segundo passo você estará a $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ de metro da parede; após o terceiro passo você estará a $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ de metro da parede, e assim por diante.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi talvez o maior matemático francês da primeira metade do século XIX. Ele formulou as noções modernas de limite, continuidade e convergência de séries, obtendo resultados que marcaram uma nova época para a Análise Matemática. Além de dar uma definição rigorosa de integral, foi ele que, em 1829, no seu *Leçons sur le Calcul Différentiel*, definiu pela primeira vez uma função complexa de variável complexa.

Repetindo esse procedimento indefinidamente, você pode observar dois fatos interessantes: o primeiro deles é que você nunca atingirá efetivamente a parede; e o segundo é que a distância que o separa da parede se tornará tão próxima de zero quanto você queira, bastando para isso que você dê um número suficientemente grande de passos.



Por exemplo, imagine um ponto que esteja a $\frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1.048.576}$ de metro da parede o que , convenhamos, é bem próximo. Então, a partir do vigésimo primeiro passo, você estará a uma distância ainda menor da parede, pois

$$\frac{1}{2^{21}} < \frac{1}{2^{20}},\ \frac{1}{2^{22}} < \frac{1}{2^{20}},\ \frac{1}{2^{23}} < \frac{1}{2^{20}},\ \frac{1}{2^{24}} < \frac{1}{2^{20}},\ \cdots .$$

O fenômeno que ocorre com os números

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \cdots\ ,\ \frac{1}{2^n}, \cdots\ ,$$

o qual acabamos de discutir intuitivamente, é bastante profundo e encerra uma idéia central, que é a noção de seqüência convergente.

Nos exemplos a seguir, discutiremos a mesma idéia de forma mais cuidadosa.

Exemplo 1.1

Consideremos a seqüência

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}, ...,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ ... \quad \text{(ver a Figura 1.1)},$$

também representada por $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)$.

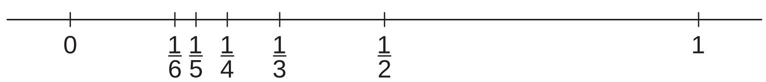


Figura 1.1

Todos os elementos desta seqüência são maiores do que zero e se tornam cada vez menores à medida que n cresce. Com essa segunda afirmação queremos dizer precisamente o seguinte: se n e m são dois inteiros quaisquer, com $n > m \geq 1$, então $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$.

Lembre que se $x > y > 0$, então $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

Tomemos agora um intervalo aberto de centro zero e raio pequeno, por exemplo, $\frac{1}{100}$.

O intervalo aberto de centro a e raio r é o intervalo $(a-r, a+r)$.

Para qualquer inteiro $n > 100$, temos $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$. Isto implica que $\frac{1}{n} \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ para todo $n \geq 101$ (ver a Figura 1.2).

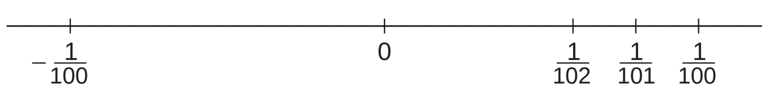


Figura 1.2

A bem da verdade, o que dissemos acima não é uma exclusividade do intervalo $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$. Com efeito, consideremos um intervalo $(-r, r)$, onde $r > 0$ é arbitrário. Em vista de uma propriedade muito importante, satisfeita pelos números reais, chamada propriedade arquimediana, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m} < r$. Logo, para todo inteiro $n > m$, temos

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{m} < r\ .$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{n} \in (-r, r)$$

para todo $n \geq m$. Esta afirmação nos diz que, a partir de um certo instante, todos os elementos da seqüência pertencem ao intervalo $(-r, r)$.

Propriedade arquimediana: Para todo $r > 0$ existe um número inteiro $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m} < r$.

Exemplo 1.2

Consideremos a seqüência

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^{n+1}},\ \cdots,$$

também representada por $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 0}$ ou $\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Você já percebeu que além dos elementos desta seqüência serem todos positivos, eles se tornam cada vez menores à medida que n cresce. Mais precisamente, queremos dizer o seguinte: se n e m são dois inteiros quaisquer com $n > m \geq 1$, então $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m}$. Realmente, $2^n = 2^{(n-m)+m} = 2^{n-m}.2^m > 2^m$, pois $2^{n-m} > 1$ (visto que $n - m > 0$); logo, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m}$.

Usando o príncipio de indução finita, visto no módulo 3 de Matemática Discreta, mostre que $2^n > n$ para todo $n \geq 1$.

Note também que $2^n > n$ para todo $n \geq 1$ (por exemplo, $2^1 = 2 > 1$, $2^2 = 4 > 2$, $2^3 = 8 > 3$, $2^4 = 16 > 4, \cdots$), fato este que pode ser justificado lançando mão da fórmula do binômio de Newton estudada em Matemática Discreta. De fato,

$$2^n = (1+1)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + 1 > n\ ,$$

A fórmula do binômio de Newton é: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ para todo $n \geq 1$.

pois $\binom{n}{1} = n$ e todas as parcelas que aparecem na soma acima são números inteiros maiores do que zero.

Tomemos agora um intervalo aberto de centro zero e raio pequeno, por exemplo, $\frac{1}{100}$. Como $2^6 = 64$ e $2^7 = 128$, temos $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$ para todo $n \geq 7$. Isto implica que $\frac{1}{2^n} \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ para todo $n \geq 7$ (ver a Figura 1.3).

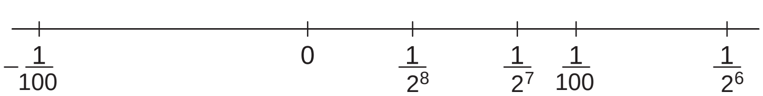


Figura 1.3

Novamente, o que dissemos acima não é uma exclusividade do intervalo $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$. Com efeito, consideremos o intervalo $(-r, r)$, onde $r > 0$ é arbitrário. Em vista da propriedade satisfeita pelos números reais mencionada no exemplo anterior, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m} < r$. Como $2^m > m$, então $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{m}$; logo, $\frac{1}{2^m} < r$.

Mais ainda, para qualquer inteiro $n > m$, temos $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m}$. Assim, $\frac{1}{2^n} \in (-r, r)$ para todo $n \geq m$. Esta afirmação nos diz que, a partir de um certo instante, todos os elementos da seqüência pertencem ao intervalo $(-r, r)$ (ver a Figura 1.4).

Figura 1.4

Exemplo 1.3

Consideremos a seqüência

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \cdots,\ \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ \frac{(-1)^{n+2}}{n+1},\ \cdots \text{(ver a Figura 1.5)}\ ,$$

também representada por $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\geq 1}$ ou $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

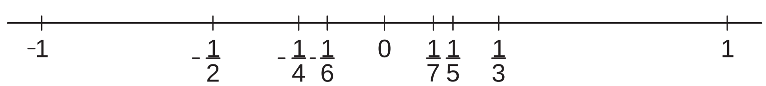


Figura 1.5

Todos os elementos desta seqüência são diferentes de zero, sendo positivos os elementos correspondentes a n ímpar (por exemplo, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$) , e negativos aqueles correspondentes a n par (por exemplo, $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \ldots$). Vamos mostrar, como nos exemplos anteriores, que os elementos da seqüência se aproximam de zero quando n cresce. Com efeito, seja r um número real positivo qualquer e seja $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m} < r$; então $\frac{(-1)^{m+1}}{m} \in (-r, r)$, pois $\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m}\right| = \frac{1}{m}$ (note que $\frac{(-1)^{m+1}}{m}$ estará à esquerda de zero se m for par e à direita de zero se m for ímpar). Além disso, se $n > m$,

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < r\ .$$

Em resumo, acabamos de verificar que $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| < r$ para todo $n \geq m$, ou seja, que $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \in (-r, r)$ para todo $n \geq m$ (ver a Figura 1.6).

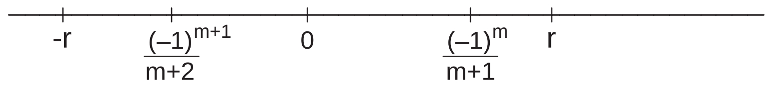


Figura 1.6

Podemos então afirmar que nos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 ocorre um mesmo fenômeno, a saber: para qualquer intervalo aberto I contendo zero podemos determinar um inteiro $m \geq 1$ de modo que a partir do m-ésimo elemento da seqüência todos os outros elementos pertencem a I.

Exemplo 1.4

Consideremos a seqüência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ..., \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}, ... \quad \text{(ver a Figura 1.7)} ,$$

também representada por $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 1}$ ou $\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

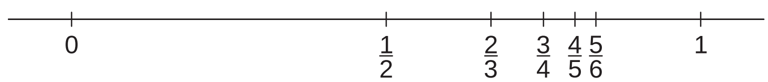


Figura 1.7

Todos os elementos desta seqüência pertencem ao intervalo (0,1); em particular, todos são diferentes de 1. Notemos ainda que, como

$$\frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

e como $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero quando n cresce, é intuitivo que $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1 quando n cresce.

Uma outra maneira de ver isso é a seguinte:

Notando que

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e lembrando que $\frac{1}{n+1}$ decresce quando n cresce (como vimos no Exemplo 1.1), segue que os elementos da seqüência $\frac{n}{n+1}$ crescem à medida que n cresce (uma vez que, a cada instante, estaremos diminuindo de 1 um número cada vez menor), apesar de nunca atingirem o valor 1.

Além disso, qualquer intervalo aberto contendo 1 contém todos os números da forma $\frac{n}{n+1}$ a partir de um certo instante, já que qualquer intervalo aberto contendo zero contém todos os números da forma $\frac{1}{n+1}$ a partir de um certo instante (como vimos no Exemplo 1.1).

Note que se $r > 0$ e $x \in (-r, r)$, então $1 - x \in (1 - r, 1 + r)$.

O que vimos nos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 caracteriza o fato de uma seqüência convergir para zero e o que vimos no Exemplo 1.4 caracteriza o fato de uma seqüência convergir para 1.

Os exemplos vistos anteriormente motivam a introdução do seguinte conceito fundamental:

Definição 1.1 Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$ (ou (x_n)) uma seqüência arbitrária de números reais (nos Exemplos 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n = \frac{1}{2^n}$, $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ e $x_n = \frac{n}{n+1}$, respectivamente) e x um número real . Diz-se que (x_n) *converge para* x, e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, quando para qualquer intervalo aberto I contendo x (por menor que ele seja) é possível encontrar um inteiro $m \geq 1$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n \geq m$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ lê-se: limite de x_n quando n tende a infinito é igual a x. Pode-se provar que x, caso exista, é único.

Em outras palavras, (x_n) converge para x quando, para todo $r > 0$ (por menor que ele seja), existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n \in (x - r, x + r)$ para todo $n \geq m$, ou seja, tal que $|x_n - x| < r$ para todo $n \geq m$.

Nos exemplos acima temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\ .$$

Quando não houver $x \in \mathbb{R}$ para o qual uma determinada seqüência (x_n) convirja, diz-se que (x_n) *diverge*. Este é o caso da seqüência do exemplo a seguir.

Exemplo 1.5

Consideremos a seqüência $x_n = (-1)^n, n \geq 1$.

Temos que $x_n = 1$ para n par e $x_n = -1$ para n ímpar. Dado qualquer número real x, com $x \neq 1$ e $x \neq -1$, é possível encontrar um intervalo aberto I contendo x tal que $1 \notin I$ e $-1 \notin I$ (ver a Figura 1.8, onde tomamos, por exemplo, $0 < x < 1$).

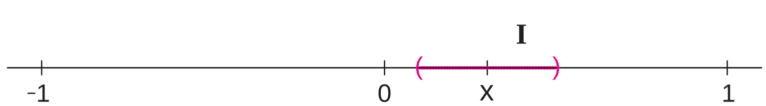


Figura 1.8

É claro que $x_n \notin I$ para todo $n \geq 1$. Portanto, (x_n) não converge para x.

Por outro lado, (x_n) não converge para 1 nem para -1. De fato, tomemos um intervalo aberto J contendo 1 tal que $-1 \notin J$ (ver a Figura 1.9).

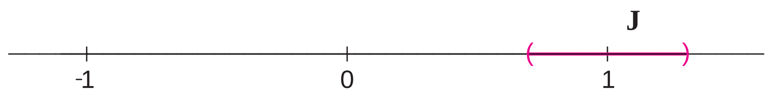


Figura 1.9

Como para todo n ímpar temos que $x_n \notin J$, (x_n) não converge para 1. Raciocinando de modo análogo, verificamos que (x_n) não converge para -1.

Portanto, (x_n) diverge.

O exemplo mais simples de seqüência convergente é o seguinte:

Exemplo 1.6

Seja c um número real e consideremos a seqüência $x_n = c$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Então é claro que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Resumo

Você acaba de ser apresentado à uma noção básica e fundamental, qual seja, a de seqüência convergente de números reais.

Exercícios

1. Ache os limites das seqüências $(x_n)_{n\geq 1}$ abaixo:

   (a) $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$; (b) $x_n = 1+\dfrac{1}{3^n}$; (c) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; (d) $x_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2}$.

2. Encontre inteiros m_1, $m_2 \geq 1$ tais que:

   (a) $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| < \dfrac{1}{100}$ para $n \geq m_1$;

   (b) $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| < \dfrac{1}{10000}$ para $n \geq m_2$.

3. Ache $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

4. Encontre inteiros m_1, m_2, $m_3 \geq 1$ tais que:

(a) $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{10}$ para $n \geq m_1$;

(b) $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{100}$ para $n \geq m_2$;

(c) $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{1}{1000}$ para $n \geq m_3$.

5. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0.$$

Sugestão: Observe que

$$0 < \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}}_{n \ parcelas} \leq \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}.$$

Auto-avaliação

Os exercícios desta aula têm por objetivo contribuir para o amadurecimento do conceito que acabamos de introduzir. Por esta razão, é sumamente importante que você tenha resolvido a maioria deles. Se você sentiu alguma dificuldade, releia os exemplos, pois eles contêm os ingredientes para resolvê-los. Se persistir alguma dúvida, não hesite em consultar os tutores.

Aula 2 – Operações com limites de seqüências. A noção de limite.

Referência: Aula 1.

Objetivos

Estudar operações com limites de seqüências, tais como: soma, produto e quociente.

Compreender o conceito de limite.

Na aula anterior introduzimos a noção de limite de uma seqüência de números reais, a partir da discussão de alguns exemplos.

Nesta aula estudaremos algumas operações elementares com limites de seqüências e introduziremos o conceito de limite, o qual desempenhará um papel central em todo o nosso curso.

A título de motivação, consideremos inicialmente um exemplo.

Exemplo 2.1

Seja

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Raciocinando como na aula 1, é possível concluir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Por outro lado, podemos escrever $a_n = x_n + y_n$, onde $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{2^n}$. Além disso, já sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \ .$$

Portanto, acabamos de observar que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Na verdade, o que ocorreu no exemplo acima não é uma mera coincidência, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.1

Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, então

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

A validade desta proposição decorre do fato de que

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

para todo n e do fato de que podemos tornar $|x_n - x| + |y_n - y|$ tão próximo de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tanto para $|x_n - x|$ quanto para $|y_n - y|$).

Voltemos à seqüência

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

do Exemplo 2.1. Pela Proposição 2.1, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 + 0 = 0.$$

Exemplo 2.2

Seja

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{n}{n+1}, \; n = 1, 2, \dots .$$

Então $a_n = x_n + y_n$, onde $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $y_n = \frac{n}{n+1}$.

Vimos, na aula 1, que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 1 .$$

Logo, pela Proposição 2.1,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = 0 + 1 = 1.$$

Antes de enunciar outra proposição, façamos uma observação importante. Admitamos que uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ convirja para x. Então, por definição, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $|x_n - x| < 1$ para todo $n \geq m$ (isto significa que $x_n \in (x-1, x+1)$ para todo $n \geq m$; ver a Figura 2.1).

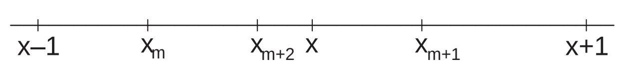


Figura 2.1

Conseqüentemente,

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

para todo $n \geq m$.

Como, felizmente, só há um número finito de elementos da seqüência que podem não ter valor absoluto menor do que $1+|x|$ (quais sejam, $x_1, \ldots, x_{m-1}$), podemos garantir que há um número $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \geq 1$.

Proposição 2.2

Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, então $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

Subtraindo e somando $x_n y$, obtemos:

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x_n y + x_n y - xy = x_n(y_n - y) + y(x_n - x).$$

Por outro lado, acabamos de ver que existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo n. Portanto, para todo n,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \leq \\ &\leq |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)| = \\ &= |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \leq \\ &\leq M|y_n - y| + |y||x_n - x| \ . \end{aligned}$$

Daí resulta que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$, já que podemos tornar $M|y_n - y| + |y||x_n - x|$ tão próximo de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tanto para $|x_n - x|$ quanto para $|y_n - y|$).

Façamos agora uma pausa para um comentário que nos parece relevante. Acreditamos não ser pertinente, neste momento,dar uma demonstração rigorosa de certos resultados, tais como as Proposições 2.1 e 2.2. Por outro lado, é importante que você se convença de que elas são verdadeiras; por esta razão, incluímos um esboço da demonstração de ambas as proposições. Aliás, você deve ter percebido que a demonstração da segunda é bem mais elaborada do que a da primeira.

Decorre da Proposição 2.2 que, se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e c é um número real arbitrário, então

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = cx.$$

Realmente, defina $t_n = c$ para todo $n \geq 1$. Como $\lim_{n\to\infty} t_n = c$, segue da referida proposição que

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = \lim_{n\to\infty} t_n x_n = \big(\lim_{n\to\infty} t_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = cx.$$

Em particular, fazendo $c = -1$, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} (-x_n) = \lim_{n\to\infty} (-1)x_n = -x.$$

Suponhamos ainda que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Pela Proposição 2.1, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n + (-y_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} (-y_n) = x - y.$$

Exemplo 2.3

Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^2 = x^2$.

De fato, pela Proposição 2.2,

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n x_n) = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = x.x = x^2.$$

Exemplo 2.4

Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^3 = x^3$.

De fato, usando a Proposição 2.2 e o Exemplo 2.3, segue que

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^3 = \lim_{n\to\infty} ({x_n}^2 x_n) = \big(\lim_{n\to\infty} {x_n}^2\big)\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = x^2.x = x^3.$$

Mais geralmente, para qualquer inteiro $k \geq 1$, tem-se:

Exemplo 2.5

Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^k = x^k$.

O fato expresso no Exemplo 2.5 decorre da Proposição 2.2 e do princípio de indução finita.

Exemplo 2.6

Seja $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio arbitrário. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = p(x)$.

De fato, em vista da Proposição 2.1(e indução), da Proposição 2.2 e do Exemplo 2.5, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \big(a_m {x_n}^m + a_{m-1}{x_n}^{m-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0\big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} a_m {x_n}^m + \lim_{n\to\infty} a_{m-1}{x_n}^{m-1} + \cdots + \lim_{n\to\infty} a_1 x_n + \lim_{n\to\infty} a_0 = \\
&= a_m\big(\lim_{n\to\infty} {x_n}^m\big) + a_{m-1}\big(\lim_{n\to\infty} {x_n}^{m-1}\big) + \cdots + a_1\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) + a_0 = \\
&= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = p(x)\ .
\end{aligned}$$

Temos ainda a seguinte

Proposição 2.3

Se (y_n) é uma seqüência de números reais não nulos convergindo para um número real y não nulo, então a seqüência $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ converge para $\frac{1}{y}$.

Na Proposição 2.3 basta supor $y \neq 0$, pois isto implica $y_n \neq 0$ a partir de um certo n.

Como conseqüência desta proposição e da Proposição 2.2 resulta que, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e (y_n) e y são como na Proposição 2.3, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}\right) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}.$$

Exemplo 2.7

Seja $a_n = \frac{n^2-2}{n^2+2n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$.

Como $a_n = \dfrac{\frac{n^2-2}{n^2}}{\frac{n^2+2n+1}{n^2}} = \dfrac{1-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$, podemos escrever $a_n = \dfrac{x_n}{y_n}$, onde $x_n = 1 - \frac{2}{n^2}$ e $y_n = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Mas

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} = 1 - 0 = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + 0 + 0 = 1\ .$$

Podemos então concluir que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Concluiremos esta aula introduzindo a noção de limite. Mas antes, vejamos mais dois exemplos.

Exemplo 2.8

Consideremos a função $f(x) = x^3$ definida para $x \in \mathbb{R}$, cujo gráfico esboçamos na Figura 2.2.

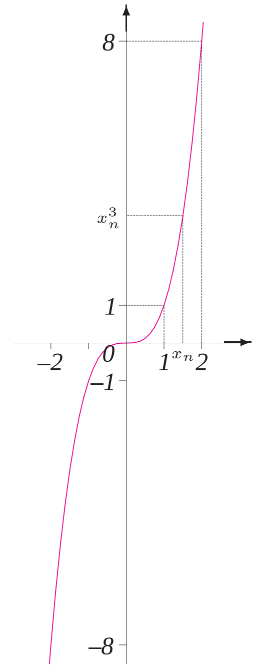


Figura 2.2

Como vimos no Exemplo 2.4, se tomarmos qualquer seqüência (x_n) de números diferentes de 2 tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$, teremos $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} {x_n}^3 = 2^3 = 8$.

Exemplo 2.9

Consideremos a função f, definida em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$ se $x \le 0$ e $f(x) = 1 + x$ se $x > 0$, cujo gráfico esboçamos na Figura 2.3.

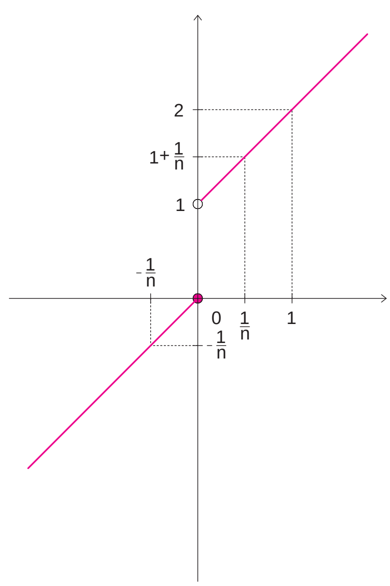


Figura 2.3

Como ambas as seqüências $x_n = -\frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ convergem para zero, a seqüência $(f(x_n))$ converge para zero (pois $f(x_n) = -\frac{1}{n}$) e a seqüência $(f(y_n))$ converge para 1 (pois $f(y_n) = 1 + \frac{1}{n}$).

Conseqüentemente, não podemos encontrar $l \in \mathbb{R}$ com a propriedade de que, para toda seqüência (x_n) de números diferentes de zero tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, se tenha $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Introduzamos agora um conceito fundamental.

Definição 2.1 Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intercepte $D - \{a\}$ e $l \in \mathbb{R}$. Diz-se que $f(x)$ *tende* a l *quando* x *tende* a a, e escreve-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ ,$$

quando para toda seqüência (x_n) de elementos de D tal que $x_n \neq a$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Neste caso, diz-se que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a l.

D representa o domínio da função f. Pode-se provar que l, caso exista, é único.

Quando não houver um número real l satisfazendo a propriedade acima descrita, diz-se que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe.

A exigência feita sobre a, na definição acima, significa que há pontos de D diferentes de a tão próximos de a quanto queiramos. Isto ocorre, por exemplo, se D é um intervalo não trivial e $a \in D$ ou a é um extremo de D (caso $D \neq \mathbb{R}$). É importante também notar que, mesmo que a pertença a D, o valor de f em a é irrelevante para o estudo do conceito em questão.

Um intervalo é não trivial quando não se reduz a um único elemento.

Exemplo 2.10

Seja $c \in \mathbb{R}$ e definamos $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

Exemplo 2.11

Consideremos a função $f(x) = |x|$ definida para $x \in \mathbb{R}$, cujo gráfico esboçamos na Figura 2.4. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

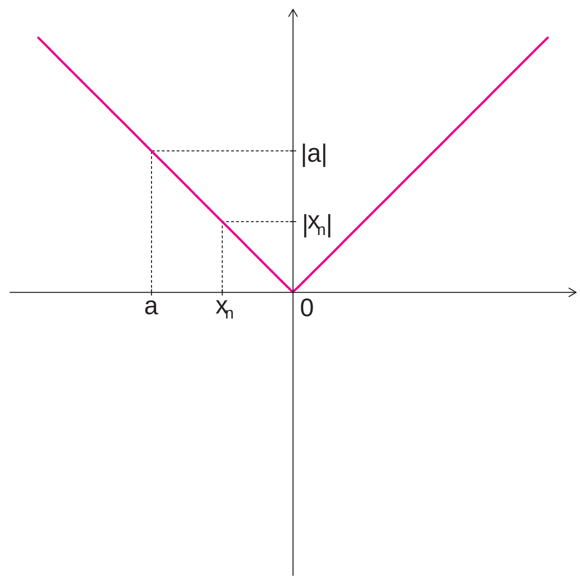


Figura 2.4

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, temos $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Com efeito, vejamos que para qualquer seqüência (x_n) de números reais diferentes de a tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Isto pode ser justificado por meio da relação

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| \ ,$$

que é válida para todo n (esta relação nos diz que a distância entre $|x_n|$ e $|a|$ nunca ultrapassa aquela entre x_n e a). Com efeito, dado $r > 0$ arbitrário, podemos encontrar um inteiro $m \geq 1$ tal que $|x_n - a| < r$ para todo $n \geq m$ (pois $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$). Portanto,

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < r$$

para todo $n \geq m$. Isto mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$. Em particular, $\lim\limits_{x\to -5} |x| = |-5| = 5$ e $\lim\limits_{x\to 0} |x| = |0| = 0$.

Exemplo 2.12

Consideremos um polinômio p qualquer. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Com efeito, tomemos qualquer seqüência (x_n) de números reais diferentes de a tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Como vimos no Exemplo 2.6, $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = p(a)$. Assim, $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$.

Em particular, $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x^3 - 7x) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{7}{2} = \frac{1-28}{8} = -\frac{27}{8}$ e $\lim_{x \to 3} (x^2 + 6x - 5) = 3^2 + (6 \times 3) - 5 = 9 + 18 - 5 = 22.$

Exemplo 2.13

Consideremos a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ se $x < 0$ e $f(x) = x$ se $x > 0$, cujo gráfico esboçamos na Figura 2.5.

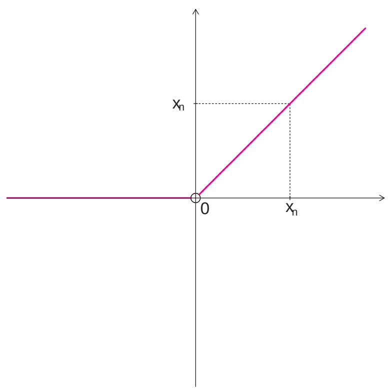


Figura 2.5

Se tomarmos qualquer seqüência (x_n) de números reais não nulos tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, teremos que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$. Assim, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exemplo 2.14

Voltemos à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do Exemplo 2.9. Vimos, no referido exemplo, que existem duas seqüências de números não nulos, (x_n) e (y_n), tais que $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = 0$, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$ e $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 1$. Portanto,

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

não existe.

Resumo

Nesta aula você estudou operações com limites de seqüências e foi apresentado à noção fundamental de limite.

Exercícios

1. Ache os limites das seqüências $(x_n)_{n\geq 1}$ abaixo:

   (a) $x_n = \dfrac{n^3+n-1}{2n^3+7n^2+1}$; (b) $x_n = \dfrac{n^4+5n^3-2}{n^5+1}$.

2. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

3. Dê um exemplo de uma seqüência (x_n) divergente tal que a seqüência $(|x_n|)$ seja convergente.

4. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, use a definição para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -x$.

5. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, mostre que existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n > \frac{1}{2}$ para todo inteiro $n \geq m$. Em particular, os elementos da seqüência (x_n) são maiores do que zero a partir de um certo instante.

   Sugestão: Considere o intervalo aberto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ de centro 1 e raio $\frac{1}{2}$ e aplique a definição de limite de uma seqüência.

6. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $x > 0$, mostre que existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n > \frac{x}{2}$ para todo inteiro $n \geq m$.

   Sugestão: Raciocine como no Exercício 4, substituindo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ por $\left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ e notando que $\left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ é o intervalo aberto de centro x e raio $\frac{x}{2}$.

7. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^5 - 7x^4 + 9)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + |x|)$;

   (b) $\lim\limits_{x\to -1}(x^4 + 2x^3)$; (d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

8. Defina $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$ se $x < 1$ e $f(x) = 1$ se $x > 1$.

   (a) Esboce o gráfico de f.

   (b) Use (a) para intuir o valor de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

9. Defina $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x$ se $x < 0$ e $f(x) = x^2$ se $x > 0$.

   (a) Esboce o gráfico de f.

   (b) Use (a) para intuir o valor de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

10. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = -1$ se $x \leq 2$ e $f(x) = 1$ se $x > 2$.

    (a) Esboce o gráfico de f.

    (b) Mostre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

Desafio

Considere duas seqüências (x_n) e (y_n) tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e existe $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M$ para todo n. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Auto-avaliação

Os resultados desta aula serão importantes para o estudo de limites, que iniciamos nesta aula e retomaremos na próxima de maneira mais detalhada. Por esta razão, só passe para a próxima aula quando tiver feito todos os exercícios, que são de dois tipos: os seis primeiros e o desafio versam sobre a noção de seqüência convergente e os quatro últimos sobre a noção de limite. Se você teve alguma dúvida releia a aula (bem como a anterior) e depois retorne aos exercícios. Este procedimento pode ser muito útil.

Aula 3 – Propriedades de limites. Limites laterais.

Referências: Aulas 1 e 2, e aula 34 de Pré-Cálculo.

Objetivos

Estudar propriedades elementares de limites, tais como: soma, produto, quociente e confronto.

Compreender, a partir da discussão de exemplos concretos, a noção de limite lateral.

Iniciaremos esta aula estudando algumas propriedades básicas de limites que contribuirão para simplificar o cálculo dos mesmos, e a concluiremos introduzindo a noção de limite lateral.

Dadas duas funções $f, g : D \to \mathbb{R}$, podemos a elas associar uma nova função, $f+g$, definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in D$. Por exemplo, se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são definidas por $f(x) = 1 + x^2$ e $g(x) = x^3$, então $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + x^2 + x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.1

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intercepte $D - \{a\}$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = l_2,$$

então

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l_1 + l_2.$$

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência arbitrária de elementos de D tal que $x_n \neq a$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ e, como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l_2$. Pela Proposição 2.1, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = l_1 + l_2.$$

Portanto, pela definição de limite, $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l_1 + l_2$, como havíamos afirmado.

Exemplo 3.1

Calculemos $\lim\limits_{x\to -2}(1 - x^3 + |x|)$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever $1 - x^3 + |x| = (f + g)(x)$, onde $f(x) = 1 - x^3$ e $g(x) = |x|$. Além disso, já sabemos que $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 9$ e $\lim_{x \to -2} g(x) = g(-2) = 2$.

Portanto, pela Proposição 3.1,

$$\lim_{x \to -2}(1 - x^3 + |x|) = 9 + 2 = 11.$$

Dadas duas funções $f, g : D \to \mathbb{R}$, podemos a elas associar uma nova função, fg, definida por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in D$. Por exemplo, se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são definidas por $f(x) = x^4$ e $g(x) = \text{sen} x$, então $(fg)(x) = x^4 \text{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.2

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intercepte $D - \{a\}$. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = l_2,$$

então

$$\lim_{x \to a}(fg)(x) = l_1 l_2.$$

Demonstração: Argumentaremos como na demonstração da Proposição 3.1. De fato, seja (x_n) uma seqüência arbitrária de elementos de D tal que $x_n \neq a$ para todo n e $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Como $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l_1$ e, como $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$, $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = l_2$. Pela Proposição 2.2, obtemos:

$$\lim_{n \to \infty}(fg)(x_n) = \lim_{n \to \infty}(f(x_n)g(x_n)) = (\lim_{n \to \infty} f(x_n))(\lim_{n \to \infty} g(x_n)) = l_1 l_2.$$

Portanto, pela definição de limite, $\lim_{x \to a}(fg)(x) = l_1 l_2$.

Exemplo 3.2

Calculemos $\lim_{x \to 0}(x^2 + 3)^2$.

Para isto, consideremos o polinômio $p(x) = x^2 + 3$. Já sabemos que

$$\lim_{x \to 0} p(x) = p(0) = 3.$$

Portanto, pela Proposição 3.2,

$$\lim_{x \to 0}(x^2 + 3)^2 = \lim_{x \to 0}(p(x))^2 = (\lim_{x \to 0} p(x))(\lim_{x \to 0} p(x)) = 3^2 = 9.$$

Você também poderia observar que

$$(x^2 + 3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$$

é um polinômio, para daí concluir que

$$\lim_{x\to 0}(x^2+3)^2 = 0^4 + 6\times 0^2 + 9 = 9.$$

Exemplo 3.3

Calculemos $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3)^3$.

Como no exemplo anterior, você poderia notar que $(x^2+3)^3$ é um polinômio para obter o valor do limite. Ou então, lançar mão da Proposição 3.2 e do Exemplo 3.2. Senão vejamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(x^2+3)^3 &= \lim_{x\to 0}(p(x))^3 = \lim_{x\to 0}((p(x))^2 p(x)) = \\ &= (\lim_{x\to 0}(p(x))^2)(\lim_{x\to 0} p(x)) = 3^2\times 3 = 3^3 = 27.\end{aligned}$$

De modo geral, podemos afirmar que para todo inteiro $k\geq 1$,

$$\lim_{x\to 0}(x^2+3)^k = 3^k.$$

Este fato decorre da Proposição 3.2 e do príncipio de indução finita.

Suponhamos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, sendo f e g duas funções de D em $\mathbb{R}$ e a como na definição de limite. Aplicando as Proposições 3.1 e 3.2, é possível garantir que

$$\lim_{x\to a} cf(x) = \big(\lim_{x\to a} c\big)\big(\lim_{x\to a} f(x)\big) = cl_1 \quad \text{para todo} \quad c\in\mathbb{R}$$

(olhando c como a função constante e igual a c)

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) &= \lim_{x\to a}(f(x)+(-1)g(x)) = \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}(-1)g(x) \;=\; l_1 - l_2.\end{aligned}$$

Temos ainda a seguinte

Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \neq 0$, é possível verificar que $g(x)\neq 0$ para $x\in D-\{a\}$ próximo de a. Assim, faz sentido considerar a função $\frac{1}{g}$ definida para $x\in D-\{a\}$ próximo de a, e a conclusão da Proposição 3.3 permanece verdadeira.

Proposição 3.3

Sejam $g: D\to\mathbb{R}$ e $a\in\mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intercepte $D-\{a\}$, e suponhamos $g(x)\neq 0$ para todo $x\in D$. Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$ e $l_2\neq 0$, então

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l_2}.$$

No enunciado da Proposição 3.3, $\frac{1}{g}$ representa a função definida por $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$ para todo $x\in D$.

Notemos que a condição de g nunca se anular em D não implica, em geral, que $l_2\neq 0$. Por exemplo, a função $g(x)=x^2$, definida em $\mathbb{R}-\{0\}$, satisfaz $g(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; entretanto, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

A demonstração da Proposição 3.3 é análoga às das Proposições 3.1 e 3.2. Sugerimos que você a faça, lembrando que a Proposição 2.3 deverá ser utilizada.

Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ e sendo g como no enunciado da Proposição 3.3, representemos por $\frac{f}{g}$ a função definida por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para todo $x \in D$. Por exemplo, se $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = x^4 + 1$, então $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notando que $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ e supondo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, com $l_2 \neq 0$, podemos aplicar as Proposições 3.2 e 3.3 para garantir que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \lim_{x\to a}\left(f.\frac{1}{g}\right)(x) = \\ &= \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right) = \\ &= l_1\frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.4

Calculemos $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-7x+1}{x^2+1}$.

Para isto, consideremos os polinômios $p(x) = x^3-7x+1$ e $q(x) = x^2+1$, o segundo dos quais nunca se anula. Então

$$\frac{x^3-7x+1}{x^2+1} = \left(\frac{p}{q}\right)(x) \text{ para todo x} \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\lim_{x\to -3} p(x) = p(-3) = (-3)^3 - 7(-3) + 1 = -5$$

e

$$\lim_{x\to -3} q(x) = q(-3) = (-3)^2 + 1 = 10 \neq 0\ ,$$

segue que

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3-7x+1}{x^2+1} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}.$$

Exemplo 3.5

Calculemos $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x|}{x^2-1}$.

Para isto, escrevamos $\frac{|x|}{x^2-1} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, onde $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2 - 1$. Para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0$, isto é, $g(x) \neq 0$. Além disso, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2) = 3 \neq 0$.

Portanto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x|}{x^2-1} = \frac{2}{3}.$$

A próxima proposição, conhecida como *propriedade do confronto*, é muito útil para o cálculo de certos limites.

Na Proposição 3.4 basta supor $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para $x \in D$ próximo de a.

Proposição 3.4

Sejam $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in D$ e seja $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intercepte $D - \{a\}$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l,$$

então

$$\lim_{x\to a} g(x) = l.$$

Este resultado é bastante natural e intuitivo, e decorre do fato de que se (u_n), (v_n) e (w_n) são três seqüências tais que $u_n \leq v_n \leq w_n$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = u$, então $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = u$.

Exemplo 3.6

Vejamos que $\lim\limits_{x\to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

De fato, como $|\cos x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que $\left|x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Isto significa que

$$-|x| \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, a Proposição 3.4 fornece

$$\lim_{x\to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Consideremos agora o seguinte

Exemplo 3.7

Seja f a função definida em $\mathbb{R} - \{0\}$ por $f(x) = x$ se $x < 0$ e $f(x) = x^2 + 1$ se $x > 0$, cujo gráfico é esboçado na Figura 3.1.

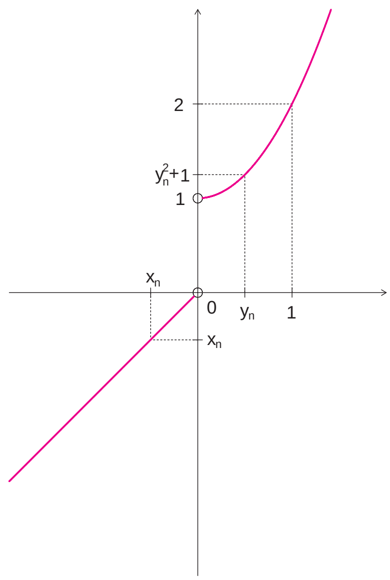


Figura 3.1

Você já deve ter percebido que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe, o que pode ser justificado da seguinte forma: as seqüências $\left(-\frac{1}{n}\right)$ e $\left(\frac{1}{n}\right)$ convergem para zero, a seqüência $\left(f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \left(-\frac{1}{n}\right)$ converge para zero e a seqüência $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{1}{n^2}+1\right)$ converge para 1.

Por outro lado, se tomarmos qualquer seqüência (x_n) de números negativos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; e, se tomarmos qualquer seqüência (y_n) de números positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}({y_n}^2+1) = 1$. Isto significa que, se x se aproximar de zero apenas por valores menores do que zero, $f(x)$ se aproximará de 0; e, se x se aproximar de zero apenas por valores maiores do que zero, $f(x)$ se aproximará de 1.

Vamos a mais um exemplo, no qual ocorre um fenômeno parecido.

Exemplo 3.8

Seja $f(x) = \frac{|x|}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Para todo $x < 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$; e, para todo $x > 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$. Assim, o gráfico de f é , na verdade, muito simples (ver a Figura 3.2).

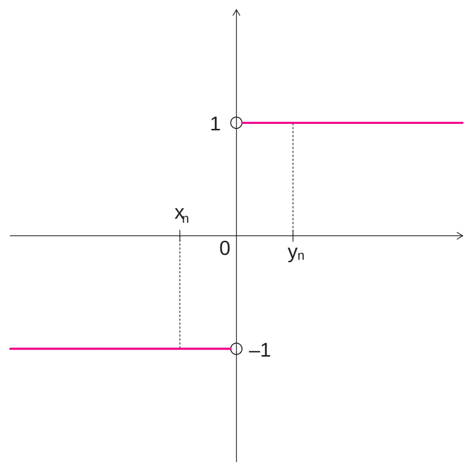


Figura 3.2

Como no Exemplo 3.7, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe (justifique esta afirmação detalhadamente). Por outro lado, dada uma seqüência (x_n) qualquer tal que $x_n < 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, tem-se $f(x_n) = -1$ para todo n; logo, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$. E, dada uma seqüência (y_n) qualquer tal que $y_n > 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, tem-se $f(y_n) = 1$ para todo n; logo, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$.

Vimos, nos Exemplos 3.7 e 3.8, que apesar de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existir, ocorre um fenômeno "simpático"se nos restringirmos exclusivamente a valores de x menores do que zero ou a valores de x maiores do que zero. Isto caracteriza o fato dos limites laterais à esquerda e à direita existirem, para ambas as funções, quando x tende a zero. No caso da função f do Exemplo 3.7, o limite lateral à esquerda em questão (denotado por $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$) é zero e o limite lateral à direita em questão (denotado por $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$) é 1. No caso da função f do Exemplo 3.8, tem-se

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

No caso geral, usaremos as notações

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

para representar, respectivamente, os limites laterais à esquerda e à direita de f em a.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é igual a l. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ lê-se: limite de $f(x)$ quando x tendo a a pela direita é igual a l.

Para que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ faça sentido, é preciso assegurar que existam elementos do domínio de f, menores do que a, tão próximos de a quanto desejarmos, valendo observação análoga para $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Cabe mencionar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existem e são iguais.

Este fato poderia ser usado para garantir que, se f é a função do Exemplo 2.13, então $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Com efeito, dada qualquer seqüência

(x_n) tal que $x_n < 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ (pois $f(x_n) = 0$ para todo n); logo $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Por outro lado, dada uma seqüência (y_n) qualquer tal que $y_n > 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$; logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Conseqüentemente, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Finalmente, observemos que as propriedades sobre limites, vistas nesta aula, permanecem verdadeiras tanto para o limite lateral à esquerda quanto para o limite lateral à direita.

Resumo

Nesta aula você estudou certas propriedades elementares de limites, bem como a noção de limite lateral.

Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+5x+7}{x^2-6x+8}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-2)^3+2|x|}{x^4+x^2+\sqrt{2}}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$.

2. Sejam k um inteiro positivo e a um número real.

   (a) Mostre que $\lim\limits_{x\to a}(x^k - a^k) = 0$.

   (b) Mostre que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^k-a^k}{x-a} = ka^{k-1}$.

   (c) Escrevendo $x^k - a^k = \dfrac{x^k-a^k}{x-a}\,(x-a)$ para $x \neq a$, obtenha (a) a partir de (b).

3. Use a definição de limite para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

4. (a) Use a definição de limite para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} x = 0.$$

(b) Use a propriedade do confronto para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} x = 0.$$

5. Defina $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2 + |x|$ se $x < 0$ e $f(x) = x^2 + 3$ se $x > 0$.

   (a) Esboce o gráfico de f.

   (b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

   (c) Decida se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

6. Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = -x^2 + 1$ se $x < 0$, $g(0) = 0$ e $g(x) = x + 1$ se $x > 0$.

   (a) Esboce o gráfico de g.

   (b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

   (c) Decida se $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe. Em caso afirmativo, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$?

7. Sejam f e g as funções dos Exercícios 5 e 6.

   (a) Forneça $\lim\limits_{x\to 0^-} (f+g)(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} (f+g)(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} (fg)(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} (fg)(x)$.

   (b) Decida se $\lim\limits_{x\to 0}(f+g)(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0}(fg)(x)$ existem.

8. Defina $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + x + 2c$ se $x > 0$ e $f(x) = 1 - cx$ se $x < 0$, onde c é um número real. Determine o valor de c para que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exista.

9. (a) Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intercepte $D - \{a\}$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \le M$ para todo $x \in D$ (ou apenas para $x \in D$ próximo de a), mostre que $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

   (b) Obtenha o Exemplo 3.6 e o Exercício 4 a partir de (a).

Auto-avaliação

As propriedades discutidas nesta aula serão usadas freqüentemente durante o curso. Por esta razão, é importante que você tenha feito corretamente os exercícios propostos, pois eles visam a assimilação das referidas propriedades. Caso haja alguma dúvida nos exercícios, releia a aula com atenção e depois volte a eles. Caso ainda persista alguma dúvida, consulte os tutores.

Aula 4 – Um limite fundamental.

Referências: Aula 3, e aula 34 de Pré-Cálculo.

Objetivos

Compreender por que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, *e ver algumas conseqüências deste fato.*

Antes de justificar o objetivo desta aula, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.1

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \ (= \operatorname{sen} 0)$.

De fato, consideremos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, cujo gráfico esboçamos na Figura 4.1.

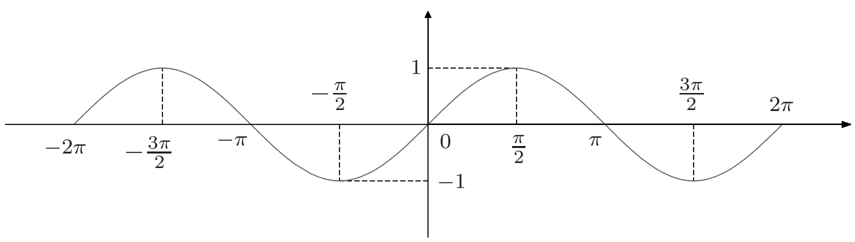


Figura 4.1

Para qualquer seqüência (x_n) tal que $x_n < 0$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, temos $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} x_n = 0$; logo, $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x = 0$. Por outro lado, para qualquer seqüência (y_n) tal que $y_n > 0$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, temos $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} y_n = 0$; logo, $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$. Portanto, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Exemplo 4.2

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \ (= \cos 0)$.

De fato, consideremos a função $f(x) = \cos x$, cujo gráfico esboçamos na Figura 4.2.

Para qualquer seqüência (x_n) tal que $x_n < 0$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, temos $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1$; logo, $\lim_{x\to 0^-} \cos x = 1$. Por outro lado,

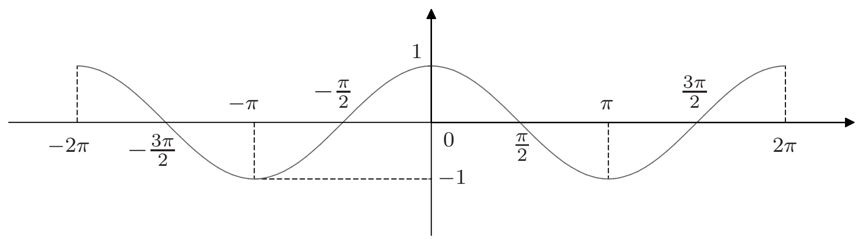


Figura 4.2

para qualquer seqüência (y_n) tal que $y_n > 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos y_n = 0$; logo $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Exemplo 4.3

O domínio da função tangente é o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$.

De fato, como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, e como $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, segue do que vimos na aula 3 que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \frac{0}{1} = 0.$$

Teorema 4.1

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Demonstração: Provemos, inicialmente, que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

De fato, consideremos $o < x < \frac{\pi}{2}$, e comparemos as áreas dos triângulos OAB e ODC e do setor circular ODB (ver a Figura 4.3).

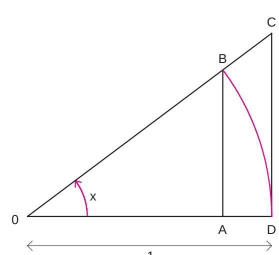


Figura 4.3

Como a área do triângulo OAB é $\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$, a área do setor circular ODB é $\frac{x}{2}$ e a área do triângulo ODC é $\frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Como $\operatorname{sen} x > 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Mas, pela Proposição 3.3, temos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Podemos então aplicar a propriedade do confronto, vista na aula 3, para concluir que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Mostremos agora que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

De fato, como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (a função seno é ímpar), podemos escrever para $x < 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x},$$

onde $-x > 0$. Logo,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1.$$

Em resumo, temos

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

como queríamos demonstrar.

Você deve ter notado que, para provar o Teorema 4.1, não poderíamos passar ao limite no numerador ($\operatorname{sen} x$) e no denominador (x) separadamente, pois neste caso temos $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ (Exemplo 4.1) e $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Vamos dedicar o resto da aula a discutir alguns exemplos nos quais se faz uso do Teorema 4.1.

Exemplo 4.4

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

De fato, como $\cos x \neq 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos escrever

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$. É possível então aplicar a Proposição 3.2 para concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right) = 1 \times 1 = 1.$$

Exemplo 4.5

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0.$

De fato, observemos inicialmente que $1 + \cos x \neq 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Então, para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos x}{x} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \\
&= \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 1 + \lim_{x\to 0} \cos x = 1 + 1 = 2,$$

a Proposição 3.3 garante que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, pela Proposição 3.2,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \left(\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}\right) = \\
&= 0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.6

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Realmente, como $1+\cos x \neq 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos escrever

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}$$

para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$.

Portanto, pela Proposição 3.2,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right) = \\
&= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.7

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2)}{x} = 0$.

De fato, como $\frac{\text{sen}(x^2)}{x} = x \cdot \frac{\text{sen}\,(x^2)}{x^2}$ para todo $x \neq 0$ e como $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(x^2)}{x} = \big(\lim_{x\to 0} x\big)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(x^2)}{x^2}\right) = 0 \times 1 = 0.$$

Exemplo 4.8

$\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen}\, x}{\pi - x} = 1$.

Com efeito, tendo em vista a igualdade

$$\text{sen}(z+w) = \text{sen}\, z\cos w + \text{sen}\, w \cos z,$$

válida para quaisquer $z, w \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\pi - x) &= \text{sen}(\pi + (-x)) = \text{sen}\,\pi\cos(-x) + \cos\pi\text{sen}(-x) = \\
&= -\text{sen}(-x) = -(-\text{sen}\, x) = \text{sen}\, x
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Conseqüentemente,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}\, x}{\pi - x} = \lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}(\pi - x)}{\pi - x}.$$

Finalmente, como $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x) = 0$, resulta do Teorema 4.1 que

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}(\pi - x)}{\pi - x} = 1.$$

Portanto,
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x} = 1.$$

Resumo

Nesta aula você estudou um limite muito importante e viu algumas conseqüências do mesmo.

Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(x^2-a^2)}{x-a}$, $a\in\mathbb{R}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\operatorname{tg} x\,\operatorname{sen} x}$.
   Sugestão: Escreva
   $$\frac{3x^2}{\operatorname{tg} x\,\operatorname{sen} x} = 3\Big(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\Big)^2\cos x.$$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$.
   Sugestão: Escreva
   $$\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\,\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}\,\frac{1}{\cos(2x)}.$$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$.
   Sugestão: Escreva
   $$\frac{x-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\frac{x}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{\cos x}}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}+\frac{1}{\cos x}}.$$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$, $a, b\in\mathbb{R}-\{0\}$.

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(ax^2)}{x^4}$, $a\in\mathbb{R}-\{0\}$.
   Sugestão: Escreva
   $$\frac{\operatorname{sen}^2(ax^2)}{x^4} = a^2\left(\frac{\operatorname{sen}(ax^2)}{ax^2}\right)^2.$$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(ax)}{x^2}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ (use o Exemplo 4.6).

(i) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$ (note que $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{tg} x = 0$) .

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec\, x}{x^2}$.

Como $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, a função secante está definida no conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x \neq 0$.

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2(ax)}{1-\cos(bx)}$, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Sugestão: Escreva

$$\frac{\operatorname{tg}^2(ax)}{1-\cos(bx)} = \left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}\right)^2 \frac{1+\cos(bx)}{\cos^2(ax)}$$

e use (f).

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec(ax)-\sec(bx)}{x^2}$, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Sugestão: Escreva

$$\frac{\sec(ax)-\sec(bx)}{x^2} = \frac{1}{(\cos(ax))(\cos(bx))}\left(\frac{1-\cos(ax)}{x^2} - \frac{1-\cos(bx)}{x^2}\right)$$

e use (h) .

2. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg}(4x) \operatorname{tg}(6x)}$.
Sugestão: Escreva

$$\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg}(4x) \operatorname{tg}(6x)} =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \cos(2x)\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)} \cdot \cos(4x)\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(6x)} \cdot \cos(6x)\right)$$

e use o Exercício 1 (f) .

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x}$.

3. Mostre que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}^3(1-x)}{\operatorname{sen}(1-x) \operatorname{sen}^2(1-x^2)} = \frac{1}{4}.$$

Sugestão: Escreva

$$\frac{\operatorname{tg}^3(1-x)}{\operatorname{sen}(1-x) \operatorname{sen}^2(1-x^2)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^3(1-x)} \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{\operatorname{sen}(1-x)}{1-x}\right)^2 \left(\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(1-x^2)}\right)^2.$$

4. Lembrando que $\cos(x-\pi) = -\cos x$, mostre que

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} = \frac{1}{2}.$$

5. Mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{2x \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{3}{4}.$$

6. Mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2+\frac{1}{x}) - \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x} = 0.$$

   Sugestão: Escreva

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2+\frac{1}{x}) - \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x^2)\cos(\frac{1}{x}) + \cos(x^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{x} =$$

$$= \left(x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right) + \left(x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\cos(x^2)-1}{x^2}\right).$$

Auto-avaliação

Esta aula gira em torno de um resultado importante: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Nos exercícios propostos, além de aplicar este resultado, você deve demonstrar domínio das propriedades de limites bem como das propriedades básicas das funções seno e cosseno. Vários dos exercícios são acompanhados de sugestões que facilitam a sua resolução. Caso você tenha alguma dificuldade, releia a aula 3.

Aula 5 – Limites infinitos. Assíntotas verticais.

Referências: Aulas 34 e 40, de Pré-Cálculo, e aulas 1 e 2.

Objetivo

Compreender o significado dos limites infinitos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Nas aulas 1 e 2 estudamos a noção de seqüência convergente para, a partir dela, definir o que se entende por

$$\lim_{x\to a} f(x) = l,$$

onde l é um número real

Nesta aula estudaremos o que se entende por

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Mas antes precisaremos introduzir as noções

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

A título de motivação, vejamos inicialmente alguns exemplos.

Exemplo 5.1

Consideremos a seqüência $x_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$

Dado qualquer número real $M > 0$ (por maior que ele seja), tomemos $r = \frac{1}{M} > 0$. Pela propriedade arquimediana (lembrar a aula 1), existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m} < r$. Logo,

$$x_m = m = \frac{1}{\frac{1}{m}} > \frac{1}{r} = M,$$

e daí resulta que $x_n = n > M$ para todo inteiro $n > m$ (ver a Figura 5.1).

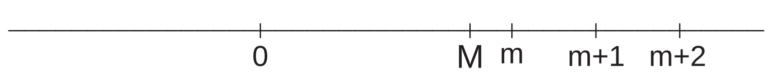


Figura 5.1

Exemplo 5.2

Consideremos a seqüência $x_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$

Dado qualquer número $M > 0$, seja m um inteiro tal que $m > M$. Então $x_m = m^2 \geq m > M$; logo, para todo inteiro $n > m$, tem-se $x_n = n^2 > m^2 > M$ (ver a Figura 5.2).

Figura 5.2

Exemplo 5.3

Consideremos a seqüência $x_n = \sqrt{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Dado qualquer número $M > 0$, seja m um inteiro tal que $m > M^2$. Então $x_m = \sqrt{m} > \sqrt{M^2} = M$; logo, para todo inteiro $n > m$, tem-se $x_n = \sqrt{n} > \sqrt{m} > M$ (ver a Figura 5.3).

Figura 5.3

Acabamos de ver que as seqüências $x_n = n$, $x_n = n^2$ e $x_n = \sqrt{n}$ satisfazem a seguinte propriedade: dado qualquer $M > 0$ (por maior que ele seja), podemos garantir que todos os x_n são maiores do que M a partir de um certo n.

Acreditamos já estar preparados para a seguinte

Definição 5.1 Seja (x_n) uma seqüência de números reais. Diz-se que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ lê-se: limite de x_n quando n tende a infinito é igual a mais infinito.

se, para todo número real $M > 0$, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n > M$ para todo $n \geq m$.

Por exemplo,

$$\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Por outro lado, se considerarmos as seqüências $y_n = -n$, $y_n = -n^2$ e $y_n = -\sqrt{n}$, o que vimos nos Exemplos 5.1, 5.2 e 5.3 garante que, para todo $N < 0$ (por menor que ele seja), existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $y_n < N$ para todo $n \geq m$. Ou, em outras palavras, dado qualquer número real N menor do que zero, podemos garantir que todos os y_n são menores do que N a partir de um certo n.

Isto motiva a seguinte

Definição 5.2 Seja (x_n) uma seqüência de números reais. Diz-se que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

se, para todo número real $N < 0$, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n < N$ para todo $n \geq m$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ lê-se: limite de x_n quando n tende a infinito é igual a menos infinito.

Por exemplo,

$$\lim_{n\to\infty}(-n) = \lim_{n\to\infty}(-n^2) = \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty.$$

Observamos, na aula 2, que para qualquer seqüência (x_n) convergente é possível encontrar um número $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo n. Por outro lado, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, é claro que esta propriedade não se verifica. Conseqüentemente, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, então a seqüência (x_n) é divergente, isto é, não convergente.

Mencionemos alguns fatos simples (mas úteis) que decorrem das definições que acabamos de ver:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$.

(b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $c > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = +\infty$.

(c) Se $x_n \geq y_n$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Em (c) e (e) basta supor $x_n \geq y_n$ a partir de um certo n.

Como conseqüência de (a), (b) e (c), obtém-se:

(d) Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ e $c > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = -\infty$.

(e) Se $x_n \geq y_n$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

Por exemplo, suponhamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. Por (a), $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-y_n) = +\infty$; e por (b),

$$\lim_{n\to\infty}((-x_n)+(-y_n)) = \lim_{n\to\infty}(-(x_n+y_n)) = +\infty.$$

Logo, por (a),

$$\lim_{n\to\infty}(-(-(x_n+y_n))) = \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -\infty,$$

provando (d).

Em (f) basta supor $x_n > 0$ a partir de um certo n e em (g) basta supor $x_n < 0$ a partir de um certo n.

Outro fato que merece ser mencionado é o seguinte:

(f) Se $x_n > 0$ para todo n, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.

É fácil ver que (f) equivale a:

(g) Se $x_n < 0$ para todo n, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Antes de atingir o objetivo desta aula, vejamos dois exemplos.

Exemplo 5.4

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, cujo gráfico esboçamos na Figura 5.4.

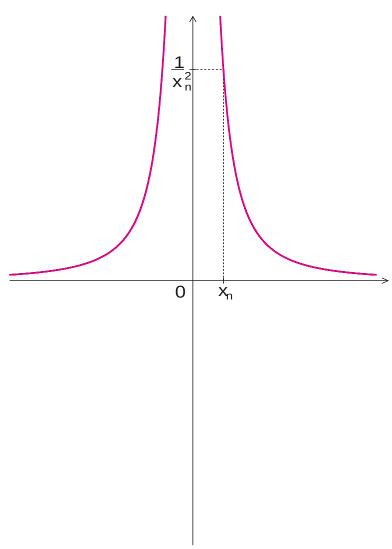


Figura 5.4

Olhando para o gráfico de f é fácil perceber que $f(x)$ cresce cada vez mais quando x se aproxima de zero.

Este fato pode ser expresso da seguinte forma: se tomarmos qualquer seqüência (x_n) de números diferentes de zero tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{{x_n}^2} = +\infty$ (realmente, como $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^2 = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{{x_n}^2} = +\infty$ em vista de (f)).

Exemplo 5.5

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x}$, definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, cujo gráfico esboçamos na Figura 5.5.

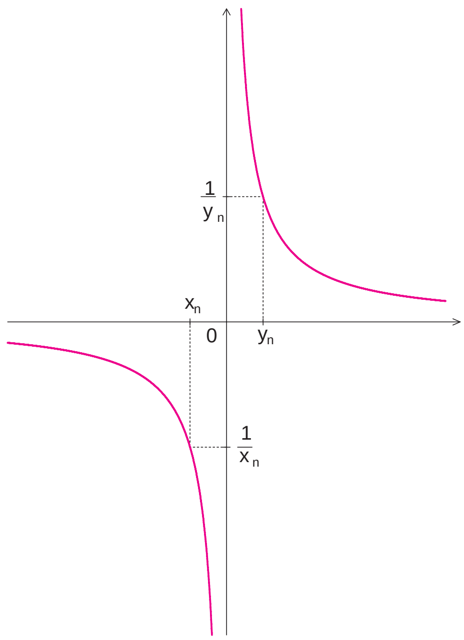


Figura 5.5

Olhando para o gráfico de f é fácil perceber que $f(x)$ decresce cada vez mais quando x se aproxima de zero por valores menores do que zero e que $f(x)$ cresce cada vez mais quando x se aproxima de zero por valores maiores do que zero. Em particular, o comportamento da função deste exemplo para valores de x próximos de zero é diferente do comportamento da função do exemplo anterior para valores de x próximos de zero.

Os fatos que acabamos de ressaltar podem ser expressos da seguinte forma: se tomarmos qualquer seqüência (x_n) tal que $x_n < 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$ (isto segue de (g)); e se tomarmos qualquer seqüência (y_n) tal que $y_n > 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$ (isto segue de (f)). Em geral, temos a seguinte

Definição 5.3 Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intercepte $D - \{a\}$. Diz-se que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Big(\text{respectivamente} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\Big)$$

se, para toda seqüência (x_n) de elementos de D tal que $x_n \neq a$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$).

Decorre de (a) que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a}(-f(x)) = -\infty$.

Por exemplo, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

De maneira completamente análoga, podemos definir o que se entende por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$

Por exemplo, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Diz-se que a reta vertical $x = a$ é uma *assíntota vertical ao gráfico de uma função f* se:

$$\text{(a)} \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

ou

$$\text{(b)} \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$

Exemplo 5.6

Seja a um número real arbitrário e consideremos a função $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x-a}$, cujo gráfico esboçamos na Figura 5.6.

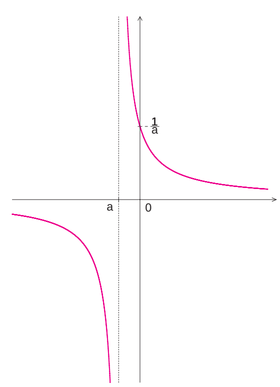


Figura 5.6

Como $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Notemos que, pela própria definição, apenas um destes dois fatos já seria suficiente para garantir que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f. Vejamos um exemplo onde isto ocorre.

Exemplo 5.7

Consideremos a função f, definida por $f(x) = -x$ se $x \le 0$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x > 0$, cujo gráfico esboçamos na Figura 5.7.

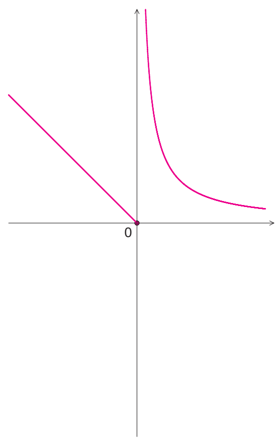


Figura 5.7

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f (observemos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$).

Como conseqüência das propriedades de seqüências vistas nesta aula, podemos garantir a validade das seguintes propriedades:

(a) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $c > 0$, então $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} cf(x) = +\infty$.

(b) Se $f(x) \ge g(x)$ para x próximo de a e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

(c) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $c > 0$, então $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} cf(x) = -\infty$.

(d) Se $f(x) \ge g(x)$ para x próximo de a e $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

(e) Se $f(x) > 0$ para x próximo de a, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(f) Se $f(x) < 0$ para x próximo de a, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Evidentemente, valem propriedades análogas para $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

Concluiremos esta aula com mais um exemplo.

Exemplo 5.8

Consideremos a função $f(x) = \frac{x}{x-1}$, definida para $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Se tomarmos qualquer seqüência (x_n) tal que $x_n < 1$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n - 1} = -\infty$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n-1} = -\infty$. Assim, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

Por outro lado, se tomarmos qualquer seqüência (y_n) tal que $y_n > 1$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$, teremos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n-1} = +\infty$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_n-1} = +\infty$. Assim, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f, que esboçamos apenas para $x \in [-1, 2] - \{1\}$ (ver a Figura 5.8).

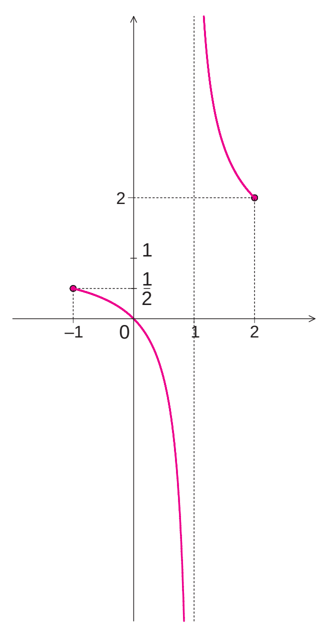


Figura 5.8

Resumo

Nesta aula você estudou a noção de limite infinito e entendeu quando a reta vertical $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de uma função.

Exercícios

1. Seja $f(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.
   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
   (b) A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

2. Seja $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.
   (b) A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $f(x) = -\dfrac{1}{x^4}$ se $x > 0$.
   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
   (b) A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$ se $x < 2$, $f(2) = 0$ e $f(x) = \frac{1}{(2-x)^3}$ se $x > 2$.
   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.
   (b) A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

5. Seja a um número real arbitrário e defina $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$.
   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
   (b) A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

6. Ache as assíntotas verticais ao gráfico de f, caso existam, para as funções f indicadas abaixo:

   (a)$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$; (b)$f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^3}$; (c)$f(x) = \dfrac{x^2-1}{1-x}$;

   (d)$f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-\sqrt{5}}$; (e)$f(x) = \dfrac{x^2}{x-\sqrt{5}}$; (f)$f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$.

Auto-avaliação

Como você deve ter observado, o estudo de limites infinitos contribui para a compreensão do comportamento de funções. Devido a isto, só passe para a próxima aula após fazer todos os exercícios propostos, que se assemelham aos exemplos desta aula. Se você sentiu dificuldade nos exercícios, releia a aula com cuidado e depois retorne a eles.

Aula 6 – Funções contínuas. Propriedades.

Referências: Aulas 2 e 3.

Objetivos

Compreender a noção de função contínua.

Estudar propriedades elementares de funções contínuas, tais como: soma, produto, quociente e composição.

Antes de introduzir o conceito no qual estaremos interessados nesta aula, e em muitas outras que se seguirão, vejamos dois exemplos.

Exemplo 6.1

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x^3$ se $x > 0$, cujo gráfico esboçamos na Figura 6.1.

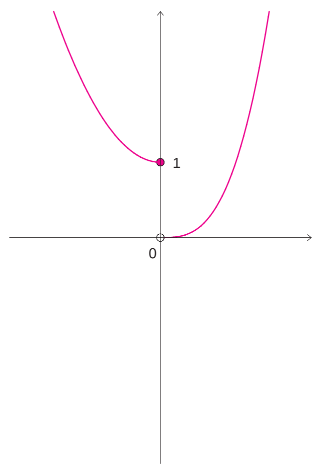


Figura 6.1

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1 = f(0)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe.

Exemplo 6.2

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$ se $x \neq 1$ e $f(1) = 0$, cujo gráfico esboçamos na Figura 6.2.

Já sabemos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} |x| = |1| = 1$. Entretanto, como $f(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

Para a função f, do Exemplo 6.1, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe, apesar dos limites $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existirem. Para a função f, do Exemplo 6.2,

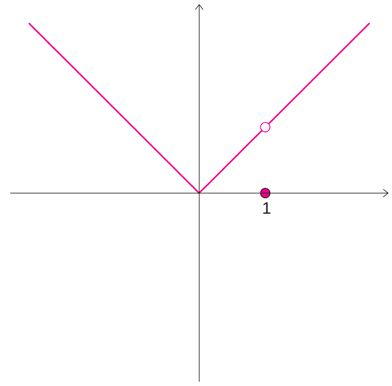


Figura 6.2

$\lim_{x \to 1} f(x)$ existe, apesar de ser diferente de $f(1)$. Deste ponto de vista, o comportamento da função f, do Exemplo 6.1, para x próximo de 0 é diferente do comportamento da função f, do Exemplo 6.2, para x próximo de 1. O gráfico da primeira função dá um "salto"em $x = 0$ e o gráfico da segunda função tem um "buraco"em $x = 1$. Em outras palavras, em ambos os casos, os gráficos não são contínuos.

Nesta aula estaremos interessados naquelas funções cujos gráficos sejam contínuos, algumas das quais já apareceram nas aulas anteriores.

Definição 6.1 Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que f *é contínua em* a se, para qualquer seqüência (x_n) de elementos de D tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, tem-se

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Na grande maioria dos exemplos relevantes e em todos os exemplos e exercícios considerados neste curso ocorre que todo intervalo aberto contendo a intercepta $D - \{a\}$. Neste caso, dizer que f é contínua em a equivale a dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (lembrar a aula 2).

Diz-se que f *é contínua em* D se f é contínua em todo $a \in D$.

Vejamos alguns exemplos de funções contínuas:

Exemplo 6.3

A função $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$.

De fato, vimos no Exemplo 2.11 que, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} |x| = |a| = f(a).$$

Exemplo 6.4

Todo polinômio p é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

De fato, vimos no Exemplo 2.12 que, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

Exemplo 6.5

A função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em seu domínio $[0, +\infty)$ (na Figura 6.3 esboçamos o gráfico de f).

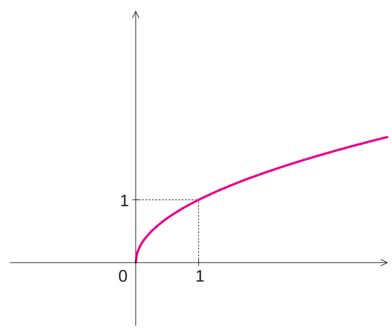


Figura 6.3

Vamos explicar porque

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = f(a)$$

no caso em que $a > 0$; o caso em que $a = 0$ é bem mais simples (faça os detalhes). Realmente, seja (x_n) uma seqüência arbitrária de elementos de $[0, +\infty)$ diferentes de a tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Como $x_n - a = \big(\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\big)\big(\sqrt{x_n} + \sqrt{a}\big)$, temos

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}|x_n - a|,$$

pois $\sqrt{x_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$. Como podemos tornar os números $\frac{1}{\sqrt{a}}|x_n - a|$ tão próximos de zero quanto queiramos (já que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$), o mesmo vale para os números $|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}|$ em vista da desigualdade acima. Isto nos permite concluir que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

mostrando que f é contínua em a.

Raciocinando de maneira similar, mas trabalhando um pouco mais, podemos garantir a validade dos dois exemplos a seguir.

Exemplo 6.6

Para cada inteiro $k \geq 2$ par, a função $f(x) = \sqrt[k]{x}$ é contínua em seu domínio $[0, +\infty)$. Ou seja, as funções $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[8]{x}$, $\sqrt[10]{x}, \ldots$ são contínuas em $[0, +\infty)$.

Exemplo 6.7

Para cada inteiro $k \geq 3$ ímpar, a função $f(x) = \sqrt[k]{x}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Ou seja, as funções $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[7]{x}$, $\sqrt[9]{x}$, $\sqrt[11]{x}, \ldots$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.8

A função f, do Exemplo 6.2, é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$, mas não é contínua em 1.

Com efeito, para cada $a \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = |a| = f(a),$$

como vimos no Exemplo 6.3; logo, f é contínua em a.

Por outro lado, vimos no Exemplo 6.2 que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \neq 0 = f(1)$. Logo, f não é contínua em 1.

Exemplo 6.9

As funções seno e cosseno são contínuas em $\mathbb{R}$.

Os dois fatos expressos no Exemplo 6.9 também podem ser justificados a partir de propriedades das funções seno e cosseno; ver H. L. Guidorizzi, Um Curso de Cálculo, Volume 1.

Isto segue dos Exemplos 9.7 e 9.8 e da Proposição 10.1.

Nas próximas proposições obteremos propriedades elementares de funções contínuas.

Proposição 6.1

Se $f, g : D \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in D$, então $f + g$ e fg também o são.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência arbitrária de elementos de D tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Pela continuidade de f e g em a, temos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(a).$$

Usando as Proposições 2.1 e 2.2, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) =\\ &= \lim_{n\to\infty}f(x_n)+\lim_{n\to\infty}g(x_n) =\\ &= f(a)+g(a) =\\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(fg)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)g(x_n)) =\\ &= \big(\lim_{n\to\infty}f(x_n)\big)\big(\lim_{n\to\infty}g(x_n)\big) =\\ &= f(a)g(a) =\\ &= (fg)(a).\end{aligned}$$

O que acabamos de verificar mostra que $f+g$ e fg são contínuas em a, como queríamos demonstrar.

Como conseqüência da Proposição 6.1 podemos assegurar que, para f e g como na Proposição 6.1 e para qualquer $c \in \mathbb{R}$, as funções cf e $f-g$ são contínuas em a.

Exemplo 6.10

As funções $f_1(x) = \sqrt[3]{x} + \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x$, $f_3(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ e $f_4(x) = (\operatorname{sen} x)(\cos x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$, pois as funções $g_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $g_2(x) = \operatorname{sen} x$ e $g_3(x) = \cos x$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.11

A função $f(x) = |x|\sqrt[6]{x} + x\cos x$ é contínua em $[0, +\infty)$, pois a função $g_1(x) = \sqrt[6]{x}$ é contínua em $[0,+\infty)$ e as funções $g_2(x) = |x|$, $g_3(x) = x$ e $g_4(x) = \cos x$ são contínuas em $\mathbb{R}$ (logo, em $[0, +\infty)$).

Proposição 6.2

Se $f, g : D \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in D$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, então $\frac{f}{g}$ é contínua em a.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência arbitrária de elementos de D tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Pela continuidade de f e g em a, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

Pelo visto na aula 2,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a).$$

Acabamos de verificar que $\frac{f}{g}$ é contínua em a, como queríamos demonstrar.

Exemplo 6.12

A função $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois as funções $g_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $g_2(x) = x^4 + 1$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $g_2(x) \geq 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Proposição 6.2 admite uma formulação mais geral, a saber:

Se $f, g : D \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in D$ e $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é contínua em a, sendo $\frac{f}{g}$ definida no conjunto $\{x \in D \,;\, g(x) \neq 0\}$.

Exemplo 6.13

A função $f(x) = \frac{|x| \cos x}{1-x^2}$ é contínua em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Realmente, as funções $g_1(x) = |x| \cos x$ e $g_2(x) = 1 - x^2$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $g_2(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Exemplo 6.14

Se p e q são dois polinômios, então a função racional $f = \frac{p}{q}$ é contínua no conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$.

Proposição 6.3

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ contínua em $a \in D$ e $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in E$ para todo $x \in D$ e g é contínua em $f(a)$. Então a função composta $g \circ f$ é contínua em a.

Demonstração : Seja (x_n) uma seqüência arbitrária de elementos de D tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Pela continuidade de f em a, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$; e, pela continuidade de g em $f(a)$, $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$. Acabamos de ver que

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a),$$

provando que $g \circ f$ é contínua em a.

Exemplo 6.15

A função $f(x) = \text{sen}(x^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

De fato, as funções $g_1(x) = x^2$ e $g_2(x) = \text{sen}\, x$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $f = g_2 \circ g_1$ (realmente, para todo $x \in \mathbb{R}$, $(g_2 \circ g_1)(x) = g_2(g_1(x)) = g_2(x^2) = \text{sen}(x^2) = f(x)$).

Exemplo 6.16

A função $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

De fato, a função $g_1(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função $g_2(x) = \sqrt[4]{x}$ é contínua em $[0, +\infty)$. Além disso, $g_1(x) \in [0, +\infty)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f = g_2 \circ g_1$ (realmente, para todo $x \in \mathbb{R}$, $(g_2 \circ g_1)(x) = g_2(g_1(x)) = g_2(|x|) = \sqrt[4]{|x|} = f(x)$), a nossa afirmação está justificada.

Resumo

Nesta aula você foi apresentado a uma noção fundamental, a de função contínua. Além disso, você estudou algumas propriedades elementares de funções contínuas.

Exercícios

1. Mostre que as funções *tangente, cotangente, secante e cossecante* são contínuas em seus respectivos domínios.

2. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em $D \subset \mathbb{R}$, mostre que a função $|f|$ é contínua em D, onde $|f|$ é definida por $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in D$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. Mostre que $|f|$ é contínua em $\mathbb{R}$ mas f não o é.

   Este exercício mostra que a recíproca do exercício anterior não é verdadeira em geral.

4. Seja $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Mostre que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[5]{\text{sen}(2x - a)}}{x^2 + a^2} = \dfrac{\sqrt[5]{\text{sen}\, a}}{2a^2}$.

5. Determine em que pontos de seus domínios as funções f abaixo são contínuas, justificando a sua resposta.

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^2 + 1}{x^2 + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ se $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ e $f(3) = 1$.

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x + a}$ se $x \in \mathbb{R} - \{a\}$ e $f(a) = 2a$, onde $a \in \mathbb{R}$.

   (e) $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}$ se $x \in [0, +\infty) - \{2\}$ e $f(2) = 4\sqrt[4]{8}$.

   (g) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{4x^3 + 9x^2 + x}$ se $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f(0) = 1$.

   (h) $f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Determine que valor devemos atribuir a c para que cada uma das funções f abaixo seja contínua em 1.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}}$ se $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ e $f(1) = c$.

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$ se $x \in [0, +\infty) - \{1\}$ e $f(1) = c$.

   Sugestão: Escreva

   $$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5})(\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5})} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5}}{\sqrt{x} + 1}.$$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$ se $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ e $f(1) = c$.

7. Seja $a > 0$. Determine o valor de c para que a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ se $x \neq a$ e $f(a) = c$, seja contínua em a.

8. Determine o valor de c para que a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x^2 - 1}$ se $x \in [0, 1)$ e $f(x) = \frac{cx + 5}{x^2 + 3}$ se $x \in [1, +\infty)$, seja contínua em 1.

9. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, e sejam $f, g, h : (a - r, a + r) \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in (a - r, a + r)$, $f(a) = g(a) = h(a)$ e f e h são contínuas em a. Mostre que g é contínua em a.

Auto-avaliação

Nesta aula é introduzida a importante noção de continuidade que depende, fundamentalmente, da noção de limite estudada nas aulas 2 e 3. Por esta razão, as aulas 2 e 3 são a base para o entendimento desta aula. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos, pois eles certamente contribuem para a assimilação do conteúdo desta aula. Como sempre, consulte os tutores quando achar necessário.

Aula 7 – Os teoremas de Weierstrass e do valor intermediário.

Referência: Aula 6.

Objetivo

Compreender o significado de dois resultados centrais a respeito das funções contínuas: os teoremas de Weierstrass e do valor intermediário.

Nesta aula enunciaremos dois teoremas importantes sobre funções contínuas, os quais serão estudados mais profundamente na disciplina de Análise, e procuraremos realçar a importância dos mesmos apresentando algumas aplicações.

O primeiro teorema é muito longe de ser trivial, apesar da intuição indicar o contrário.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), notável matemático alemão, foi professor em Berlin por muitos anos. Figura central no desenvolvimento da Análise Matemática, sempre demonstrou preocupação com o rigor, tendo desenvolvido (mas não publicado) uma introdução ao sistema dos números reais. Fez importantes contribuições à Análise Real e Complexa, às Equações Diferenciais e ao Cálculo das Variações. Deu um exemplo de uma função contínua em toda a reta sem entretanto ser derivável em algum ponto.

Teorema 7.1 (Weierstrass)
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Este teorema nos diz que toda função contínua f, definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, assume pelo menos um valor mínimo $(f(x_1))$ e pelo menos um valor máximo $(f(x_2))$, como ilustramos na Figura 7.1.

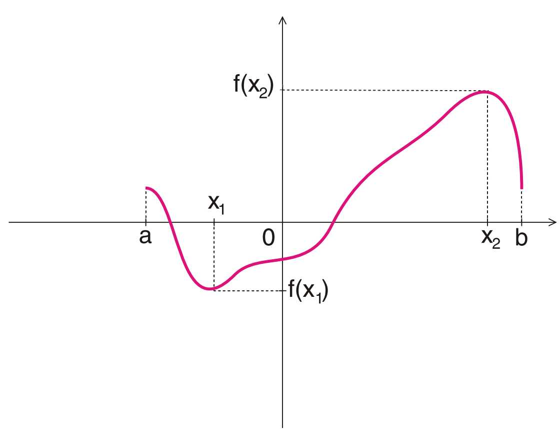


Figura 7.1

Assim, o conjunto $f([a, b]) = \{f(x); x \in [a, b]\}$, imagem de $[a, b]$ por f, está contido no intervalo $[m, M]$, onde $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ pertencem a $f([a, b])$.

O fato de f ser contínua em $[a,b]$ é essencial para a validade do Teorema 7.1. Realmente, a função $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=-x$ se $-1\le x\le 0$ e $f(x)=\frac{1}{x}$ se $0<x\le 1$, não é contínua em $[-1,1]$ (pois não é contínua em 0) e $f([-1,1])=[0,+\infty)$ (ver a Figura 5.7). Portanto, não existe $x_2\in[-1,1]$ tal que $f(x)\le f(x_2)$ para todo $x\in[-1,1]$.

Nos dois exemplos a seguir veremos que o fato de $[a,b]$ ser um intervalo fechado e limitado é essencial para a validade do Teorema 7.1.

Exemplo 7.1

Consideremos a função contínua $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{1}{x}$ para todo $x\in(0,1]$, cujo gráfico esboçamos na Figura 7.2.

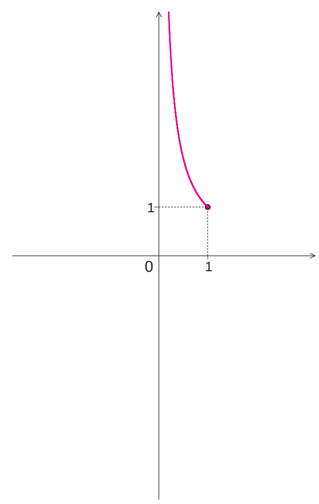


Figura 7.2

Como $f((0,1])=[1,+\infty)$, não existe $x_2\in(0,1]$ tal que $f(x)\le f(x_2)$ para todo $x\in(0,1]$. Notemos que, apesar de $(0,1]$ ser limitado, ele não é fechado.

Exemplo 7.2

Consideremos a função contínua $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x$ para todo $x\in(0,1)$, cujo gráfico esboçamos na Figura 7.3.

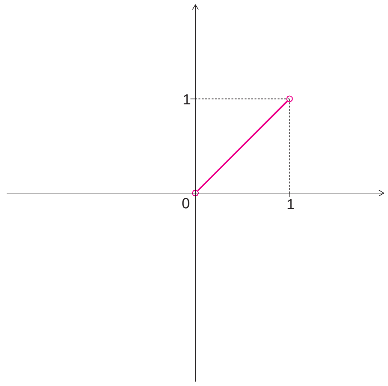


Figura 7.3

Como $f((0,1)) = (0,1)$, não existem $x_1, x_2 \in (0,1)$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in (0,1)$. Notemos que, apesar de $(0,1)$ ser limitado, ele não é fechado.

Vejamos uma aplicação do Teorema 7.1.

Exemplo 7.3

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$.

De fato, pelo Teorema 7.1 existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Como $f(x_1) > 0$, basta tomar $\alpha = f(x_1)$ para concluir a validade da nossa afirmação.

Enunciemos, agora, o segundo teorema.

Teorema 7.2 (teorema do valor intermediário)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e $f(a) < \gamma < f(b)$, existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = \gamma$.

Bernard Bolzano (1781-1848), tcheco de nascimento, foi professor de filosofia da religião em Praga, mas fez contribuições profundas à Matemática, entre elas o teorema do valor intermediário. Assim como Cauchy, foi um dos primeiros a introduzir um alto nível de rigor no estudo da Análise Matemática. Seu tratado sobre os paradoxos do infinito só foi publicado após a sua morte.

Como a continuidade de uma função arbitrária h equivale à continuidade de $-h$, o Teorema 7.2 seria equivalente àquele em que tivéssemos a condição $f(b) < \gamma < f(a)$ em lugar da condição $f(a) < \gamma < f(b)$ considerada.

Na Figura 7.4 apresentamos a interpretação geométrica do significado do teorema do valor intermediário.

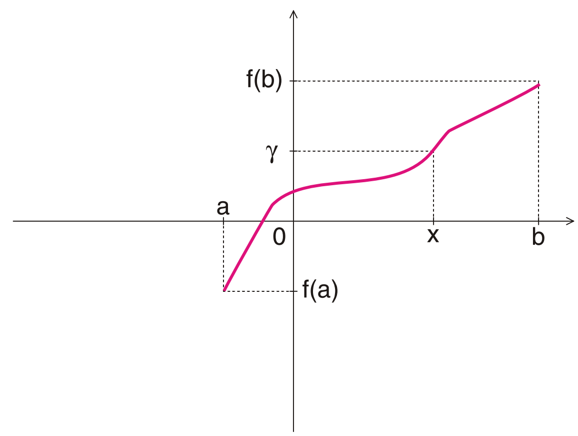


Figura 7.4

A continuidade de f é essencial para a validade do teorema do valor intermediário, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 7.4

Consideremos a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$ se $0 \leq x < \frac{1}{2}$ e $f(x) = 1$ se $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, cujo gráfico esboçamos na Figura 7.5.

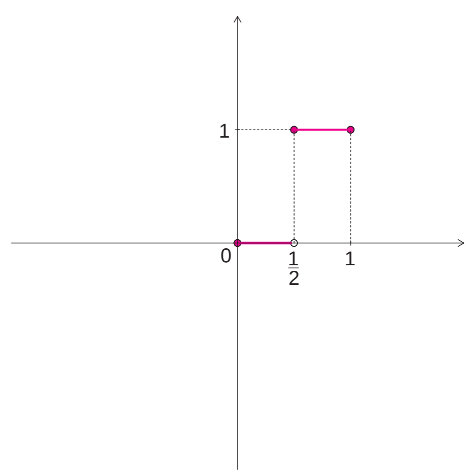


Figura 7.5

A função f não é contínua em [0,1], já que não é contínua em $\frac{1}{2}$. Se tomarmos qualquer número real γ, com $f(0) = 0 < \gamma < 1 = f(1)$, não é possível encontrar $x \in (0,1)$ tal que $f(x) = \gamma$. Isto significa que a conclusão do teorema do valor intermediário não é satisfeita pela função f.

Tomando $\gamma = 0$ no Teorema 7.2, obtemos o seguinte resultado:

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e $f(a) < 0 < f(b)$, existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = 0$.

Geometricamente, isto significa que se o ponto $(a, f(a))$ está abaixo do eixo das abcissas e o ponto $(b, f(b))$ está acima do eixo das abcissas, então o gráfico de f corta o eixo das abscissas pelo menos uma vez (ver a Figura 7.6).

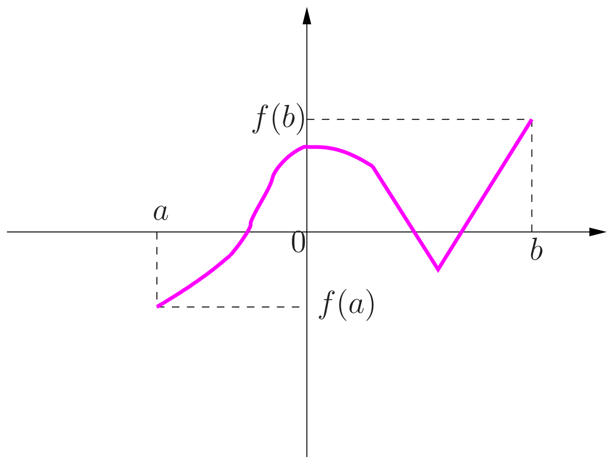


Figura 7.6

A bem da verdade, o resultado acima implica o Teorema 7.2 (e, portanto, é equivalente a ele), como passamos a explicar. Com efeito, sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e $f(a) < \gamma < f(b)$, e definamos $g(x) = f(x) - \gamma$ para todo $x \in [a,b]$; então g é contínua em $[a,b]$, como diferença de duas funções contínuas em $[a,b]$. Além disso, $g(a) = f(a) - \gamma < 0 < f(b) - \gamma = g(b)$. Podemos então aplicar o fato mencionado acima para garantir a existência de $x \in (a,b)$ tal que $g(x) = 0$. Mas $g(x) = 0$ equivale a $f(x) = \gamma$, provando assim o teorema do valor intermediário.

Exemplo 7.5

O polinômio $p(x) = x^3 + x - 1$ possui uma raiz no intervalo (0,1).

De fato, temos $p(0) = -1 < 0 < 1 = p(1)$. Como p é uma função contínua no intervalo [0,1], segue do teorema do valor intermediário que existe $x \in (0,1)$ tal que $p(x) = 0$.

Exemplo 7.6

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em [0,1] tal que $f(x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$. Então existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$, ou seja, f possui pelo menos um ponto fixo.

Um elemento x é dito um ponto fixo de uma função f se $f(x) = x$.

Geometricamente, isto significa que o gráfico de f e a reta $y = x$ se cortam pelo menos uma vez; ver a Figura 7.7.

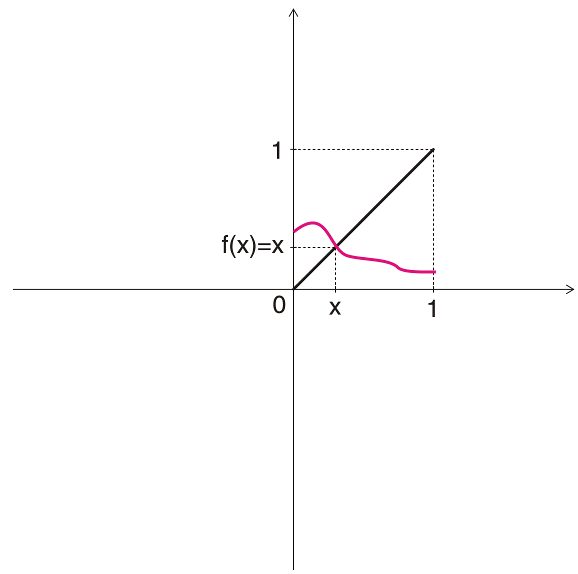


Figura 7.7

Vamos dividir a demonstração deste fato em dois casos:

1^0 caso: Se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, o resultado é claro, bastando tomar $x = 0$ ou $x = 1$.

2^0 caso: Suponhamos $f(0) \neq 0$ e $f(1) \neq 1$. Então, como $f(0) \geq 0$ e $f(1) \leq 1$, temos necessariamente $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Definamos $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - x$ para todo $x \in [0, 1]$. Então g é contínua em [0,1], como diferença de duas funções contínuas em [0,1]. Além disso,

$$g(1) = f(1) - 1 < 0 < f(0) - 0 = g(0).$$

Pelo teorema do valor intermediário, existe $x \in (0, 1)$ tal que $g(x) = 0$. Mas $g(x) = 0$ equivale a $f(x) = x$.

Um subconjunto I de $\mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, a seguinte propriedade é satisfeita: para quaisquer $x, y \in I$ com $x < y$ e para qualquer $z \in \mathbb{R}$ com $x < z < y$, tem-se $z \in I$.

Assim, em ambos os casos, existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. Isto prova a nossa afirmação.

Concluiremos esta aula com um comentário relevante. Consideremos um intervalo não trivial I de $\mathbb{R}$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Afirmamos que $f(I) = \{f(x); x \in I\}$ é um intervalo.

De fato, sejam $z, w \in f(I)$, com $z < w$, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $z < \gamma < w$. Como $z, w \in f(I)$, existem $x, y \in I$ tais que $f(x) = z$ e $f(y) = w$, sendo $x \neq y$. Para fixar as idéias, suponhamos $x < y$. Como a função f é contínua no intervalo $[x, y]$ e $f(x) < \gamma < f(y)$, o teorema do valor intermediário garante a existência de $t \in (x, y)$ tal que $f(t) = \gamma$. Como I é um intervalo,

$t \in I$; logo, $\gamma = f(t) \in f(I)$. Como z e w são elementos arbitrários de $f(I)$, acabamos de mostrar que $f(I)$ é um intervalo.

Finalmente, tomemos uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pelo teorema de Weierstrass, existem $m, M \in f([a, b])$ tais que $f([a, b]) \subset [m, M]$. Mas, pelo que acabamos de ver, $f([a, b])$ é um intervalo. Conseqüentemente, $f([a, b]) = [m, M]$.

Acabamos de mostrar que a imagem de um intervalo fechado e limitado por uma função contínua é forçosamente um intervalo fechado e limitado.

Resumo

Nesta aula você foi apresentado a dois resultados muito importantes: os teoremas de Weierstrass e do valor intermediário. Além disso, viu algumas conseqüências destes teoremas.

Exercícios

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Mostre que existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in [a, b]$.

   Sugestão: Use o teorema de Weierstrass.

2. Seja $T = \left\{ \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^4+1} \; ; \; x \in [-1, 2] \right\}$. Mostre que T é um intervalo fechado e limitado.

   Sugestão: Considere a função $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^4 + 1}$.

3. Mostre que o polinômio $x^5 + 3x - 2$ tem uma raiz no intervalo (0,1).

4. Mostre que existe $x \in (0, 1)$ tal que $x^5 = \dfrac{1}{x^4 + 2}$.

   Sugestão: Considere a função $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{x^4 + 2}$ definida no intervalo [0,1].

5. Mostre que existe $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.

   Sugestão:

   Considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$ definida no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

6. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua em [0,1] tal que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Mostre que existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$.

   Sugestão: Raciocine como no Exemplo 7.6.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você teve a oportunidade de perceber se entendeu o significado dos dois teoremas nela enunciados. Use as sugestões e consulte os tutores para dirimir as eventuais dúvidas.

Aula 8 – Limites no infinito. Assíntotas horizontais.

Referência: Aulas 34 e 40, de Pré-Cálculo, e aula 5.

Objetivo

Compreender o significado dos limites no infinito $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

No estudo das noções

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

o que realmente interessa são os valores $f(x)$ para x próximo de a.

Nesta aula estudaremos o comportamento de funções quando a variável x cresce indefinidamente ou quando a variável x decresce indefinidamente. Como sempre, iniciaremos com um exemplo.

Exemplo 8.1

Seja k um inteiro, com $k \geq 1$, e consideremos a função $f(x) = x^k$, definida para $x \in \mathbb{R}$.

Como $f(x) = x^{k-1}x \geq x$ para todo $x \geq 1$, pois $x^{k-1} \geq 1$ para todo $x \geq 1$, segue que $f(x)$ cresce indefinidamente à medida que x cresce indefinidamente.

Além disso, para k par, a função f é par (isto é, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Conseqüentemente, $f(x)$ cresce indefinidamente à medida que x decresce indefinidamente. E, para k ímpar, a função f é ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Conseqüentemente, $f(x)$ decresce indefinidamente à medida que x decresce indefinidamente. Na Figura 8.1 esboçamos o gráfico de f para $k = 1, 2, 3, 4$ e 5.

O que acabamos de observar no Exemplo 8.1 motiva a seguinte

Definição 8.1 Seja f uma função definida em $[d, +\infty)$. Diz-se que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ \Big(\text{respectivamente} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\Big)$$

se, para qualquer seqüência (x_n) de elementos de $[d, +\infty)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty \ \Big(\text{respectivamente} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty\Big).$$

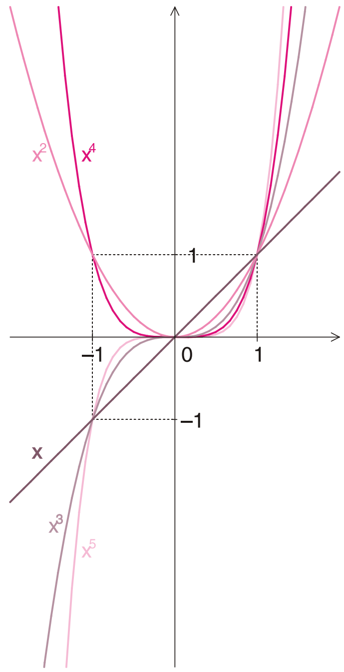


Figura 8.1

Exemplo 8.2

Seja k um inteiro positivo qualquer. Então

$$\lim_{x\to+\infty} cx^k = +\infty \text{ se } c>0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} cx^k = -\infty \text{ se } c<0.$$

Com efeito, seja (x_n) uma seqüência qualquer tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Como $x_n \geq 1$ a partir de um certo n, segue que ${x_n}^k \geq x_n$ a partir de um certo n, e daí resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^k = +\infty$. Conseqüentemente,

$$\lim_{n\to\infty} c{x_n}^k = +\infty \text{ se } c>0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} c{x_n}^k = -\infty \text{ se } c<0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} cx^k = +\infty \text{ se } c>0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} cx^k = -\infty \text{ se } c<0.$$

Em particular,

$$\lim_{x\to+\infty} 15x^9 = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} (-3x^{12}) = -\infty.$$

Definição 8.2 Seja f uma função definida em $(-\infty, d]$. Diz-se que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ \Big(\text{respectivamente } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\Big)$$

se, para qualquer seqüência (x_n) de elementos de $(-\infty, d]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty \ \Big(\text{respectivamente} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty\Big).$$

Exemplo 8.3

Seja k um inteiro positivo par. Então

$$\lim_{x\to-\infty} cx^k = +\infty \ \text{ se } \ c > 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to-\infty} cx^k = -\infty \ \text{ se } \ c < 0.$$

Realmente, neste caso a função $f(x) = cx^k$ é par para qualquer $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Portanto, a nossa afirmação decorre do Exemplo 8.2.

Em particular,

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^6 = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to-\infty} (-7x^4) = -\infty.$$

Exemplo 8.4

Seja k um inteiro positivo ímpar. Então

$$\lim_{x\to-\infty} cx^k = -\infty \ \text{ se } \ c > 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to-\infty} cx^k = +\infty \ \text{ se } \ c < 0.$$

Realmente, neste caso a função $f(x) = cx^k$ é ímpar para qualquer $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Portanto, a nossa afirmação decorre do Exemplo 8.2.

Em particular,

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2}x^3 = -\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to-\infty} (-9x^5) = +\infty.$$

Exemplo 8.5

Consideremos as funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$, ambas definidas para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

É intuitivo que tanto $f(x)$ quanto $g(x)$ se aproximam de zero à medida que x cresce indefinidamente ou à medida que x decresce indefinidamente, como se pode visualizar nos gráficos de f e g (ver as Figuras 5.4 e 5.5).

Estes fatos podem ser expressos da seguinte forma: para qualquer seqüência (x_n) de números não nulos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e para qualquer seqüência (y_n) de números não nulos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = 0.$$

O que acabamos de mencionar motiva as definições a seguir.

Definição 8.3 Seja f uma função definida em $[d, +\infty)$ e seja l um número real. Diz-se que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende a mais infinito é igual a l. Pode-se provar que l, caso exista, é único.

se, para qualquer seqüência (x_n) de elementos de $[d, +\infty)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Definição 8.4 Seja f uma função definida em $(-\infty, d]$ e seja l um número real. Diz-se que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende a menos infinito é igual a l. Pode-se provar que l, caso exista, é único.

se, para qualquer seqüência (x_n) de elementos de $(-\infty, d]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Exemplo 8.6

Seja k um inteiro positivo. Então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Justificaremos a primeira afirmação, deixando a segunda como exercício. Com efeito, seja (x_n) uma seqüência de números diferentes de zero tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Como $x_n \geq 1$ a partir de um certo n, segue que ${x_n}^k \geq x_n$ a partir de um certo n (valendo a igualdade quando $k = 1$). Usando então propriedades vistas na aula 5, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{{x_n}^k} = 0$. Como (x_n) é arbitrária, acabamos de verificar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

É possível mostrar que:

(a) Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty \text{ para } x > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty \text{ para } x < 0.$$

(b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty \text{ para } x > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty \text{ para } x < 0.$$

Exemplo 8.7

Seja $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio, onde $m \geq 1$ e $a_m \neq 0$. Então

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_m x^m.$$

Justifiquemos porque $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_m x^m$. Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos

$$p(x) = a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{x^m}\right).$$

Seja (x_n) uma seqüência arbitrária de números diferentes de zero tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x_n} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{{x_n}^{m-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{{x_n}^m} = 0,$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x_n} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{{x_n}^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{{x_n}^m}\right) = 1.$$

Suponhamos $a_m > 0$. Pelo Exemplo 8.2, $\lim\limits_{x\to+\infty} a_m {x_n}^m = +\infty$. Aplicando (a), obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = +\infty$. Como (x_n) é arbitrária, acabamos de mostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Usando o mesmo raciocínio, obtemos $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ se $a_m < 0$.

A justificativa do fato de que

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_m x^m$$

é completamente análoga, dependendo dos Exemplos 8.3 e 8.4 e de (b) (faça os detalhes).

Em particular,

$$\lim_{x\to+\infty} (-4x^3 + 100x^2 + 2) = \lim_{x\to+\infty} (-4x^3) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} (-2x^4 + 90x^3 - 1) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^4) = -\infty.$$

Exemplo 8.8

Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

onde m e n são inteiros positivos, $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$. Vamos estudar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos

$$f(x) = \frac{a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{x^m}\right)}{b_n x^n \left(1 + \frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n}\frac{1}{x^n}\right)}.$$

Como, em vista do Exemplo 8.6,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{x^m}\right) = 1$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n}\frac{1}{x^n}\right) = 1,$$

segue que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m}{b_n}\frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}.$$

Temos então três casos a considerar:

1^0 caso: $m > n$.

Neste caso, $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$ é um polinômio de grau $m - n > 1$, e recaímos nos Exemplos 8.2, 8.3 e 8.4.

2^0 caso: $m = n$.

Neste caso, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_m}{b_n}$.

3^0 caso: $m < n$

Neste caso, em vista do Exemplo 8.6, temos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5-7x^2}{x^4+50x+16} &= \lim_{x\to+\infty} 2x &= +\infty,\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-7x^2}{x^4+50x+16} &= \lim_{x\to-\infty} 2x &= -\infty,\\
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^6-10x}{2x^6+5x^2+30} &= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{200x^4+121x^3+14}{x^5+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{200}{x} = 0.$$

Diz-se que a reta horizontal $y = l$ é uma *assíntota horizontal ao gráfico de uma função* f, se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

Nesta aula, nos deparamos com vários exemplos em que aparecem assíntotas horizontais, como passamos a descrever.

Com efeito, pelo Exemplo 8.6, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ para todo inteiro positivo k e para todo $c \in \mathbb{R}$. Isto nos diz que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de todas as funções $f(x) = \frac{c}{x^k}$, sendo k um inteiro positivo arbitrário e c um número real arbitrário.

Vimos, no Exemplo 8.8, que para toda função racional f dada por $f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ (onde $m \geq 1$, $a_m \neq 0$ e $b_m \neq 0$), tem-se

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_m}.$$

Isto nos diz que a reta $y = \frac{a_m}{b_m}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f. Em particular, se $f(x) = \frac{5x^7-6x^4+1}{10x^7+9x^2-6x+5}$, então a reta $y = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

Vimos também, no Exemplo 8.8, que para toda função racional dada por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios de grau no mínimo 1 tais que o grau de $p(x)$ é menor do que o grau de $q(x)$, tem-se

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Isto nos diz que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de tais funções racionais. Em particular, se $f(x) = \frac{101x^2+1000x+1}{2x^3-1}$, então a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

No próximo exemplo o gráfico da função considerada possui duas assíntotas horizontais.

Exemplo 8.9

Consideremos a função $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, definida para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, e encontremos as assíntotas horizontais ao seu gráfico.

Para todo $x > 0$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$ (pois $\sqrt{x^2} = x$). Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$, segue que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{1} = 1$.

Por outro lado, para todo $x < 0$, $f(x) = -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$ (pois $\sqrt{x^2} = -x$). Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$, segue que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\sqrt{1} = -1$.

Podemos então concluir que as retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais ao gráfico de f.

Resumo

Nesta aula você estudou a noção de limite no infinito e entendeu quando a reta horizontal $y = l$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de uma função.

Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 - \frac{2}{x^3}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5+9x}{4x^5-50x^3}$; (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5+5x}{4x^5-50x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^7+500x}{x^8+1}$; (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^7+500x}{x^6-900x^3}$;

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^7+500x}{x^6-900x^3}$; (h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - 8}$;

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3-7}}$; (j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{9x^2+1}{x^2+50}}$;

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1}$; (m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$;

(n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+1})$; (o) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$;

(p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+1}$; (q) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x+1})$.

Sugestões:

Para (l): Para $x > -\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = \sqrt{\frac{x^2+2}{(2x+1)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+2}{4x^2+4x+1}}.$$

Para (n): Para $x \in \mathbb{R}$,

$$x - \sqrt{x^2+1} = \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}.$$

Para (o): Para $x \geq 0$,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Para (p): Para $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x}+2}{x+1} = \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Para (q): Para $x > 0$,

$$x - \sqrt{x+1} = \frac{(x - \sqrt{x+1})(x + \sqrt{x+1})}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x}}.$$

2. Determine os valores de α e β para que:

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2+1}{x+1} - \alpha x - \beta \right] = 0$;

   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2} = 1$.

3. Seja $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio de grau 3. Mostre que existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 0$.

   Sugestão: Suponha $a_3 > 0$. Então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $p(a) < 0 < p(b)$ (justifique esta afirmação). Use o teorema do valor intermediário para obter $x \in (a, b)$ tal que $p(x) = 0$ (justifique a aplicabilidade do teorema).

4. Decida se os gráficos das funções dos itens (a), (c), (e), (g), (i), (l), (n) e (p), do Exercício 1, possuem assíntotas horizontais, justificando a sua resposta.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula, os quais são fortemente baseados nos exemplos discutidos na mesma, você verificou se compreendeu as noções nela introduzidas. Cabe aqui mencionar que a referida compreensão é importante para o estudo do comportamento de funções, como você verá no decorrer do curso.

Aula 9 – Funções deriváveis.

Referências: Aulas 15 e 16, de Pré-Cálculo, e aulas 2, 3, 4 e 5.

Objetivos

Compreender a noção de função derivável.

Estudar a derivada de certas funções.

A noção de função derivável é uma das noções fundamentais da Matemática sendo, no contexto do nosso curso, a mais importante. Como você verá no módulo 2, ela se constitui em ferramenta indispensável para o estudo do comportamento de funções e do conseqüente esboço de seus gráficos, bem como para o estudo de máximos e mínimos de funções. Além disso, ela representa a velocidade de um movimento, como tornaremos claro na aula 14. Finalmente, a noção de função derivável está intimamente ligada àquela de função integrável, que será estudada na última parte do curso.

Antes de introduzir a noção de função derivável, façamos algumas considerações de caráter geométrico.

Fixemos um elemento x do domínio de uma função f e vamos discutir a seguinte pergunta: como achar a equação da reta r tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ (ver a Figura 9.1).

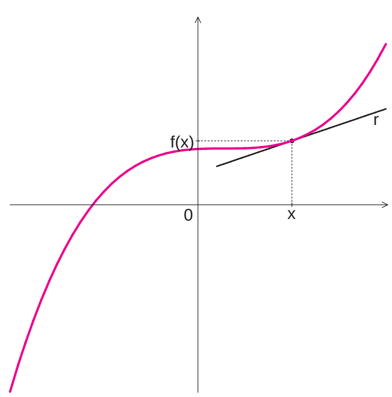


Figura 9.1

Para determinar esta equação, bastaria sabermos a inclinação de r, pois $(x, f(x))$ pertence a r. Como então poderíamos fazê-lo?

Para responder a esta nova pergunta, a cada elemento t do domínio de f, com $t \neq x$, associemos a reta s_t secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x, f(x))$ e $(t, f(t))$ (ver a Figura 9.2), cuja inclinação é $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$.

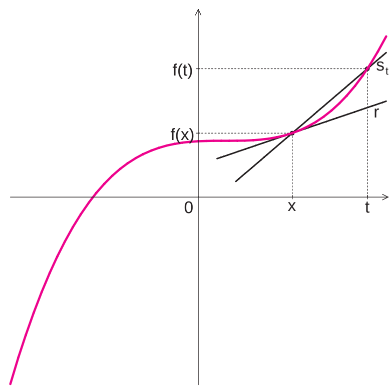


Figura 9.2

Notemos que, quando t se aproxima de x, as retas secantes s_t se aproximam da reta tangente r, cuja inclinação gostaríamos de encontrar. Como a inclinação de cada reta secante s_t é $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$, é natural se esperar que a inclinação de r seja $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$.

As considerações acima motivam as definições a seguir.

Definição 9.1 Sejam I um intervalo não trivial e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em $x \in I$. A *reta tangente ao gráfico de f em $(x, f(x))$* é:

(a) a reta que passa por $(x, f(x))$ cuja inclinação é $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$, caso este limite exista (lembrar a Definição 2.1),

ou

(b) a reta vertical $t = x$ (t variando em $\mathbb{R}$), caso $\lim\limits_{t\to x}\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| = +\infty$.

Se nem (a) nem (b) forem válidos, diz-se que *não existe reta tangente ao gráfico de f em $(x, f(x))$*.

Definição 9.2 Sejam I um intervalo não trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x \in I$. Diz-se que *f é derivável em x* se

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

existe. Neste caso, escrevemos

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

e dizemos que $f'(x)$ é a *derivada de f em x*.

Notemos que, como

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(pois podemos escrever $t=x+h$ ($h\neq 0$), e t tender a x equivale a h tender a zero), então

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Notemos ainda que, se x é o extremo inferior de I, $f'(x)=\lim\limits_{t\to x^+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$. Por outro lado, se x é o extremo superior de I, $f'(x)=\lim\limits_{t\to x^-}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$.

Finalmente, diz-se que f é *derivável em* I se f é derivável em todo $x\in I$.

Em vista das Definições 9.1 e 9.2 segue que, se f é derivável em $x\in I$, então a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x,f(x))$ é

$$y=f(x)+f'(x)(t-x).$$

Dada uma função $f:I\to\mathbb{R}$, seja $J=\{x\in I; f'(x)\text{existe}\}$. Fica então determinada uma função definida em J, dita a *derivada de* f e denotada por f', que a cada $x\in J$ associa a derivada de f em x, $f'(x)$.

Dedicaremos o restante desta aula a discutir a derivabilidade de certas funções.

Exemplo 9.1

Sejam $c\in\mathbb{R}$ e $f(x)=c$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (isto é, f é a função constante e igual a c) e estudemos a derivabilidade de f.

Seja $x\in\mathbb{R}$ arbitrário. Para todo $t\in\mathbb{R}$, $t\neq x$, temos

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=0.$$

Logo, $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=0$. Acabamos de mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Exemplo 9.2

Seja $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e estudemos a derivabilidade de f.

Seja $x\in\mathbb{R}$ arbitrário. Para todo $t\in\mathbb{R}$, $t\neq x$, temos

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\frac{t-x}{t-x}=1.$$

Logo, $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = 1$. Acabamos de mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9.3

Seja $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e estudemos a derivabilidade de f.

Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq x$, temos

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \frac{t^2-x^2}{t-x} = \frac{(t+x)(t-x)}{t-x} = t + x.$$

Logo, $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t \to x}(t+x) = 2x$. Acabamos de mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os Exemplos 9.2 e 9.3 são casos particulares do próximo exemplo.

Exemplo 9.4

Seja k um inteiro positivo e consideremos a função $f(x) = x^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos estudar a derivabilidade de f.

Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq x$, temos

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \frac{t^k - x^k}{t-x} = \frac{(t-x)\left(t^{k-1} + t^{k-2}x + \cdots + tx^{k-2} + x^{k-1}\right)}{t-x} =$$
$$= \underbrace{t^{k-1} + t^{k-2}x + \cdots + tx^{k-2} + x^{k-1}}_{k \text{ parcelas}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \\
&= \lim_{t \to x} \left(t^{k-1} + t^{k-2}x + \cdots + tx^{k-2} + x^{k-1}\right) = \\
&= \left(\lim_{t \to x} t^{k-1}\right) + x\left(\lim_{t \to x} t^{k-2}\right) + \cdots + x^{k-2}\left(\lim_{t \to x} t\right) + x^{k-1} = \\
&= x^{k-1} + x.x^{k-2} + \cdots + x^{k-2}.x + x^{k-1} = \\
&= \underbrace{x^{k-1} + x^{k-1} + \cdots + x^{k-1} + x^{k-1}}_{k \text{ parcelas}} = kx^{k-1}.
\end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = kx^{k-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x)) = (x, x^k)$ é
$$y = x^k + (kx^{k-1})(t - x).$$

Exemplo 9.5

Seja $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e estudemos a derivabilidade de f.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, temos
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{se } \ x < 0, \\ \ \ 1 & \text{se } \ x > 0. \end{cases}$$

Logo,
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Conseqüentemente, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ não existe, ou seja, f não é derivável em 0. Notemos, ainda, que não há reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$ (observe que o gráfico de f faz um "bico" no ponto (0,0); ver a Figura 9.3).

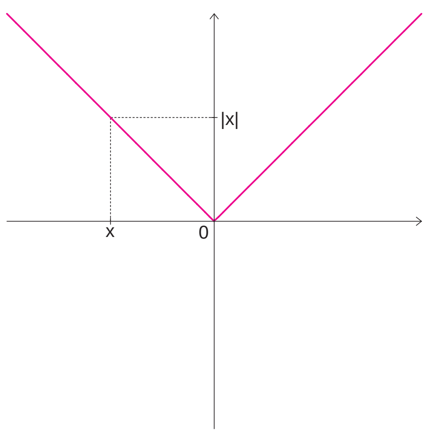


Figura 9.3

Por outro lado, como $f(x) = -x$ para todo $x < 0$, temos $f'(x) = -1$ para todo $x < 0$; e, como $f(x) = x$ para todo $x > 0$, temos $f'(x) = 1$ para todo $x > 0$.

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x)) = (x, |x|)$ é
$$y = -x - (t - x) \ \ \text{se} \ \ x < 0$$
e
$$y = x + (t - x) \ \ \text{se} \ \ x > 0.$$

Exemplo 9.6

Seja $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \geq 0$ e estudemos a derivabilidade de f.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

mostrando que f não é derivável em 0. Entretanto, há reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$, a saber, a reta vertical $x = 0$ (ver a Figura 9.4).

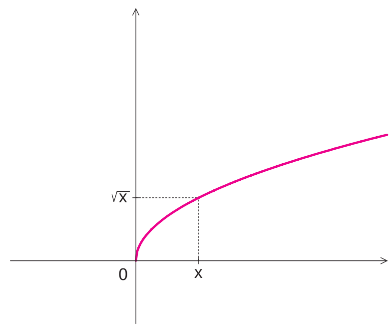


Figura 9.4

Isto mostra que, em geral, a existência de reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x, f(x))$ não implica que f seja derivável em x.

Vejamos, agora, que f é derivável em todo $x > 0$. De fato, fixemos $x > 0$. Para todo $t \geq 0$, $t \neq x$, temos

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{(\sqrt{t} - \sqrt{x})(\sqrt{t} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{x}}.$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \left(\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Em particular, se $x > 0$, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x)) = (x, \sqrt{x})$ é

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(t - x).$$

Exemplo 9.7

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e estudemos a derivabilidade de f.

Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Para todo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \\
&= \frac{(\operatorname{sen} h)(\cos x)+(\cos h)(\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen} x}{h} = \\
&= \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)+\operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right).
\end{aligned}$$

Mas, como $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ (Teorema 4.1) e $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$ (Exemplo 4.5), concluímos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\
&= \cos x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)+\operatorname{sen} x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\right) = \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x)) = (x, \operatorname{sen} x)$ é

$$y = \operatorname{sen} x + (\cos x)(t-x).$$

Exemplo 9.8

Seja $f(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e estudemos a derivabilidade de f.

Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Para todo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \\
&= \frac{(\cos h)(\cos x)-(\operatorname{sen} h)(\operatorname{sen} x)-\cos x}{h} = \\
&= \cos\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right).
\end{aligned}$$

Raciocinando como no exemplo anterior, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\operatorname{sen} x.$$

Acabamos de mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x)) = (x, \cos x)$ é

$$y = \cos x - (\operatorname{sen} x)(t - x).$$

Resumo

Nesta aula você foi apresentado à noção fundamental de função derivável e estudou a derivabilidade de certas funções.

Exercícios

1. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f em P para:

   a) $f(x) = x^5$ e $P = (2, f(2))$; b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $P = \left(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})\right)$;

   c) $f(x) = \cos x$ e $P = \left(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})\right)$; d) $f(x) = \sqrt{x}$ e $P = (8, f(8))$.

2. Seja $f(x) = x^3 - 7$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Use a definição de derivada para mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$.

3. Seja $f(x) = 3 + 2\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Use a definição de derivada para mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$.

4. Seja $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Use a definição de derivada para mostrar que f é derivável em $\mathbb{R}$.

   Sugestão: Fixe $x \in \mathbb{R}$. Para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq x$, tem-se

   $$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{t^2 - x^2}{t - x} + \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} x}{t - x}.$$

5. Seja $f(x) = \sqrt{x} + \cos x$ para todo $x \geq 0$. Use a definição para mostrar que $f'(x)$ existe para todo $x > 0$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f é derivável em 0 e $f'(0) = 0$.

   Sugestão: Para $t \neq 0$, tem-se

   $$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t^2 \cos\left(\dfrac{1}{t}\right)}{t} = t \cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

7. Seja a um número real arbitrário. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja derivável em todo $x \in \mathbb{R}$, exceto em $x = a$, mas que seja contínua em a.

   Sugestão: Inspire-se no Exemplo 9.5.

8. Seja $f(x) = \text{sen}\,(5x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 5\cos(5x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Sugestão: Fixe $x \in \mathbb{R}$. Para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq x$, tem-se

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{\text{sen}\,(5t) - \text{sen}\,(5x)}{t - x} = 5\,\frac{\text{sen}\,(5t) - \text{sen}\,(5x)}{5t - 5x}.$$

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$ se $x < 1$ e $f(x) = -2x + 4$ se $x \geq 1$. Mostre que f não é derivável em 1, apesar de ser contínua em 1.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2$ se $x < 1$ e $f(x) = 2x + 1$ se $x \geq 1$. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você percebeu se entendeu a noção de derivada. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos, já que praticamente tudo que veremos a seguir depende do conceito introduzido nesta aula.

Aula 10 – Propriedades de funções deriváveis.

Referências: Aulas 2, 3, 6 e 9.

Objetivos

Compreender porque toda função derivável é contínua.

Estudar certas propriedades de funções deriváveis, tais como: soma, produto e quociente.

Nesta aula prosseguiremos o estudo de funções deriváveis, iniciado na aula anterior, provando algumas propriedades destas funções. Primeiramente, provaremos que derivabilidade implica continuidade. Mais precisamente, temos a seguinte

Proposição 10.1
Sejam I um intervalo não trivial e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x \in I$. Então f é contínua em x.

Demonstração: Para todo $t \in I$, $t \neq x$, podemos escrever

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(t - x).$$

Como $\lim\limits_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$ e $\lim\limits_{t \to x}(t - x) = 0$, segue da Proposição 3.2 que

$$\lim_{t \to x}(f(t) - f(x)) = f'(x) \times 0 = 0.$$

Isto equivale a dizer que $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$ mostrando que f é contínua em x.

Vimos, no Exemplo 9.5, que a função $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ não é derivável em 0, apesar de ser contínua em 0. Isto mostra que a recíproca da Proposição 10.1 não é verdadeira em geral.

Passemos, agora, ao estudo de certas propriedades elementares de funções deriváveis.

Proposição 10.2
Sejam I um intervalo não trivial e $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $x \in I$. Então $f + g$ é derivável em x e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Demonstração: Para todo $t \in I$, $t \neq x$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(t)-(f+g)(x)}{t-x} &= \frac{f(t)+g(t)-f(x)-g(x)}{t-x} = \\ &= \frac{(f(t)-f(x))+(g(t)-g(x))}{t-x} = \\ &= \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \frac{g(t)-g(x)}{t-x}\ .\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$ e $\lim\limits_{t \to x} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} = g'(x)$, segue da Proposição 3.1 que

$$\lim_{t \to x} \frac{(f+g)(t)-(f+g)(x)}{t-x} = f'(x) + g'(x).$$

Isto mostra que $f+g$ é derivável em x e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, como havíamos afirmado.

Exemplo 10.1

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I e $c \in \mathbb{R}$, então a função $h : I \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) + c$ para todo $x \in I$, é derivável em I e $h'(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$.

De fato, definamos $g(x) = c$ para todo $x \in I$. É claro que $h = f + g$. Além disso, pelo Exemplo 9.1, g é derivável em I e $g'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Portanto, a nossa afirmação é conseqüência imediata da Proposição 10.2.

Exemplo 10.2

Seja k um inteiro positivo. Então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^k + \text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = kx^{k-1} + \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, definamos $f_1(x) = x^k$ e $f_2(x) = \text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; então $f = f_1 + f_2$. Pelo Exemplo 9.4, f_1 é derivável em $\mathbb{R}$ e ${f_1}'(x) = kx^{k-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e pelo Exemplo 9.7, f_2 é derivável em $\mathbb{R}$ e ${f_2}'(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 10.2, $f = f_1 + f_2$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = (f_1 + f_2)'(x) = {f_1}'(x) + {f_2}'(x) = kx^{k-1} + \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10.3

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = \cos x - \text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Realmente, basta argumentar como no exemplo anterior, tendo em vista os Exemplos 9.7 e 9.8 e a Proposição 10.2.

Proposição 10.3

Sejam I um intervalo não trivial e $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $x \in I$. Então fg é derivável em x e

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Demonstração: Para todo $t \in I$, $t \neq x$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(t) - (fg)(x)}{t - x} &= \frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t - x} = \\
&= \frac{f(t)g(t) - f(x)g(t) + f(x)g(t) - f(x)g(x)}{t - x} = \\
&= g(t)\Big(\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\Big) + f(x)\Big(\frac{g(t) - g(x)}{t - x}\Big).
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{t \to x} g(t) = g(x)$ pela Proposição 10.1, $\lim\limits_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$ e $\lim\limits_{t \to x} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} = g'(x)$, segue das Proposições 3.1 e 3.2 que

$$\lim_{t \to x} \frac{(fg)(t) - (fg)(x)}{t - x} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

Isto mostra que fg é derivável em x e $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, como havíamos afirmado.

Exemplo 10.4

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I e $c \in \mathbb{R}$, então a função $h : I \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = cf(x)$ para todo $x \in I$, é derivável em I e $h'(x) = cf'(x)$ para todo $x \in I$.

De fato, definamos $g(x) = c$ para todo $x \in I$. É claro que $h = fg$. Pelo Exemplo 9.1 e pela Proposição 10.3, h é derivável em I e

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = cf'(x)$$

para todo $x \in I$.

Como conseqüência do Exemplo 9.4, resulta que se $f(x) = cx^k$ (onde k é um inteiro positivo), então $f'(x) = ckx^{k-1}$.

Exemplo 10.5

Seja $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio. Pela Proposição 10.2 (e indução) e pelo que acabamos de ver, p é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e

$$p'(x) = ma_m x^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + \cdots + a_1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, se $p(x) = 7x^5 - 3x^4 + 9x^2 - 10x + 5$, então $p'(x) = 35x^4 - 12x^3 + 18x - 10$.

Exemplo 10.6

Seja k um inteiro positivo. Então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^k \text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = kx^{k-1}\text{sen}\, x + x^k \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, sejam $f_1(x) = x^k$ e $f_2(x) = \text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; então $f = f_1 f_2$. Pelos Exemplos 9.4 e 9.7 e pela Proposição 10.3, podemos afirmar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = {f_1}'(x)f_2(x) + f_1(x){f_2}'(x) = kx^{k-1}\text{sen}\, x + x^k \cos x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10.7

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (\text{sen}\, x)(\cos x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, sejam $g_1(x) = \text{sen}\, x$ e $g_2(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; então $f = g_1 g_2$. Pelos Exemplos 9.7 e 9.8 e pela Proposição 10.3, podemos afirmar que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= {g_1}'(x)g_2(x) + g_1(x){g_2}'(x) = \\ &= (\cos x)(\cos x) - (\text{sen}\, x)(\text{sen}\, x) = \\ &= \cos^2 x - \text{sen}^2 x \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10.8

Sejam k um inteiro positivo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em I e definamos $g : I \to \mathbb{R}$ por $g(x) = (f(x))^k$ para todo $x \in I$. Então g é derivável em I e $g'(x) = k(f(x))^{k-1} f'(x)$ para todo $x \in I$.

Verificaremos a afirmação para $k = 2$ e $k = 3$. A validade da afirmação para todo inteiro positivo k decorre da Proposição 10.3 e do princípio de indução finita.

Se $k = 2$, $g(x) = (f(x))^2 = f(x)f(x)$ para todo $x \in I$. Pela Proposição 10.3, g é derivável em I e

$$g'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

para todo $x \in I$.

Se $k = 3$, $g(x) = (f(x))^3 = (f(x))^2 f(x)$. Pelo que acabamos de ver e pela Proposição 10.3, g é derivável em I e

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x)f(x) + (f(x))^2 f'(x) = \\ &= 2(f(x))^2 f'(x) + (f(x))^2 f'(x) = \\ &= 3(f(x))^2 f'(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in I$.

Como conseqüência do Exemplo 10.8, obtemos:

Exemplo 10.9

Para todo inteiro positivo k, as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = (\text{sen } x)^k$ e $g(x) = (\cos x)^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, são deriváveis em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = k(\text{sen } x)^{k-1}(\cos x) \quad \text{e} \quad g'(x) = k(\cos x)^{k-1}(-\text{sen } x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 10.4

Sejam I um intervalo não trivial e $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $x \in I$ e suponhamos que $g(x) \neq 0$. Então a função $\frac{f}{g}$, definida para $t \in I$ próximo de x, é derivável em x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Demonstração: Inicialmente, do fato de g ser contínua em x (Proposição 10.1) e não se anular em x, resulta que existe um intervalo não trivial $J \subset I$ tal que $x \in J$ e $g(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Assim sendo, faz sentido considerar a função $\frac{f}{g}$ definida em J.

Para todo $t \in J$, $t \neq x$, temos:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{t-x} = \frac{\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{t-x} =$$

$$= \frac{1}{g(t)g(x)} \frac{f(t)g(x) - g(t)f(x)}{t-x} =$$

$$= \frac{1}{g(t)g(x)} \frac{f(t)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(t)f(x)}{t-x} =$$

$$= \frac{1}{g(t)g(x)} \left[g(x) \left(\frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right) - f(x) \left(\frac{g(t) - g(x)}{t-x} \right) \right].$$

Como $\lim\limits_{t \to x} g(t) = g(x)$ (Proposição 10.1),

$$\lim_{t \to x} g(t)g(x) = g(x)g(x) = (g(x))^2 .$$

Pelas Proposições 3.1, 3.2 e 3.3, obtemos

$$\lim_{t \to x} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{t-x} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t \to x} g(t)g(x)} \left[g(x) \left(\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right) - f(x) \left(\lim_{t \to x} \frac{g(t) - g(x)}{t-x} \right) \right] =$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Isto mostra que $\frac{f}{g}$ é derivável em x e $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, como havíamos afirmado.

No caso particular em que f é a função constante e igual a 1, a Proposição 10.4 fornece

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Exemplo 10.10

Seja $f(x) = \frac{1}{x^4+2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e calculemos $f'(x)$.

Com efeito, como $x^4 + 2 \geq 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue do Exemplo 10.5 e da Proposição 10.4 que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10.11

Seja $f(x) = \frac{\cos^3 x}{x^2+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e calculemos $f'(x)$.

Com efeito, como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue dos Exemplos 10.5 e 10.9 e da Proposição 10.4 que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \frac{3(\cos^2 x)(-\mathrm{sen}\ x)(x^2+1) - (\cos^3 x)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10.12

Seja $f(x) = \frac{x^7 - 9x^4}{x^2-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e calculemos $f'(x)$.

Realmente, raciocinando como nos dois exemplos anteriores concluímos que f é derivável em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e

$$f'(x) = \frac{(7x^6 - 36x^3)(x^2-1) - 2x(x^7 - 9x^4)}{(x^2-1)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Exemplo 10.13

Seja $f(x) = \mathrm{tg}\ x$, definida para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Calculemos $f'(x)$.

Como $f(x) = \frac{\mathrm{sen}\ x}{\cos x}$, podemos raciocinar como nos exemplos acima para garantir que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\mathrm{sen}\ x)(-\mathrm{sen}\ x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Acabamos de mostrar que a função tangente é derivável, tendo por derivada o quadrado da função secante.

Para concluir esta aula, observemos que os domínios das funções dos Exemplos 10.12 e 10.13 não são intervalos, mas uniões de intervalos. Entretanto, como a derivabilidade de uma função em um ponto é uma propriedade local, para cada elemento do domínio destas funções podemos nos restringir ao intervalo que o contém. Assim sendo, as afirmações feitas nos Exemplos 10.12 e 10.13 são justificáveis a partir do que foi visto nesta aula.

Resumo

Nesta aula você aprendeu que toda função derivável é contínua, bem como algumas propriedades elementares de funções deriváveis.

Exercícios

1. Ache as derivadas das funções *cotangente, secante e cossecante.*

2. Assuma que, se $g : I \to \mathbb{R}$ é derivável em $x \in I$ e $g(x) \neq 0$, então $\frac{1}{g}$ é derivável em x e $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$, para obter a Proposição 10.4.

   Sugestão: Use a Proposição 10.3.

3. Para cada inteiro negatico k, mostre que a função $f(x) = x^k$ é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = kx^{k-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

4. Para cada uma das funções abaixo, encontre os pontos x para os quais $f'(x)$ existe e forneça $f'(x)$.

   (a) $f(x) = x^2 + x + 1 + \sqrt{x}$;

   (b) $f(x) = -7x^9 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$;

   (c) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{7}{x^4}$;

   (d) $f(x) = (1 - x^6)\sqrt{x}$;

   (e) $f(x) = (x^{-3} - 2x^{-2} + 7)\text{tg}^2 x$;

   (f) $f(x) = (\sqrt{x})^3 \text{sen}^4 x$;

   (g) $f(x) = \dfrac{x \cos x}{\text{sen}^2 x + 1}$;

   (h) $f(x) = \dfrac{x \cos x}{\text{sen}^2 x - 1}$;

   (i) $f(x) = \dfrac{\text{cotg } x}{x^2 + 1}$;

   (j) $f(x) = \dfrac{(x^6 - 7x^2)\text{sen}^2 x}{x^3 - 1}$;

   (l) $f(x) = 10\sqrt{x}\text{sen } (2x) - \dfrac{(3x^5 + 9x)\cos^3 x}{x^4 + 2}$;

   (m) $f(x) = \dfrac{8\sqrt{x}}{x \cos x}$;

   (n) $f(x) = \text{sen } x - 6\text{cosec } x$;

   (o) $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen } x - \cos x}$;

   (p) $f(x) = \dfrac{(x^2 + x + 1)\text{sen }^2 x + \sqrt{x}\cos^3 x}{x^5 - 2}$.

5. A reta tangente ao gráfico de $f(x) = (x^3 + 2x + 11)\sqrt{x}$ no ponto (1,14) é paralela à reta $y - 12x - 1 = 0$? Justifique a sua resposta.

6. Determine os valores de α e β para que os gráficos das funções $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta \text{ sen}^2 x$ e $g(x) = \frac{5\pi x}{x + \cos x}$ tenham a mesma reta tangente no ponto $P = \left(\frac{\pi}{2}, 5\pi\right)$.

7. Sejam $f_1, f_2, f_3 : I \to \mathbb{R}$ três funções deriváveis em $x \in I$. Mostre que $f_1 + f_2 + f_3$ e $f_1 f_2 f_3$ são deriváveis em x e forneça $(f_1 + f_2 + f_3)'(x)$ e $(f_1 f_2 f_3)'(x)$.

8. (a) Mostre que a função $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$ é derivável em zero (note que a Proposição 10.3 não pode ser usada, pois a função módulo não é derivável em zero).

   (b) Mostre que (a) permanece verdadeiro para qualquer função f definida em um intervalo aberto I contendo 0 por $f(x) = |x|\, g(x)$ para todo $x \in I$, onde $g : I \to \mathbb{R}$ é contínua em 0 e $g(0) = 0$.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você usou propriedades de funções deriváveis para testar sua habilidade no cálculo de derivadas. Caso tenha sentido dificuldades, releia a aula com atenção e depois volte aos exercícios. Se persistirem as dúvidas, não hesite em consultar os tutores.

Aula 11 – Exercícios resolvidos.

Referências: Aulas 1 a 10.

Objetivo

Amadurecer os conceitos e resultados vistos até a aula 10 por meio de exercícios resolvidos.

Exercício 1 (Exercício 5, da aula 1): Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0.$$

Solução: Primeiramente, notemos que

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leq \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}}_{n \text{ parcelas}}=\frac{n}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$$

para todo $n \geq 1$.

Seja $r>0$ arbitrário. Pela propriedade arquimediana, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{m}<r$. Portanto, para todo inteiro $n \geq m$, temos

$$-r<0<\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{m}<r.$$

Isto mostra que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0.$$

Exercício 2: (a) Seja (x_n) uma seqüência tal que $x_n \geq 0$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Mostre que $x \geq 0$.

(b) Sejam (x_n) e (y_n) duas seqüências tais que $x_n \geq y_n$ para todo n, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Mostre que $x \geq y$.

(c) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $r>0$, $f,g : D=(a-r,a)\cup(a,a+r)\to\mathbb{R}$ tais que $f(x)\geq g(x)$ para todo $x \in D$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$. Mostre que $l_1 \geq l_2$.

Solução: (a) Suponhamos $x<0$, e tomemos um intervalo aberto I contendo x tal que $I\subset\{t\in\mathbb{R}; t<0\}$ (por exemplo, $I=\left(x-\frac{|x|}{2}, x+\frac{|x|}{2}\right)=\left(\frac{3x}{2},\frac{x}{2}\right)$ serviria). Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n \in I$ para todo $n \geq m$. Daí resulta que $x_n < 0$ para todo $n \geq m$, o que é absurdo. Portanto, $x \geq 0$.

(b) Como $x_n - y_n \geq 0$ para todo n e $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$, segue de (a) que $x - y \geq 0$, ou seja, $x \geq y$.

(c) Seja (x_n) uma seqüência de elementos de D tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Como $f(x_n) \geq g(x_n)$ para todo n, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ (pois $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$) e $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l_2$ (pois $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$), segue de (b) que $l_1 \geq l_2$.

Exercício 3: (Desafio, da aula 2): Sejam (x_n) e (y_n) duas seqüências tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e existe $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M$ para todo n. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Solução: Com efeito, seja $r > 0$ arbitrário. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $|x_n| < \frac{r}{M}$ para todo $n \geq m$. Logo,

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{r}{M}.M = r$$

para todo $n \geq m$. Isto prova que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Exercício 4: Mostre que não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista, sendo $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 7x + 5\alpha^2$ se $x < 0$ e $f(x) = \alpha^3|x| + (\alpha - 1)(\operatorname{sen} x) - 1$ se $x > 0$.

Solução: Para que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista, é necessário e suficiente que $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existam e sejam iguais. Ora,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(x^2 - 7x + 5\alpha^2) = \\
&= \Big(\lim_{x\to 0^-} x^2\Big) - 7\Big(\lim_{x\to 0^-} x\Big) + \Big(\lim_{x\to 0^-} 5\alpha^2\Big) = \\
&= 5\alpha^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}(\alpha^3|x| + (\alpha - 1)(\operatorname{sen} x) - 1) = \\
&= \alpha^3\Big(\lim_{x\to 0^+} |x|\Big) + (\alpha - 1)\Big(\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\Big) + \Big(\lim_{x\to 0^+} -1\Big) = -1.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existem. Entretanto, como $\alpha^2 \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que $5\alpha^2 \neq -1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Ou, em outras palavras, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Isto prova o desejado.

Exercício 5: Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\text{tg}\,x}-\sqrt{1+\text{sen}\,x}}{x^3} = \frac{1}{4}$.

Solução: Para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+\text{tg}\,x}-\sqrt{1+\text{sen}\,x}}{x^3} = \\
= \quad &\frac{(\sqrt{1+\text{tg}\,x}-\sqrt{1+\text{sen}\,x})(\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x})}{x^3(\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x})} = \\
= \quad &\frac{\text{tg}\,x-\text{sen}\,x}{x^3(\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x})} = \\
= \quad &\frac{\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}-\text{sen}\,x}{x^3(\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x})} = \\
= \quad &\frac{(\text{sen}\,x)(1-\cos x)}{x^3(\cos x)(\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x})} = \\
= \quad &\frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x}}.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+\text{tg}\,x}+\sqrt{1+\text{sen}\,x})} = \frac{1}{2},$$

segue que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\text{tg}\,x}-\sqrt{1+\text{sen}\,x}}{x^3} = 1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ .$$

Exercício 6: Mostre que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(\text{sen}\ \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}\right)\right) = 0.$$

Solução: Para todo $x > 0$, temos:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}.$$

Como $\left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right| \le 1$ para todo $x > 0$ e

$$\lim_{x\to 0^+} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}\right) = \text{sen}\, 0 = 0,$$

segue que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(\text{sen}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}\right)\right) = 0.$$

Exercício 7: Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e defina $f(x) = \frac{\alpha x^2+\alpha x-\beta x-x+4}{x}$ para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(a) Determine α e β para que a reta $y = 3$ seja uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

(b) Com os valores de α e β encontrados em (a), existe assíntota vertical ao gráfico de f? Justifique a sua resposta.

Solução: (a) Para que a reta $y = 3$ seja uma assintota horizontal ao gráfico de f devemos ter

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

Mas, para que isto ocorra, α só pode ser zero.

Realmente, se $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e, se $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Logo, basta encontrar β para que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-\beta-1)x+4}{x} = 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(-\beta-1)x+4}{x} = 3.$$

Mas, como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(-\beta-1)x+4}{x} = -\beta-1$, devemos ter $-\beta-1 = 3$, isto é, $\beta = -4$.

Em resumo, se $\alpha = 0$ e $\beta = -4$, a reta $y = 3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

(b) Fazendo $\alpha = 0$ e $\beta = -4$, obtemos $f(x) = \frac{3x+4}{x}$.

Portanto, para que uma reta vertical $x = a$ seja uma assíntota vertical ao gráfico de f, devemos ter

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$$

Ora, se $a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{3x+4}{x} = \frac{3a+4}{a}$. Resta então decidir se a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f. Mas, como

$$f(x) = \frac{3x+4}{x} = \frac{\frac{3x+4}{x}}{\frac{x}{x}} = 3 + \frac{4}{x}$$

para todo $x \neq 0$, temos:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(3 + \frac{4}{x}\right) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(3 + \frac{4}{x}\right) = +\infty.$$

Conseqüentemente, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Exercício 8: Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e defina $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ por $f(-3) = \alpha$, $f(x) = \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}$ se $-3 < x < 3$ e $f(3) = \beta$. Determine α e β para que f seja contínua em $[-3, 3]$.

Solução: Primeiramente, notemos que $4-\sqrt{x^2+7} > 0$ para todo $-3 < x < 3$. Realmente, se $-3 < x < 3$, $0 \leq x^2 < 9$; logo, $7 \leq x^2 + 7 < 9 + 7 = 16$, o que implica $\sqrt{x^2+7} < \sqrt{16} = 4$. Como as funções $g_1(x) = 9 - x^2$ e $g_2(x) = 4 - \sqrt{x^2+7}$ são contínuas em $(-3, 3)$ e $g_2(x) > 0$ para todo $x \in (-3, 3)$, então f é contínua em $(-3, 3)$.

Para que f seja contínua em -3 devemos ter $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = \alpha$. Mas, como f está definida em $[-3, 3]$, isto equivale a dizer que $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x) = \alpha$.

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(-3)^+} f(x) &= \lim_{x\to(-3)^+} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \\
&= \lim_{x\to(-3)^+} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(4-\sqrt{x^2+7})(4+\sqrt{x^2+7})} = \\
&= \lim_{x\to(-3)^+} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{9-x^2} = \\
&= \lim_{x\to(-3)^+} (4+\sqrt{x^2+7}) = 8,
\end{aligned}$$

concluímos que $\alpha = 8$.

Analogamente, para que f seja contínua em 3 devemos ter $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = \beta$. Raciocinando como acima concluímos que $\beta = 8$.

Exercício 9: Seja $f(x) = x|x-1|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine o conjunto dos pontos onde f é derivável e forneça o valor de $f'(x)$ para x neste conjunto.

Solução: Para todo $x \in (-\infty, 1)$, $|x-1| = 1-x$, pois $x-1 < 0$. Logo, $f(x) = x(1-x) = x - x^2$ para todo $x \in (-\infty, 1)$. Portanto, f é derivável em $(-\infty, 1)$ e $f'(x) = 1-2x$ para todo $x \in (-\infty, 1)$. Por outro lado, para todo $x \in (1, +\infty)$, $|x-1| = x-1$, pois $x-1 > 0$. Logo, $f(x) = x(x-1) = x^2 - x$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Portanto, f é derivável em $(1, +\infty)$ e $f'(x) = 2x-1$ para todo $x \in (1, +\infty)$.

Resta-nos agora estudar a derivabilidade de f em 1. Para isto, devemos decidir se $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe.

Ora,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x-x^2}{x-1} = \\
&= \lim_{x \to 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} (-x) = -1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = \\
&= \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} x = 1.
\end{aligned}$$

Daí resulta que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ não existe, mostrando que f não é derivável em 0.

Em resumo, f é derivável em $(-\infty, 1) \bigcup (1, +\infty)$, sendo $f'(x) = 1-2x$ se $x \in (-\infty, 1)$ e $f'(x) = 2x-1$ se $x \in (1, +\infty)$.

Exercício 10: Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ se $x \in (-\infty, 2]$ e $f(x) = \sqrt{x+2}$ se $x \in (2, +\infty)$. Determine α e β para que f seja derivável em 2.

Solução: Primeiramente, como a derivabilidade de f em 2 implica a continuidade de f em 2, devemos ter $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 8\alpha + 4\beta$. Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{x+2} = \sqrt{4} = 2$, a igualdade $f(2) = 8\alpha + 4\beta = 2$ precisa ser verdadeira.

Para que $f'(2)$ exista, os limites laterais

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

devem existir e ser iguais.

Ora,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{(\alpha x^3+\beta x^2)-(8\alpha+4\beta)}{x-2} = \\
&= \lim_{x\to 2^-} \alpha \left(\frac{x^3-8}{x-2}\right) + \lim_{x\to 2^-} \beta \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \\
&= \alpha \left(\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{x-2}\right) + \beta \left(\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}\right) = \\
&= 12\alpha + 4\beta
\end{aligned}$$

(justifique a última igualdade a partir do que você já sabe sobre derivada) e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+2}-2)}{(\sqrt{x+2}+2)(x-2)} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(\sqrt{x+2}+2)(x-2)} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade $12\alpha + 4\beta = \frac{1}{4}$ precisa ser verdadeira.

Em resumo, as igualdades $8\alpha + 4\beta = 2$ e $12\alpha + 4\beta = \frac{1}{4}$ devem ser satisfeitas. Mas, para que isto ocorra, só podemos ter $\alpha = -\frac{7}{16}$ e $\beta = \frac{11}{8}$ (justifique esta afirmação).

Resumo

Nesta aula você viu como resolver determinados exercícios usando o que aprendeu até agora. Esperamos que ela possa incentivá-lo a retornar aos exercícios que, porventura, ainda não tenha resolvido.

Aula 12 – A regra da cadeia.

Referências: Aulas 9 e 10.

Objetivo

Compreender como calcular a derivada da composta de funções deriváveis.

Vimos, na aula 6, que a composta de funções contínuas é uma função contínua. Nesta aula estudaremos um resultado análogo para funções deriváveis, a regra da cadeia. Antes, vejamos três exemplos.

Exemplo 12.1

Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}},$$

sendo $x^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 > 0$. Como $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{2}{3}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$. Assim, f não é derivável em 0.

Suponhamos, agora, $x \neq 0$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq x$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{f(t) - f(x)}{t - x} &= \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{t - x} = \\
&= \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to x}(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) &= \left(\lim_{t\to x}\sqrt[3]{t^2}\right) + \left(\lim_{t\to x}\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x}\right) + \left(\lim_{t\to x}\sqrt[3]{x^2}\right) = \\
&= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\left(\lim_{t\to x}\sqrt[3]{t}\right) + \sqrt[3]{x^2} = \\
&= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = \\
&= 3\sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{2}{3}} \neq 0\ ,
\end{aligned}$$

segue que

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,.$$

Acabamos de mostrar que f é derivável em x e $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$.

Raciocinando como acima, obtemos:

Exemplo 12.2

Seja k um inteiro positivo par e definamos $f(x)=\sqrt[k]{x}$ para todo $x\geq 0$. Então f é derivável em $(0,+\infty)$ e $f'(x)=\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$ para todo $x\in(0,+\infty)$.

Em particular, se $f(x)=\sqrt[4]{x}$, então $f'(x)=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ para todo $x\in(0,+\infty)$.

Exemplo 12.3

Seja k um inteiro positivo ímpar, $k>1$, e definamos $f(x)=\sqrt[k]{x}$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}-\{0\}$ e $f'(x)=\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$ para todo $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Em particular, se $f(x)=\sqrt[5]{x}$, então $f'(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ para todo $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Proposição 12.1 (regra da cadeia)

Sejam I e J dois intervalos não triviais, $f:I\to\mathbb{R}$ derivável em $x\in I$ e $g:J\to\mathbb{R}$ tal que $f(t)\in J$ para todo $t\in I$ e g é derivável em $f(x)$. Então a função composta $g\circ f$ é derivável em x e

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\,f'(x).$$

A demonstração da regra da cadeia será vista na disciplina de Análise.

Como a demonstração da proposição é delicada, não a apresentamos aqui. Faremos a demonstração supondo a seguinte condição adicional satisfeita (o que nem sempre ocorre):

Existe um intervalo não trivial $I'\subset I$ tal que $x\in I'$ e $f(t)\neq f(x)$ para todo $t\in I'$, $t\neq x$.

Para todo $t\in I'$, $t\neq x$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(t)-(g\circ f)(x)}{t-x} &= \frac{g(f(t))-g(f(x))}{t-x}=\\ &= \frac{g(f(t))-g(f(x))}{f(t)-f(x)}\cdot\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\end{aligned}$$

pois estamos admitindo $f(t) - f(x) \neq 0$ se $t \in I'$ e $t \neq x$. Por outro lado, como f é contínua em x (Proposição 10.1), $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$. Logo,

$$\lim_{t \to x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{f(t) - f(x)} = g'(f(x)),$$

pois g é derivável em $f(x)$. Como

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x),$$

pois f é derivável em x, segue da Proposição 3.2 que

$$\lim_{t \to x} \frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(x)}{t - x} = g'(f(x))f'(x)\ .$$

Isto mostra que $g \circ f$ é derivável em x e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Exemplo 12.4

Seja p um polinômio arbitrário e consideremos a função $f(x) = \text{sen}\,(p(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = p'(x)\cos(p(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, já sabemos que p é derivável em $\mathbb{R}$ e que a função $f_1(x) = \text{sen}\,x$ é derivável em $\mathbb{R}$ e ${f_1}'(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f = f_1 \circ p$, segue da regra da cadeia que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = (f_1 \circ p)'(x) = {f_1}'(p(x))p'(x) = p'(x)\cos(p(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, se $f(x) = \text{sen}(5x^6 - 4x + 2)$, então

$$f'(x) = (30x^5 - 4)\cos(5x^6 - 4x + 2)\ .$$

Analogamente, temos :

Exemplo 12.5

Seja p um polinômio arbitrário e consideremos a função $f(x) = \cos(p(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = -p'(x)\text{sen}(p(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (faça os detalhes).

Em particular, se $f(x) = \cos(9x^4 + 2x^3 + 6x^2)$, então

$$f'(x) = -(36x^3 + 6x^2 + 12x)\ \text{sen}\ (9x^4 + 2x^3 + 6x^2).$$

Exemplo 12.6

Seja $f(x) = \text{sen}(\cos x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = (-\text{sen } x)\cos(\cos x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, sejam $f_1(x) = \cos x$ e $f_2(x) = \text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; então $f = f_2 \circ f_1$. Pela regra da cadeia, f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_2 \circ f_1)'(x) = \\ &= {f_2}'(f_1(x)){f_1}'(x) = \\ &= ({f_2}'(\cos x))\,(-\text{sen}\, x) = \\ &= (-\text{sen}\, x)\cos(\cos x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular, $f'(\frac{\pi}{2}) = \big(-\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\big)\cos\big(\cos\frac{\pi}{2}\big) = -\cos 0 = -1$.

Analogamente, temos :

Exemplo 12.7

Seja $f(x) = \cos(\text{sen}\, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = -(\cos x)\text{sen}\,(\text{sen}\, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (faça os detalhes).

Em particular, $f'(\frac{\pi}{2}) = -\big(\cos\frac{\pi}{2}\big)\,\text{sen}\big(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\big) = 0$.

Exemplo 12.8

Seja $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Com efeito, sejam $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Então $f = f_2 \circ f_1$, pois $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x^2) = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Já sabemos que f_1 é derivável em $\mathbb{R}$ e ${f_1}'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que f_2 é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e ${f_2}'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Pela regra da cadeia, f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ (note que $f_1(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$) e

$$\begin{aligned} f'(x) &= {f_2}'(f_1(x)){f_1}'(x) = \\ &= \frac{1}{3}(x^2)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \\ &= \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}.x = \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}+1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 12.9

Seja $f(x) = x^{-\frac{4}{5}}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Então f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Com efeito, sejam $f_1(x) = x^{-4}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f_2(x) = x^{\frac{1}{5}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$; então $f = f_2 \circ f_1$. Já sabemos que f_1 é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e ${f_1}'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Exercício 3, da aula 10) e que f_2 é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e ${f_2}'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Pela regra da cadeia, f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= {f_2}'(f_1(x)){f_1}'(x) = \\ &= \frac{1}{5}(x^{-4})^{-\frac{4}{5}}(-4x^{-5}) = \\ &= -\frac{4}{5}x^{\frac{16}{5}}.x^{-5} = \\ &= -\frac{4}{5}x^{\frac{16}{5}-\frac{25}{5}} = \\ &= -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} = \\ &= -\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}-1} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Em geral, se considerarmos a função $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ (onde p e q são inteiros não nulos), podemos garantir que f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Além disso, para certos valores de p e q, podemos até mesmo garantir que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 12.10

Seja $f(x) = \cos\left(\frac{\text{sen } x}{x^2+1}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -\left(\text{sen }\left(\frac{\text{sen } x}{x^2+1}\right)\right)\left(\frac{(\cos x)(x^2+1) - (\text{sen } x)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, sejam $f_1(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x^2+1}$ e $f_2(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; então $f = f_2 \circ f_1$. Já sabemos que f_2 é derivável em $\mathbb{R}$ e ${f_2}'(x) = -\text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. E, pela Proposição 10.4, f_1 é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$ {f_1}'(x) = \frac{(\cos x)(x^2+1) - (\text{sen}\, x)(2x)}{(x^2+1)^2} $$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela regra da cadeia, f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (f_2 \circ f_1)'(x) = \\
&= {f_2}'(f_1(x)){f_1}'(x) = \\
&= {f_2}'\left(\frac{\text{sen}\, x}{x^2+1}\right)\left(\frac{(\cos x)(x^2+1) - (\text{sen}\, x)(2x)}{(x^2+1)^2}\right) = \\
&= -\left(\text{sen}\left(\frac{\text{sen}\, x}{x^2+1}\right)\right)\left(\frac{(\cos x)(x^2+1) - (\text{sen}\, x)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 12.11

Seja $f(x) = (x^6 - 2x^5)^2 \text{tg}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$ f'(x) = 2(x^6 - 2x^5)(6x^5 - 10x^4)\text{tg}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 2x\left(\frac{x^6 - 2x^5}{x^2+1}\right)^2 \sec^2\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) $$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Primeiramente, como $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1 < \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então a função $f_2(x) = \text{tg}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, f_2 é derivável (como composta de duas funções deriváveis) e

$$
\begin{aligned}
{f_2}'(x) &= \sec^2\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\left(\frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2}\right) = \\
&= \frac{2x}{(x^2+1)^2}\sec^2\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, a função $f_1(x) = (x^6 - 2x^5)^2$ é derivável e ${f_1}'(x) = 2(x^6 - 2x^5)(6x^5 - 10x^4)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (justifique esta afirmação).

Portanto, como $f = f_1 f_2$, segue da Proposição 10.3 que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = {f_1}'(x)f_2(x) + f_1(x){f_2}'(x) =$$

$$= 2(x^6 - 2x^5)(6x^5 - 10x^4)\text{tg}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 2x\left(\frac{x^6 - 2x^5}{x^2+1}\right)^2 \sec^2\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 12.12

Seja $f(x) = \cos^3(7x^4 - 13x + 6)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 3\left(\cos^2(7x^4 - 13x + 6)\right)\left(-\text{sen }(7x^4 - 13x + 6)\right)(28x^3 - 13)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f'(0) = 39(\cos^2 6)(\text{sen } 6)$.

Com efeito, sejam $f_1(x) = 7x^4 - 13x + 6$, $f_2(x) = \cos x$ e $f_3(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pois $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = (f_3 \circ f_2)(7x^4 - 13x + 6) = f_3(f_2(7x^4 - 13x + 6)) = f_3(\cos(7x^4 - 13x + 6)) = \cos^3(7x^4 - 13x + 6) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Já sabemos que f_1, f_2 e f_3 são deriváveis em $\mathbb{R}$, sendo ${f_1}'(x) = 28x^3 - 13$, ${f_2}'(x) = -\text{sen } x$ e ${f_3}'(x) = 3x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1),$$

a regra da cadeia (aplicada duas vezes) garante que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))'(x) = \\
&= {f_3}'\left((f_2 \circ f_1)(x)\right)(f_2 \circ f_1)'(x) = \\
&= {f_3}'(f_2(f_1(x))){f_2}'(f_1(x)){f_1}'(x) = \\
&= {f_3}'(f_2(7x^4 - 13x + 6))({f_2}'(7x^4 - 13x + 6))(28x^3 - 13) = \\
&= {f_3}'(\cos(7x^4 - 13x + 6))(-\text{sen }(7x^4 - 13x + 6))(28x^3 - 13) = \\
&= 3\left(\cos^2(7x^4 - 13x + 6)\right)\left(-\text{sen }(7x^4 - 13x + 6)\right)(28x^3 - 13)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resumo

Nesta aula você aprendeu como derivar a composta de funções deriváveis.

Exercícios

1. Derive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = \text{sen}^2 x$; (b) $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$;

   (c) $f(x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}\,(x^2)}$; (d) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(x^2)}{\text{sen}^2 x}$;

   (e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$; (f) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$;

   (g) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(\cos^2 x)}{\sqrt{x}}$; (h) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(\cos(x^2))}{x^4 + 2}$;

   (i) $f(x) = \sqrt[4]{\cos(x^2) + 7x^8 + 1}$; (j) $f(x) = \dfrac{x^2 \sec(x^3 - 1)}{x^2 + 1}$;

   (l) $f(x) = \text{tg}\,(x^3) + \text{cosec}\,(x^3)$; (m) $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x}\cos^5 x}{1 - x^2}$;

   (n) $f(x) = \text{tg}\,^3 x + \text{cosec}^3 x$; (o) $f(x) = \dfrac{\text{cotg}\,(1 + x^3)}{x^4 - 1}$;

   (p) $f(x) = x^{-\frac{7}{8}}\text{sen}\,(x^3 - 9x + 8)$; (q) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{\text{sen}\,(2x)}{1 + \sqrt{x}}}$;

   (r) $f(x) = \text{tg}\,(x^3)\text{sen}^2(\cos(x^2))$; (s) $f(x) = \text{sen}^2(\cos(x^2))$;

   (t) $f(x) = (\sqrt{x} + x^7 - 5x^2 + \text{sen}^3(x^3 - 4x))^9$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em 0 tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$ e defina $g(x) = \text{sen}\,(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que g é derivável em 0 e $g'(0) = 2$.

   (b) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(0, g(0))$.

   Sugestão para (a): Use a regra da cadeia.

3. Seja $g(x) = f(x^2 + 3x)$. Calcule $g'(1)$, sabendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em 4 e $f'(4) = \frac{1}{5}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $\mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) f' é par se f é ímpar;

(b) f' é ímpar se f é par.

Sugestão: Use a regra da cadeia, lembrando que f é par (respectivamente ímpar) se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (respectivamente $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

5. Seja $f(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x^2+1}}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$.

   (b) Forneça $f'(x)$.

   (c) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

Auto-avaliação

Na aula 10 e nesta aula foram estudadas as regras básicas de derivação: soma, produto, quociente e composição. Só há uma maneira de assimilá-las: exercitando à exaustão. Por esta razão, só passe para a próxima aula se tiver feito todos os exercícios de ambas as aulas. Se houver alguma dúvida, releia ambas as aulas e/ou consulte os tutores.

Aula 13 – Derivação implícita.

Referências: Aulas 9, 10 e 12.

Objetivo

Compreender como se deriva implicitamente uma função que satisfaça uma determinada equação.

Antes de entrar no assunto desta aula, vamos introduzir a notação de Leibniz para a derivada. Se para uma dada função f escrevermos $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ representará $f'(x)$. A notação $\frac{dy}{dx}\big|_{x=a}$ será usada para indicar a derivada de $y = f(x)$ em a, ou seja, $\frac{dy}{dx}\big|_{x=a}$ indicará $f'(a)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 13.1

Se $y = x^6 - 2x^4 + 7x^3 - 2$, então

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 8x^3 + 21x^2 \quad \text{e} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 23.$$

Exemplo 13.2

Se $y = \text{sen}\, x$, então

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad \text{e} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi} = \cos \pi = -1.$$

Exemplo 13.3

Se $s = \frac{t^2+1}{t^4+5}$, então

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2t(t^4+5) - (t^2+1)t^4}{(t^4+5)^2} = \frac{-t^6 + 2t^5 - t^4 + 10t}{(t^4+5)^2} \quad \text{e} \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Sob as hipóteses da Proposição 10.2, escrevamos $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $w = y + z = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$. Então

$$\frac{dw}{dx} = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

Sob as hipóteses da Proposição 10.3, escrevamos $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $w = yz = f(x)g(x) = (fg)(x)$. Então

$$\frac{dw}{dx} = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx}.$$

Analogamente, sob as hipóteses da Proposição 10.4, escrevamos $y = f(x)$, $z = g(x)$ e $w = \frac{y}{z} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$. Então

$$\frac{dw}{dx} = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{\frac{dy}{dx}z - y\frac{dz}{dx}}{z^2}.$$

Finalmente, sob as hipóteses da Proposição 12.1, escrevamos $u = f(x)$ e $y = g(u) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Então

$$\frac{dy}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(u)\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Exemplo 13.4

Seja $y = \cos(\sqrt{x})$ e calculemos $\frac{dy}{dx}$ para todo $x > 0$.

De fato, escrevamos $u = \sqrt{x}$; então $y = \cos(u)$. Como $\frac{dy}{du} = -\text{sen}\, u$ e $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -(\text{sen}\, u)(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = -\frac{\text{sen}\,(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

Exemplo 13.5

Seja $y = \sqrt[3]{\text{sen}\, x}$ e calculemos $\frac{dy}{dx}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}\, x \neq 0$.

De fato, escrevamos $u = \text{sen}\, x$; então $y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$. Como $\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}}$ e $\frac{du}{dx} = \cos x$, segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{3u^{\frac{2}{3}}} = \frac{\cos x}{3(\text{sen}\, x)^{\frac{2}{3}}}\ .$$

Logo, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3(\text{sen}\,\frac{\pi}{2})^{\frac{2}{3}}} = \frac{0}{3} = 0.$

No próximo exemplo vamos preparar o terreno para entrar no assunto desta aula.

Exemplo 13.6

Consideremos a equação $x^2 + y^2 = 1$ que, como sabemos, representa o círculo de centro $(0,0)$ e raio 1. Queremos saber para que valores de x podemos escrever y como uma função (derivável) de x. Mais precisamente, queremos encontrar uma função derivável $y = f(x)$ que satisfaça a equação. No caso em questão, devemos ter

$$y^2 = 1 - x^2.$$

Há então duas possibilidades para y:

$$y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Evidentemente, em ambos os casos, x ficará restrito ao intervalo $(-1, 1)$. Além disso, para todo $x \in (-1, 1)$, temos

$$f_1{}'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{f_1(x)}$$

e

$$f_2{}'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{(-\sqrt{1-x^2})} = -\frac{x}{f_2(x)}.$$

Portanto, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ em ambos os casos.

Observemos que, admitindo apenas a existência de $y = f(x)$ satisfazendo a equação $x^2 + y^2 = 1$, com f derivável, seríamos capazes de achar $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y, mesmo que não tivéssemos $y = f(x)$ explicitamente.

Com efeito, derivando ambos os lados da equação $x^2+y^2 = 1$ em relação a x, obtemos $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, isto é, $x + y\frac{dy}{dx} = 0$.

Assim, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

No caso, por exemplo, da equação $xy^2 + x + y = 1$, é complicado escrever y explicitamente como função de x. Entretanto, admitindo que $y = f(x)$ seja uma função derivável satisfazendo esta equação, é bem mais simples encontrar uma expressão para $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y, como podemos constatar no próximo exemplo.

Quando dizemos que uma função derivável, da variável x, está definida implicitamente por uma equação, estamos admitindo a existência de uma tal função sem, necessáriamente, termos uma maneira explícita de espressá-la como função de x.

Em geral, dada uma equação em x e y, pode ser difícil ou até mesmo impossível explicitar y como função de x. No entanto, admitindo que y seja uma função derivável da variável x satisfazendo a equação dada, podemos derivar a equação em relação a x para obter $\frac{dy}{dx}$. Neste caso, diremos que *a função está dada (ou definida) implicitamente* pela equação e que estamos obtendo $\frac{dy}{dx}$ por *derivação implícita* da equação dada.

Exemplo 13.7

Seja $y = f(x)$ uma função derivável dada implicitamente pela equação $xy^2 + x + y = 1$. Mostremos que $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2-1}{2xy+1}$ se $2xy + 1 \neq 0$.

De fato, como $xy^2 + x + y = 1$, derivando implicitamente obtemos

$$y^2 + x2y\frac{dy}{dx} + 1 + \frac{dy}{dx} = 0,$$

isto é,

$$y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -1,$$

isto é,

$$(1 + 2xy)\frac{dy}{dx} = -y^2 - 1.$$

Assim, supondo $2xy + 1 \neq 0$, segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 - 1}{2xy + 1}.$$

Exemplo 13.8

Sejam $a > 0$ e $y = f(x)$, com $y > 0$, a função dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = a^2$. Vamos encontrar a função f, a sua derivada, mostrar que $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ e achar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

Primeiramente, como $x^2 + y^2 = a^2$, temos $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Como $y > 0$, segue que $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ para x no intervalo $(-a, a)$.

Pela regra da cadeia, vista na aula 12,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{f(x)}$$

para todo $x \in (-a, a)$. Ou, na notação de Leibniz,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Poderíamos também obter a igualdade acima derivando implicitamente. Realmente, como $x^2 + y^2 = a^2$, obtemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Finalmente, como $f(0) = \sqrt{a^2} = a$, então $f'(0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{0}{a} = 0$. Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0)) = (0, a)$ é

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = a.$$

Exemplo 13.9

A função derivável $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação $3x^3y - y^4 + 5x^2 = -5$. Vamos determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$.

Com efeito, como $3x^3y - y^4 + 5x^2 = -5$, derivando implicitamente obtemos

$$9x^2y + 3x^3\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} + 10x = 0.$$

Assim,

$$(3x^3 - 4y^3)\frac{dy}{dx} = -(10x + 9x^2y).$$

Logo, se $3x^3 - 4y^3 \neq 0$, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10x + 9x^2y}{3x^3 - 4y^3}.$$

Finalmente, substituindo $x = 1$ e $y = 2$ na igualdade acima, segue que

$$f'(1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{10 + 9 \times 2}{3 - 4(2)^3} = -\frac{28}{-29} = \frac{28}{29}.$$

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$ é

$$y = 2 + \frac{28}{29}(x - 1).$$

Exemplo 13.10

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e seja $y = f(x)$ uma função derivável definida implicitamente pela equação $x - \beta y = \alpha\sqrt{x + y}$. Vamos achar α e β para que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(6, 3)$ seja 1.

Primeiramente, como $f(6) = 3$, segue que $6 - 3\beta = \alpha\sqrt{6 + 3} = 3\alpha$, isto é, $\alpha + \beta = 2$. Por outro lado, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(6, 3)$ é $f'(6) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6}$. Como $x - \beta y - \alpha\sqrt{x + y} = 0$, derivando implicitamente obtemos

$$1 - \beta\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{2}\frac{1 + \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x + y}} = 0.$$

Como estamos supondo $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6} = 1$, segue da equação acima que

$$1 - \beta - \frac{\alpha}{2}\frac{2}{\sqrt{6 + 3}} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \frac{\alpha}{3} + \beta = 1.$$

Finalmente, das igualdades $\alpha + \beta = 2$ e $\frac{\alpha}{3} + \beta = 1$, vem $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

Exemplo 13.11

Seja $y = f(x)$ uma função derivável definida implicitamente pela equação $\frac{x^2}{2} + y^2 + xy = 9$. Vamos achar os pontos $(x, f(x))$ para os quais a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ seja horizontal.

Com efeito, como $\frac{x^2}{2}+y^2+xy=9$, derivando implicitamente obtemos

$$\frac{2x}{2}+2y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

isto é,

$$(x+2y)\frac{dy}{dx}=-(x+y).$$

Para que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x,f(x))=(x,y)$ seja horizontal devemos ter $\frac{dy}{dx}=f'(x)=0$. Em vista da igualdade acima, isto só pode ocorrer se $x+y=0$, ou seja, se $y=-x$. Mas, como $\frac{x^2}{2}+y^2+xy=9$, fazendo $y=-x$ vem $\frac{x^2}{2}+x^2-x^2=9$; logo, $x^2=18$, isto é, $x=3\sqrt{2}$ ou $x=-3\sqrt{2}$. Podemos então concluir que os pontos procurados são $(3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$ e $(-3\sqrt{2},3\sqrt{2})$.

Resumo

Nesta aula você aprendeu como utilizar as regras básicas de derivação para derivar implicitamente uma função definida por uma equação.

Exercícios

1. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y, onde $y=f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente por cada uma das seguintes equações:

   (a) $xy^2+3y=5$; (b) $y^3+x^2y=2x+7$;

   (c) $y^7+y=x$; (d) $11y+\cos x=4xy$;

   (e) $x^2-y^2=9$; (f) $xy^2+x+y=10$;

   (g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$; (h) $y^2+2x^2y+x=0$;

   (i) $x^2y^2-x^2-y^2=0$; (j) $x^3-xy+y^3=1$.

2. Sendo $y=f(x)$ uma função derivável dada implicitamente por cada uma das equações abaixo, ache a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P indicado:

   (a) $(y-x)^2=2x+4$, $P=(6,2)$;

   (b) $x^2+xy-y^2=1$, $P=(2,3)$;

   (c) $xy+5=7x$, $P=(1,2)$.

3. A função derivável $y = f(x)$, $y > 0$, é dada implicitamente pela equação $x^2 + 36y^2 = 10$. Ache $f(1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.

4. Considere a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Sendo (u, v) um ponto sobre a elipse tal que $v \neq 0$, ache a equação da reta tangente à mesma no ponto (u, v).

   Sugestão: Considere $y = f(x)$, f derivável e tal que $f(u) = v$, dada implicitamente pela equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (u, v).

5. Considere o ramo da hipérbole $xy = 1$ onde $x > 0$. Sendo (u, v) um ponto qualquer da hipérbole, com $u > 0$, mostre que a equação da reta tangente à mesma no ponto (u, v) é $vx + uy = 2$.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você teve a oportunidade de utilizar as regras básicas de derivação, estudadas nas aulas 10 e 12, para derivar implicitamente determinadas funções. Mais uma vez, a importância de tais regras fica evidenciada.

Aula 14 – Velocidade e aceleração. Taxa de variação.

Referências: Aulas 9 e 13.

Objetivo

Estudar o significado da noção de derivada no contexto da Física.

Nesta aula abordaremos o significado da noção de derivada no contexto da Física como, aliás, já havíamos prometido na aula 9. Mas antes, lembremos um fato bem conhecido dos aficionados pelo esporte.

Aqueles que acompanham o atletismo sabem que Carl Lewis foi um dos maiores atletas de todos os tempos, tendo obtido o tempo de 9,92 segundos para os 100 metros rasos.

Poderíamos, inicialmente, perguntar quantos metros ele percorreu em cada segundo. Ora, se no instante $t = 0$ da partida ele estava na posição inicial e após 9,92 segundos ele havia percorrido 100 metros, então em média ele percorreu $\frac{100-0}{9{,}92-0}$ metros por segundo, o que é aproximadamente igual a 10,08 metros por segundo. Esta foi a velocidade média por ele percorrida entre os instantes $t = 0$ e $t = 9,92$.

Agora, se perguntássemos sua velocidade $v(t)$ em cada instante t, a resposta seria mais delicada. Realmente, suponhamos que descobríssemos uma função que em cada instante t fornecesse a posição $x(t)$ de Carl Lewis na pista. Assim, para cada t e para cada $h \neq 0$, $x(t+h) - x(t)$ seria o deslocamento do corredor entre os instantes t e $t+h$ e $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ seria a sua velocidade média entre os instantes t e $t+h$ (por exemplo, sua velocidade média entre $t = 0$ e $t = 9,92$ foi de aproximadamente 10,08 metros por segundo). Observemos ainda que, à medida que $h \neq 0$ se aproxima de zero, as velocidades médias $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ se aproximam da velocidade $v(t)$ procurada. Assim, seria natural admitir que $v(t)$ coincidisse com $\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$.

As considerações acima motivam a seguinte

Definição 14.1 Suponhamos que uma partícula se desloque sobre o eixo x das abscissas de tal modo que $x = x(t)$ represente a posição da partícula no instante t (portanto, x é uma função que fornece a posição da partícula em cada instante). Para cada t e para cada $h \neq 0$, $x(t+h)-x(t)$ é o *deslocamento da partícula* entre os instantes t e $t+h$ e $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ é a *velocidade média* da partícula entre os instantes t e $t+h$.

A *velocidade* da partícula no instante t, denotada por $v(t)$, é definida como sendo $x'(t)$, caso $x'(t)$ exista. Como

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

$v(t)$ é também chamada a *taxa de variação* de x em relação ao tempo no instante t.

Suponhamos que, para um certo instante t, $v(s)$ exista para s em um intervalo aberto contendo t. A *aceleração* da partícula no instante t, denotada por $a(t)$, é definida como sendo $v'(t)$, caso $v'(t)$ exista. Como

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$

$a(t)$ é também chamada a taxa de variação de v em relação ao tempo no instante t.

Exemplo 14.1

Consideremos uma partícula que cai sob influência exclusiva da gravidade. Dados experimentais mostram que a posição da partícula no instante t é dada por $x = x(t) = \frac{Gt^2}{2}$, onde G é a constante gravitacional. Vamos encontrar a velocidade da partícula no instante t e a aceleração da partícula no instante t.

De fato, como $x(t) = \frac{Gt^2}{2}$, a velocidade da partícula no instante t é $v(t) = x'(t) = Gt$ e a aceleração da partícula no instante t é $a(t) = v'(t) = G$.

Exemplo 14.2

Uma partícula se move sobre o eixo x das abscissas de modo que a posição x da mesma no instante t seja dada por $x = x(t) = 1 + t^3$, sendo x medida em metros e t em segundos. Vamos determinar:

(a) a posição da partícula nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$;

(b) a velocidade da partícula no instante t;

(c) a aceleração da partícula no instante t.

(a) Como $x(0) = 1$, $x(1) = 2$ e $x(2) = 9$, a partícula estará 1 metro à direita da origem no instante $t = 0$, 2 metros à direita da origem no instante $t = 1$ e 9 metros à direita da origem no instante $t = 2$ (ver a Figura 14.1).

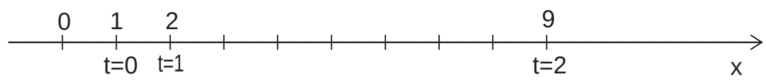


Figura 14.1

(b) Como $x(t) = 1 + t^3$, então $v(t) = x'(t) = 3t^2$. Assim, a velocidade da partícula no instante t é de $3t^2$ m/s.

(c) Como $v(t) = 3t^2$, então $a(t) = v'(t) = 6t$. Assim, a aceleração da partícula no instante t é de $6t$ m/s^2.

Exemplo 14.3

Um objeto se move em linha reta, a partir de um ponto P, de modo que a sua posição (medida em metros) é dada por $x(t) = 2t$ se $0 \leq t \leq 2$, $x(t) = 4$ se $2 \leq t \leq 3$ e $x(t) = -2t + 10$ se $3 \leq t \leq 5$. Determinemos a velocidade do objeto.

É fácil ver que x é derivável em $[0, 5] - \{2, 3\}$, sendo $x'(t) = 2$ se $0 \leq t < 2$, $x'(t) = 0$ se $2 < t < 3$ e $x'(t) = -2$ se $3 < t \leq 5$. Portanto, $v(t) = 2$ se $0 \leq t < 2$, $v(t) = 0$ se $2 < t < 3$ e $v(t) = -2$ se $3 < t \leq 5$, sendo a velocidade medida em metros por segundo. Observemos que o objeto se afasta do ponto P nos primeiros 2 segundos, depois fica parado por 1 segundo e nos últimos 2 segundos retorna ao ponto P.

Exemplo 14.4

Um quadrado se expande de tal maneira que seu lado varia à razão de 5 cm/s. Determinemos a taxa de variação de sua área no instante em que o lado do quadrado possua 6 cm de comprimento.

Representemos por $x = x(t)$ o comprimento do lado do quadrado no instante t. Logo, $A(x) = x^2$ representa a área do quadrado em função do lado x do quadrado.

Para todo t temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

Mas, como $\frac{dA}{dx} = 2x$ e como nos é dado que $\frac{dx}{dt} = 5$ para todo t, concluímos que $\frac{dA}{dt} = 10x(t)$ para todo t. Em particular, quando $x(t) = 6$, vem $\frac{dA}{dt} = 60$.

Assim, a taxa de variação procurada é de 60 cm^2/s.

Exemplo 14.5

Um ponto se move ao longo do gráfico de $y = x^5$ em direção à origem, de modo que sua abscissa x varia à razão de 2 unidades por segundo. Determinemos a taxa de variação da ordenada y do ponto, quando $x = 4$.

Temos que $x = x(t)$ e nos é dado que $\frac{dx}{dt} = -2$ para todo t. Sabemos ainda que $y = y(x) = x^5$. Portanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

para todo t. Como $\frac{dy}{dx} = 5x^4$, concluímos que $\frac{dy}{dt} = -10(x(t))^4$ para todo t. Em particular, quando $x(t) = 4$, vem $\frac{dy}{dt} = -10.4^4 = -2560$.

Assim, a ordenada y do ponto decresce à taxa de 2560 unidades por segundo quando $x = 4$ unidades.

Exemplo 14.6

Um cilindro é comprimido lateralmente e se alonga de tal modo que o raio da base decresce a uma taxa de 2 cm/s e a altura cresce a uma taxa de 5 cm/s. Vamos achar a taxa de variação segundo a qual o volume do cilindro varia quando o raio da base mede 6 cm e a altura 8 cm.

Com efeito, representemos por $r = r(t)$ o raio da base do cilindro e por $h = h(t)$ a altura do cilindro (ver a Figura 14.2). São fornecidas as seguintes informações: $\frac{dr}{dt} = -2$ e $\frac{dh}{dt} = 5$ para todo t.

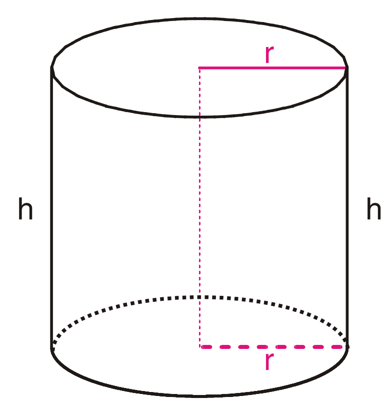


Figura 14.2

Como o volume $V = V(t)$ do cilindro é $V = \pi r^2 h$, temos

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(2r\frac{dr}{dt}h + r^2\frac{dh}{dt}\right) = \pi(5(r(t))^2 - 4r(t)h(t))$$

para todo t.

Em particular, quando $r(t) = 6$ e $h(t) = 8$, vem

$$\frac{dV}{dt} = \pi(5 \times 6^2 - 4 \times 6 \times 8) = \pi(180 - 192) = -12\pi.$$

Assim, o volume do cilindro decresce à taxa de 12π cm^3/s quando o raio da base mede 6 cm e a altura mede 8 cm.

Exemplo 14.7

Dois trens saem de uma mesma estação com 3 horas de diferença. O primeiro trem se desloca para o norte a uma velocidade de 100 km/h e o segundo para o leste a uma velocidade de 60 km/h, sendo que o segundo saiu 3 horas depois do primeiro. Determinemos a taxa de variação da distância entre os dois trens 2 horas depois do segundo haver partido.

Representemos por $x = x(t)$ a posição do segundo trem a sair, por $y = y(t)$ a posição do primeiro trem a sair e por $z = z(t)$ a distância entre os dois trens (ver a Figura 14.3); então $z^2 = x^2 + y^2$.

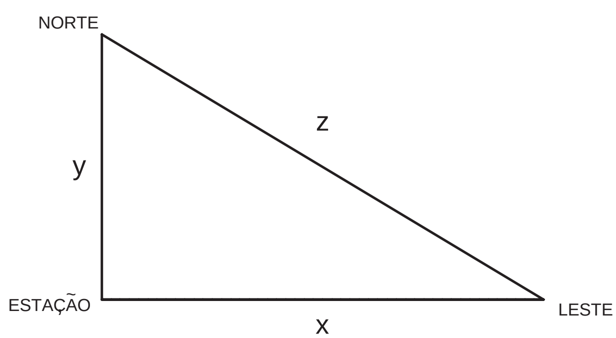


Figura 14.3

São fornecidas as seguintes informações: $\frac{dy}{dt} = 100$ para todo $t \geq 0$ e $\frac{dx}{dt} = 60$ para todo $t \geq 3$, sendo $y(0) = 0$ e $x(3) = 0$ (lembrar que o segundo trem partiu 3 horas depois do primeiro).

Como $z^2 = x^2 + y^2$, segue que

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 120x + 200y,$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{60x(t) + 100y(t)}{z(t)}$$

para todo $t \geq 3$.

Notemos que, 2 horas após o segundo trem ter saído, ele estará a $60\times 2 = 120$ km da estação. Por outro lado, o primeiro já terá saído há 5 horas, estando portanto a $100 \times 5 = 500$ km da estação. Logo, $x(5) = 120$ e $y(5) = 500$. Assim, a distância entre os dois trens é $z(5) = \sqrt{120^2 + 500^2}$.

Conseqüentemente,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=5} = \frac{60x(5) + 100y(5)}{z(5)} = \frac{(60 \times 120) + (100 \times 500)}{\sqrt{120^2 + 500^2}} \ \text{km/h}$$

é a taxa de variação procurada.

Resumo

Nesta aula você aprendeu o significado da noção de derivada no contexto da Física.

Exercícios

1. O comprimento do lado de um quadrado está crescendo à razão de 7,5 cm/s. Ache a taxa de crescimento da área do quadrado no instante em que o lado mede 37,5 cm.

2. Um ponto se move ao longo do gráfico de $y = \frac{1}{x^2+4}$ de modo que sua abscissa x varia à razão de 3 unidades por segundo. Determine a taxa de variação de sua ordenada y quando $x = 2$.

3. Dois lados paralelos de um retângulo aumentam à razão de 2 cm/s, mas os outros dois lados diminuem de tal modo que a figura permaneça um retângulo de área constante e igual a 50 cm^2. Ache a velocidade com que o perímetro varia quando o lado que aumenta mede 5 cm.

4. Uma escada com 13 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical alta. No instante t_0, a extremidade inferior, que se encontra a 5m da parede, está escorregando e se afastando da parede a uma velocidade de 2 m/s.

   (a) A que velocidade o topo da escada está escorregando no instante t_0?

   (b) Um homem está sobre a escada, a 8 m do solo, no instante t_0. Com que velocidade ele se aproxima do solo?

5. Uma fonte luminosa se aproxima perpendicularmente de uma parede com velocidade constante de 2 m/s, projetando uma imagem circular sobre esta. Sabendo que a abertura do facho de luz é de $\frac{\pi}{2}$ rd, calcule a velocidade com que a área iluminada na parede está diminuindo quando a fonte está a 1 m da parede.

6. Um triângulo ABC, no plano xy, tem o vértice A fixo no ponto $(0,0)$, ângulo reto no vértice B e o vértice C sobre o gráfico de $y = \frac{1}{x^2+1}$. O vértice B se move para a direita no eixo x das abscissas a partir do ponto $(1,0)$. Sabendo que em um instante t_0 a velocidade do vértice B é de 1 m/s e a sua posição é de 2 m, calcule a taxa de variação da área do triângulo no instante t_0.

7. Um homem de 1,80 m de altura corre, em linha reta, em direção a um muro à razão de 4 m/s. Diretamente atrás dele, a 40 metros do muro, está um refletor, 3 metros acima do chão. Calcule a velocidade com que o comprimento da sombra do homem está variando no muro quando ele estiver no meio do caminho entre o refletor e o muro. A sombra está aumentando ou diminuindo?

8. Um cone está inscrito em uma esfera de raio R. Se o raio da esfera está aumentando à razão de 0,9 cm/s e a altura do cone está aumentando à razão de 0,8 cm/s, determine a razão com que o volume do cone está aumentando quando a altura do cone mede $\frac{4}{3}$ cm e o raio da esfera mede 1 cm.

Auto-avaliação

Após ter feito os exercícios desta aula, você certamente assimilou melhor o conteúdo da mesma. Caso tenha havido alguma dúvida, releia os exemplos e depois volte aos exercícios.

Aula 15 – Exercícios resolvidos.

Referências: Aulas 1 a 10 e 12, 13 e 14.

Objetivo

Amadurecer os conceitos e resultados vistos até agora, dando ênfase ao conteúdo sobre derivação.

Exercício 1: Mostre que $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Solução: Se $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ existisse, haveria um único número real l com a seguinte propriedade: para toda seqüência (x_n) de números diferentes de zero convergindo para zero, a seqüência $\left(\text{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)$ convergiria para l. Vejamos que isto não ocorre. Realmente, consideremos as seqüências $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ e $z_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Por outro lado, como $\text{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ e $\text{sen}\left(\frac{1}{z_n}\right) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, então $\lim\limits_{n\to\infty}\text{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\text{sen}\left(\frac{1}{z_n}\right) = -1$. Conseqüentemente, $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Exercício 2: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$ e forneça a derivada f' de f.

Solução: Inicialmente, vejamos que f é derivável em 0. Realmente,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

como já sabemos. Isto mostra que f é derivável em 0 e $f'(0) = 0$.

Vejamos, agora, que f é derivável em $\mathbb{R}-\{0\}$. Realmente, consideremos $f_1(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f_2(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (é claro que $(f_2 \circ f_1)(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$); f_1 é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e ${f_1}'(x) = -\frac{1}{x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e f_2 é derivável em $\mathbb{R}$ e ${f_2}'(x) = -\text{sen}\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pela regra da cadeia, $f_2 \circ f_1$ é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ e

$$(f_2 \circ f_1)'(x) = {f_2}'(f_1(x)){f_1}'(x) = \frac{1}{x^2}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Mas, como

$$f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(f_2 \circ f_1)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, concluímos que f é derivável em $\mathbb{R} - \{0\}$ (como produto de duas funções deriváveis em $\mathbb{R} - \{0\}$) e

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(f_2 \circ f_1)(x) + x^2(f_2 \circ f_1)'(x) = \\ &= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \\ &= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Em resumo, f é derivável em $\mathbb{R}$, sendo sua derivada f' dada por $f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$ e $f'(0) = 0$.

Exercício 3: Sendo f como no Exercício 2, mostre que a função f' não é contínua em 0.

Este exercício mostra que, em geral, a derivabilidade de uma função não implica a continuidade de sua derivada.

Solução: Afirmamos que

$$\lim_{x \to 0} f'(x)$$

não existe. Realmente, se este limite existisse, da igualdade

$$f'(x) - 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

e do fato de $\lim\limits_{x \to 0} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existir, resultaria que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ existiria. Mas isto não ocorre, como vimos no Exercício 1.

Portanto, f' não é contínua em 0.

Exercício 4: Ache um número inteiro n tal que o polinômio $p(x) = x^3 - x + 3$ possua uma raiz no intervalo $(n, n+1)$.

Solução: Com efeito, notemos que $p(-2) = (-2)^3 - (-2) + 3 = -3 < 0$ e $p(-1) = (-1)^3 - (-1) + 3 = 3 > 0$. Como p é uma função contínua em $[-2, -1]$ e $p(-2) < 0 < p(-1)$, segue do teorema do valor intermediário que existe $x \in (-2, -1)$ tal que $p(x) = 0$. Basta então tomar $n = -2$ para concluir.

Exercício 5: Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = g(x)$.

Solução: De fato, consideremos a função $f-g$ que, como já vimos, é contínua em $[a,b]$ (lembremos que $(f-g)(t) = f(t) - g(t)$ para todo $t \in [a,b]$). Como

$$(f-g)(a) = f(a) - g(a) < 0 < f(b) - g(b) = (f-g)(b),$$

segue do teorema do valor intermediário que existe $x \in (a,b)$ tal que $(f-g)(x) = 0$. Finalmente, como $(f-g)(x) = 0$ equivale a $f(x) = g(x)$, a nossa afirmação está demonstrada.

Exercício 6: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x$ se $x > 0$, cujo gráfico esboçamos na Figura 15.1. Mostre que f não é derivável em 0 e que não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0)) = (0,0)$.

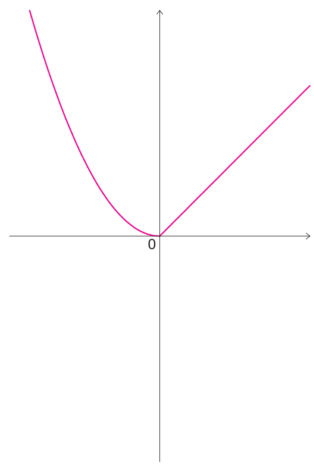


Figura 15.1

Solução: De fato, como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$

então $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ não existe. Logo, f não é derivável em 0. Além disso, como os limites laterais

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

existem mas são diferentes, não existe reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0)$.

Exercício 7: Sendo $f(x) = \text{sen}^3\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)$, calcule $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e forneça $f'(1)$.

Solução: Definamos $f_1(x) = \frac{\cos(x^2)}{1+x^4}$, $f_2(x) = \text{sen}\, x$ e $f_3(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Realmente, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) &= (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = \\
&= (f_3 \circ f_2)\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right) = \\
&= f_3\left(f_2\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)\right) = \\
&= f_3\left(\text{sen}\ \left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)\right) = \\
&= \text{sen}^3\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right) = f(x)\ .
\end{aligned}$$

Como f_1, f_2 e f_3 são deriváveis em $\mathbb{R}$ (justifique porque f_1 é derivável em $\mathbb{R}$), a regra da cadeia garante que f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(x) = (f_3 \circ f_2)'(f_1(x)){f_1}'(x) = (f_3 \circ f_2)'\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right){f_1}'(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$${f_1}'(x) = \frac{-2x\,\text{sen}\ (x^2) - 4x^3\cos(x^2)}{(1+x^4)^2} = -\frac{2x\,\text{sen}\ (x^2) + 4x^3\cos(x^2)}{(1+x^4)^2}$$

e

$$(f_3 \circ f_2)'(x) = {f_3}'(f_2(x)){f_2}'(x) = 3(f_2(x))^2(\cos x) = 3(\text{sen}^2 x)(\cos x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (f_3 \circ f_2)'\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right){f_1}'(x) = \\
&= -3\,\frac{2x\,\text{sen}\ (x^2) + 4x^3\cos(x^2)}{(1+x^4)^2}\text{sen}^2\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)\left(\cos\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)\right)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, fazendo $x = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\frac{3}{4}(2\text{sen } 1 + 4\cos 1)\text{sen}^2\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\right) = \\ &= -3\left(\frac{\text{sen } 1}{2} + \cos 1\right)\text{sen}^2\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Exercício 8 (Exercício 4, da aula 13): Considere a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Sendo (u, v) um ponto sobre a elipse tal que $v \neq 0$, ache a equação da reta tangente à mesma no ponto (u, v).

Solução: Seja $y = f(x)$ uma função derivável dada implicitamente pela equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ tal que $f(u) = v$. Derivando implicitamente, obtemos

$$\frac{2x}{4} + \frac{2y}{9}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \frac{y}{9}\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4}.$$

Logo, se $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}\,\frac{x}{y}.$$

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(u, f(u)) = (u, v)$, que coincide com a equação da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto (u, v), é

$$y = v + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=u}(x - u).$$

Mas $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=u} = -\frac{9}{4}\,\frac{u}{v}$. Assim, a equação da reta em questão é

$$y = v - \frac{9u}{4v}(x - u),$$

isto é,

$$9ux + 4vy = 9u^2 + 4v^2 = 36,$$

isto é,

$$\frac{ux}{4} + \frac{vy}{9} = 1.$$

Exercício 9: Um triângulo ABC está inscrito em um semi-círculo de diâmetro $AC = 10$ cm, como mostra a Figura 15.2. Sabendo que o vértice B varia sobre o semi-círculo e que o lado AB aumenta à razão de $\frac{3}{2}$ cm/s, determine a taxa de variação da área do triângulo no instante em que o lado AB mede 8 cm.

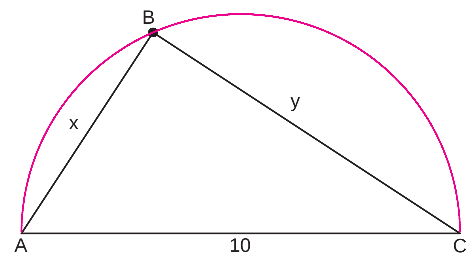


Figura 15.2

Solução: Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ os comprimentos dos catetos AB e BC da triângulo retângulo ABC. Como $x^2 + y^2 = 100$, temos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0,$$

isto é,

$$x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt} = 0$$

para todo t. Como $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}$ para todo t, temos

$$\frac{3}{2}x(t) + y(t)\frac{dy}{dt} = 0$$

para todo t. Além disso, quando $x(t) = 8$, $y(t) = \sqrt{100 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$; logo, $6\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2} \times 8 = -12$, isto é, $\frac{dy}{dt} = -2$.

Seja $S = S(t)$ a área do triângulo ABC. Como $S = \frac{xy}{2}$, então

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt}\right],$$

isto é,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt}y(t) + x(t)\frac{dy}{dt}\right],$$

para todo t. Portanto, quando $x(t) = 8$, podemos finalmente afirmar que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} \times 6 + 8 \times (-2)\right] = -\frac{7}{2}.$$

Assim, a área do triângulo ABC decresce a uma taxa de $\frac{7}{2}$ cm^2/s quando o lado AB mede 8 cm.

Exercício 10: Um cone circular reto é obtido girando-se um triângulo retângulo de hipotenusa constante e igual a 6 cm em torno de um de seus catetos. Determine a taxa de variação do volume do cone no instante em que a altura do cone seja de $2\sqrt{5}$ cm e esteja aumentando à razão de 2cm/s.

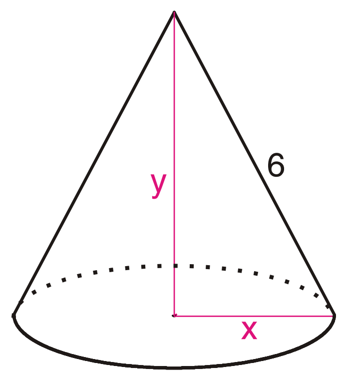


Figura 15.3

Solução: Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ os catetos do triângulo mencionado no enunciado do exercício, como indicado na Figura 15.3.

Como $x^2 + y^2 = 36$, temos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0,$$

isto é,

$$x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt} = 0$$

para todo t. Como $\frac{dy}{dt} = 2$ para todo t, temos

$$\frac{dx}{dt}x(t) + 2y(t) = 0$$

para todo t. Além disso, quando $y(t) = 2\sqrt{5}$, $x(t) = \sqrt{36 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{16} = 4$; logo, $4\frac{dx}{dt} + 4\sqrt{5} = 0$, isto é, $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{5}$.

Seja $V = V(t)$ o volume do cone em questão. Então $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$. Logo,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[2x\frac{dx}{dt}y + x^2\frac{dy}{dt}\right],$$

isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[2x(t)\frac{dx}{dt}y(t) + (x(t))^2\frac{dy}{dt}\right]$$

para todo t. Portanto, quando $y(t) = 2\sqrt{5}$, obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[2 \times 4 \times (-\sqrt{5}) \times (2\sqrt{5}) + 4^2 \times 2\right] = -16\pi.$$

Assim, o volume do cone decresce a uma taxa de 16π cm^3/s quando sua altura é de $2\sqrt{5}$ cm.

Resumo

Esta aula certamente contribuiu para solidificar a sua compreensão do conceito de derivada, criando condições para que você volte aos exercícios que ainda não tenha feito e habilitando-o a prosseguir o curso com segurança.

ISBN 85-88731-21-5
9788588731219

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL