UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Dinâmica de homeomorfismos de espaços métricos compactos

e

realização de vetores de rotação para homeomorfismos do toro

Mariana Gesualdi Villapouca

Niterói, RJ
Maio de 2009

Mariana Gesualdi Villapouca

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Orientador: Paulo Henrique Cabido Gusmão

Niterói, RJ
Maio de 2009

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãs, pelo apoio e pela compreensão da minha ausência em diversos momentos.

Agradeço também ao meu namorado que muitas vezes enxugou minhas lágrimas e colocou sorrisos em meu rosto.

Um agradecimento especial ao meu querido amigo Eduardo Barbosa Pinheiro que em diversos momentos me prestou auxílio desde a escrita até a apresentação desse presente trabalho.

Eu agradeço ao meu orientador Paulo Henrique Cabido Gusmão, pela atenção e paciência durante o processo de elaboração deste trabalho.

Eu agradeço, em particular, ao professor Andres Koropecki pela paciência e auxílio durante a elaboração.

E finalmente, agradeço à FAPERJ pelo apoio financeiro durante os meus estudos.

A todos, muito obrigada.

Resumo

No presente trabalho apresentamos a demonstração do seguinte resultado abaixo, devido a John Franks, a qual pode ser encontrada no artigo J. Franks, *Realizing Rotation Vectors for Torus Homeomorphisms*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 311, n. 1 (1989), p. 107-115.

Considere $\rho(F)$ o conjunto de rotação para o levantamento F do homeomorfismo $f : T^2 \to T^2$, o qual é homotópico a aplicação identidade. Se um vetor v está contido no interior de $\rho(F)$ e têm ambas as coordenadas racionais, então existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(p) \in T^2$ é um ponto periódico para f e

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{n} \tag{1}$$

Palavras-chave: Conjunto de Rotação; Dinâmica; Ponto fixo; Ponto periódico; Recorrência por cadeia; Componentes δ-transitivas; ε-cadeias; atrator-repulsor; função de Lyapounov Completa; Homeomorfismo do Toro.

Abstract

In the present work we give a proof of the following resulted below due to John Franks, which can be found in an article by the same author, entitled *Realizing Rotation Vectors for Torus Homeomorphisms*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 311, n. 1 (1989), p. 107-115.

Consider the rotation set $\rho(F)$ for a lift F of a homeomorphism $f : T^2 \to T^2$, which is homotopic to identity. If a vector v lies in the interior of $\rho(F)$ and has both coordinates rational, then there is $p \in \mathbb{R}^2$ such that $\pi(p) \in T^2$ is a periodic point for f and

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{n} \tag{2}$$

Keywords: Rotation Set; Dynamics; Fixed point; Periodic point; Chain Recurrent; δ-transitive components; ε-chain; attractor-repeller; Complete Lyapounov Function; Torus Homeomorphisms.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Recorrência e Existência da Função de Lyapounov **2**

1.1 A ε-cadeia e os pontos recorrentes por cadeia 2

1.2 Atratores, repulsores e o $R(f)$ 4

1.3 A existência da função de Lyapounov completa 9

1.4 As componetes δ-transitivas e o $R(f)$ 14

2 A existência de δ-cadeias periódicas **23**

2.1 Conjunto de rotação 23

2.2 A existência de δ-cadeias periódicas 29

3 A existência de pontos periódicos **35**

3.1 Conceitos preliminares 35

3.1.1 Sobre inclinação 35

3.1.2 Sobre índice 35

3.2 O teorema principal 37

Introdução

No presente trabalho apresentamos a demonstração do seguinte resultado, devido a John Franks: Considere $\rho(F)$ o conjunto de rotação para o levantamento F do homeomorfismo $f : T^2 \to T^2$, o qual é homotópico a aplicação identidade. Se um vetor v está contido no interior de $\rho(F)$ e têm ambas as coordenadas racionais, então existe um ponto periódico $x \in T^2$ com a propriedade que $\dfrac{F^q(x_0) - x_0}{q} = v$ onde $x_0 \in \mathbb{R}^2$ é um levantamento qualquer de x e q é o período de x.

Essa dissertação baseia-se no artigo "Realizing Rotation Vectors For Torus Homeomorphisms" de John Franks ([Fr89]).

No primeiro capítulo apresentamos as definições e propriedades da ε-cadeia, dos pontos recorrentes por cadeia, dos atratores e repulsores, as componentes δ-transitivas e transitivas por cadeia, e é feita uma demonstração da existência da função de Lyapounov completa para homeomorfismos segundo o artigo do John Franks, "A variation on the Poincaré-Birkhoff Theorem"([Fr88]). Além disso, é demonstrada uma caracterização do conjunto dos pontos recorrentes por cadeia em relação aos conjuntos de atratores e repulsores da função f, e também uma demonstração de uma caracterização das componentes δ-transitivas com respeito a uma função de Lyapounov Completa conveniente para f.

No segundo capítulo introduzimos o conceito de conjunto de rotação para homeomorfismos do toro e apresentamos algumas de suas propriedades segundo o artigo de Michal Misiurewicz e Krystyna Ziemian, "Rotations Sets for Maps of Tori"([MZ]). E ainda para fechar esse capítulo fazemos o caso δ-transitivo do resultado principal que será de grande importância na demonstração do caso geral que é o nosso teorema principal.

No último capítulo é feito uma primeira seção com conceitos que serão abordados na demonstração da proposição que diz que se temos quatro vetores que são pontos extremos do $\rho(F)$ e o zero está contido no interior do fecho convexo desses vetores, então F possui um ponto fixo. E deste resultado segue, de maneira bem simples, o resultado que queremos demonstrar.

Capítulo 1

Recorrência e Existência da Função de Lyapounov

1.1 A ε-cadeia e os pontos recorrentes por cadeia

No que se segue consideraremos $f : X \to X$ como sendo um homeomorfismo onde X é um espaço métrico compacto.

Definição 1.1 (ε-cadeia)**.** *Uma ε-cadeia para f é uma sequência $x_1, x_2, \dots x_n$ de ponto de X tais que*

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \tag{1.1}$$

para $1 \leqslant i \leqslant n-1$
Se $x_1 = x_n$ diremos que a ε-cadeia é periódica. E dizemos que um ponto $x \in X$ é recorrente por cadeia se para todo $\varepsilon > 0$ existem um $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e uma ε-cadeia $x_1, x_2, \dots x_n$ tais que $x_1 = x_n = x$. O conjunto de pontos recorrentes por cadeia será chamado de conjunto recorrente por cadeia de f e será denotado por R ou $R(f)$.

Proposição 1.1. *R é compacto e invariante por f.*

Demonstração. Provemos primeiro que R é compacto.

Como $R \subset$ X e X é compacto, então para mostrar que R é compacto basta mostrar que R é fechado.

Seja $(x_n) \subset R$ uma sequência convergente, tal que $x_n \to x$. Mostremos que x é um ponto recorrente por cadeia.

Tome $\varepsilon > 0$ qualquer e um $0 < \delta << \frac{\varepsilon}{2}$.

Como f é contínua existe um $0 < \delta_1 << \delta$ tal que

$$f(B_{\delta_1}(x)) \subset B_\delta(f(x)) \tag{1.2}$$

Como $x_n \to x$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in B_{\delta_1}(x)$. Como $x_{n_0} \in R$, então existe uma δ-cadeia $y_1, \dots, y_m$ onde $y_1 = y_m = x_{n_0}$.

Assim, $z_1 = x, z_2 = y_2, z_3 = y_3, \dots, z_{m-1} = y_{m-1}, z_m = x$ é uma ε-cadeia para f onde $z_1 = z_m = x$. De fato,

- Temos,

$$\begin{aligned} d(f(z_1), z_2) = d(f(x), y_2) &\leqslant d(f(x), f(x_{n_0})) + d(f(x_{n_0}), y_2) \\ &< \delta + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

pois $x_{n_0} \in B_{\delta_1}(x)$ implica, por (1.2), que $f(x_{n_0}) \in B_\delta(f(x))$ e $y_1, \dots, y_m$ é uma δ-cadeia para f onde $y_1 = y_m = x_{n_0}$.

- Se $2 \leqslant i \leqslant n-2$ então

$$d(f(z_i), z_{i+1}) = d(f(y_i), y_{i+1}) < \delta < \varepsilon$$

pois $y_1, \dots, y_m$ é uma δ-cadeia para f onde $y_1 = y_m = x_{n_0}$.

- E,

$$\begin{aligned} d(f(z_{m-1}), z_m) = d(f(y_{m-1}), x) &\leqslant d(f(y_{m-1}), x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) \\ &< \delta + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

pois $x_{n_0} \in B_{\delta_1}(x) \subset B_\delta(x)$ e $y_1, \dots, y_m$ é uma δ-cadeia para f onde $y_1 = y_m = x_{n_0}$.

Logo, a sequência $z_1, \dots, z_m$ que definimos acima é de fato uma ε-cadeia para f onde $z_1 = z_m = x$.

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de modo arbitrário obtemos que $x \in R$.

Provemos agora que R é invariante por f.

Seja $x \in R$ qualquer, queremos mostrar que $f(x) \in R$, isto é, que $f(x)$ é um ponto recorrente por cadeia.

Tome $\varepsilon > 0$ qualquer e $0 < \delta << \frac{\varepsilon}{2}$. Como f é contínua, existe um $0 < \delta_1 << \delta$ tal que

$$f(B_{\delta_1}(f(x))) \subset B_\delta(f^2(x)) \tag{1.3}$$

Agora, como $x \in R$, existe uma δ_1-cadeia $x_1, \dots, x_n$ onde $x_1 = x_n = x$.

Temos que $y_1 = f(x), y_2 = x_3, y_3 = x_4, \dots, y_{n-1} = x_n = x, y_n = f(x)$ é uma ε-cadeia para f onde $y_1 = y_n = f(x)$. De fato,

- Temos,

$$\begin{aligned} d(f(y_1), y_2) = d(f^2(x), x_3) &\leqslant d(f^2(x), f(x_2)) + d(f(x_2), x_3) \\ &< \delta + \delta_1 < \delta + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

pois $d(f(x), x_2) < \delta_1 \overset{por(1.3)}{\Rightarrow} f(x_2) \in B_\delta(f^2(x))$ e $x_1, \ldots, x_n$ é uma δ_1-cadeia para f.

- Se $2 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$d(f(y_i), y_{i+1}) = d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta_1 < \delta < \varepsilon$$

pois $x_1, \ldots, x_n$ é uma δ_1-cadeia para f.

- E,

$$d(f(y_{n-1}), y_n) = d(f(x), f(x)) = 0 < \varepsilon$$

Portanto, $y_1, \ldots, y_n$ que definimos acima é de fato uma ε-cadeia para f onde $y_1 = y_n = f(x)$, ou seja, $f(x) \in R$. □

1.2 Atratores, repulsores e o $R(f)$

Definição 1.2. *Diremos que um subconjunto compacto $A \subset X$ é um atrator de f se existe uma vizinhança aberta U de A tal que:*

$$f(\overline{U}) \subset U \text{ e } A = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{U})$$

Essa tal vizinhança U de A será chamada de vizinhança isolada de A.

Proposição 1.2. *Se tomarmos $V = X - \overline{U}$ e $A^* = \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(\overline{V})$ tem-se que A^* é um atrator de f^{-1} com vizinhança isolada V.*

Demonstração. Como $\overline{V} \subset X$ e X é compacto, temos que $\overline{V}$ é compacto. Logo, como f^{-1} é contínua, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $f^{-n}(\overline{V})$ é compacto. Daí, temos que A^* é compacto.

Suponhamos, por absurdo, que $f^{-1}(\overline{V}) \nsubseteq V$, então existe um $x \in \overline{V}$ tal que $f^{-1}(x)$ não pertence a $V = X - \overline{U}$. Assim, $f^{-1}(x) \in \overline{U}$. Mas, como $x = f(f^{-1}(x)) \in f(\overline{U}) \subset U$ temos que $x \in U$, absurdo.

Logo,$f^{-1}(\overline{V}) \subset V$. E, assim, concluímos o desejado. □

Observação 1.1.

1. *Temos que A^* independe da escolha da vizinhança isolada U para A.*

2. *É fácil ver que $f(A) = A$ e $f(A^*) = A^*$.*

Definição 1.3. *O conjunto A^* é chamado de dual repulsor de A.*

Lema 1.1. *O conjunto de atratores de f é enumerável.*

Demonstração. Seja $B = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base enumerável para a topologia de X.

Seja A um atrator de f com vizinhança isolada U.

Como U é aberto, então $U = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$ tal que $V_\lambda \in B$ para todo $\lambda \in L$.

Assim, como $A \subset U = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$ e A é compacto, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in L$ tais que $A \subset V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_k} \subset U = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$.

Afirmação: $A = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{U}) = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_k}})$.

Como $V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_k} \subset U$, temos, claramente, que $\bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_k}}) \subset \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{U})$.

Seja $y \in A \subset V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_k}$. Agora, como $f^n(A) = A$ para todo $n \geqslant 0$, então $y \in A = f^n(A) \subset f^n(\overline{V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_k}})$ para todo $n \geqslant 0$.

Logo, $\bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{U}) \subset \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_k}})$.

Portanto, pela afirmação acima, a quantidade de atratores é no máximo a quantidade de subconjuntos finitos de B que é enumerável. Logo, o conjunto de atratores de f é enumerável. $\square$

Lema 1.2. *Sejam $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ os atratores de f e $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ os seus respectivos duais repulsores. Então:*

$$R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup A_n^*)$$

Demonstração. Provar que $R(f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$ é equivalente a provar que se $x \notin (A_m \cup A_m^*)$ para algum $m \in \mathbb{N}$, então $x \notin R(f)$.

Considere $x \notin A_m \cup A_m^*$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Seja U uma vizinhança isolada de A_m.

Como $x \notin A_m \cup A_m^*$, então $x \notin A_m$ e $x \notin A_m^*$. Assim, como $x \notin A_m^*$, temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin f^{-n_0}(\overline{X - \overline{U}})$ o que implica que $x \in f^{-n_0}(U)$, pois $f^{-n_0}(X) \subset f^{-n_0}(\overline{X - \overline{U}}) \cup f^{-n_0}(U)$. Seja n_1 o menor natural tal que $x \in f^{-n_1}(U)$.

Observe que $\overline{f^{-n_1}(U)} = f^{-n_1}(\overline{U})$ (pois f é um homeomorfismo) e, com isso podemos substituir vizinhança isolada U pela vizinhança isolada $f^{-n_1}(U)$, pois $f(f^{-n_1}(\overline{U})) = f^{-n_1}(f(\overline{U})) \subset f^{-n_1}(U)$ e $\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(\overline{U}) = \bigcap_{m\geqslant 0} f^m(f^{-n_1}(\overline{U}))$ $(\ldots \subset f^n(\overline{U}) \subset f^{n-1}(\overline{U}) \subset \ldots \subset f(\overline{U}) \subset \overline{U})$.

Assim, podemos assumir que $x \in U - f(U)$, pois $x \in f(f^{-n_1}(U))$ contradiz a minimalidade de n_1.

Podemos tomar $\varepsilon_0 > 0$ tal que toda ε_0-cadeia de x a x, $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n = x$, tem-se que $x_3 \in f^2(U)$ (observe que isto segue do fato de $x \in U$, U é aberto e f é contínua).

Tome $\varepsilon_1 = d(X - f(U), \overline{f^2(U)} > 0$ e $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$.

Afirmação: Não podemos ter uma ε-cadeia começando e terminando em x.

Para isso primeiro vamos mostrar que não podemos ter uma ε-cadeia de um ponto de $f^2(U)$ a um ponto de $X - f(U)$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que existe uma ε-cadeia $z_1, z_2, \ldots, z_n$ para f tal que $z_1 \in f^2(U)$ e $z_n \in X - f(U)$.

Assim, temos que $z_1 \in f^2(U) \subset f(U)$ o que implica que $f(z_1) \in f^2(U)$. Observe que $X - U \subset X - f(U)$.

Temos que $z_2 \in f(U)$, pois se $z_2 \in X - f(U)$ então $d(f(z_1), z_2) \geqslant \varepsilon_1$, absurdo, pois como $z_1, \ldots, z_n$ é uma ε-cadeia tem-se que $d(f(z_1), z_2) < \varepsilon \leqslant \dfrac{\varepsilon_1}{2}$. Logo, $z_2 \in f(U)$ então $f(z_2) \in f^2(U)$.

Temos que $z_3 \in f(U)$, pois se $z_3 \in X - f(U)$ então $d(f(z_2), z_3) \geqslant \varepsilon_1$, absurdo, pois como $z_1, \ldots, z_n$ é uma ε-cadeia tem-se que $d(f(z_2), z_3) < \varepsilon \leqslant \dfrac{\varepsilon_1}{2}$. Logo, $z_3 \in f(U)$ então $f(z_3) \in f^2(U)$.

Continuando esse processo chegaremos que $z_{n-1} \in f(U)$ o que implica que $f(z_{n-1}) \in f^2(U)$. Logo, $d(f(z_{n-1}), z_n) \geqslant \varepsilon_1$, pois $z_n \in X - f(U)$, mas $d(f(z_{n-1}), z_n) < \varepsilon \leqslant \dfrac{\varepsilon_1}{2}$ porque $z_1, \ldots, z_n$ é uma ε-cadeia para f. Assim, teríamos que ter $z_n \in X - f(U) \cap U$ o que é uma contradição.

Logo, não existe ε-cadeia de um ponto de $f^2(U)$ a um ponto de $X - f(U)$.

Portanto, como toda ε-cadeia de x a x é uma ε_0-cadeia de x a x, e toda ε_0-cadeia passa por $f^2(U)$, então, pelo que acabamos de provar, não pode existir ε-cadeia de x a x, pois $x \in X - f(U)$, o que conclui a afirmação.

Então, temos que x não é um ponto recorrente por cadeia, isto é, $x \notin R(f)$.

Com isso, mostramos que $R(f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$

Seja, agora, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$ queremos mostrar que x é um ponto recorrente por cadeia, isto é, $x \in R(f)$.

Suponhamos, por absurdo, que $x \notin R(f)$, então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que não existe ε_0-cadeia de x a si mesmo.

Dado $\varepsilon > 0$ defina:

$$\Omega(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \exists\ \varepsilon\text{-cadeia de } x \text{ a } y\}$$

Afirmação: $V = \Omega(x, \varepsilon_0)$ é aberto.

De fato, seja $y \in V$, temos que existe uma ε_0-cadeia $y_1 = x, y_2, \ldots, y_n = y$ de x a y.

Tome $\delta > 0$ tal que $\delta + d(f(y_{n-1}), y) < \varepsilon_0$ (isto é possível, pois $d(f(y_{n-1}), y) < \varepsilon_0$).

Seja $z \in B(y, \delta)$. Agora, tem-se que $y_1 = x, y_2, \ldots, y_{n-1}, z$ é uma ε_0-cadeia de x a z, pois $d(f(y_{n-1}), z) \leqslant d(f(y_{n-1}), y) + d(y, z) < d(f(y_{n-1}), y) + \delta < \varepsilon_0$, e portanto $z \in V$.

Concluímos assim que V é aberto.

Afirmação: $f(\overline{V}) \subset V$

$z \in \overline{V}$ então existe $(z_n) \subset V$ tal que $z_n \to z$.

Como f é contínua existe $\delta < \varepsilon_0$ tal que $f(B(z, \delta)) \subset B(f(z), \varepsilon_0)$.

Como $z_n \to z$ tem-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n_0} \in B(z, \delta) \cap V$. Daí, existe uma ε_0-cadeia $x_1 = x, \ldots, x_n = z_{n_0}$ para f.

Assim, temos que $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n = z_{n_0}, x_{n+1} = f(z)$ é uma ε_0-cadeia para f de x a $f(z)$, pois como $z_{n_0} \in B(z, \delta) \Rightarrow f(z_{n_0}) \in B(f(z), \varepsilon_0)$ o que implica que $d(f(z_{n_0}), f(z)) < \varepsilon_0$. Logo, $f(z) \in V$.

Desde modo, temos que $A = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{V})$ é um atrator de f com vizinhança isolada V.

Agora, como $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$ temos que ou $x \in A$ ou $x \in A^*$. Como $A \subset f(\overline{V}) \subset V$ e $x \notin V$ (pois, por suposição, não existe ε_0-cadeia de x a si mesmo) tem-se que $x \notin A$. Logo, $x \in A^*$.

Considere $w(x)$ como sendo os pontos limites do conjunto $\{f^n(x) \mid n \geqslant 0\}$. Como A^* é fechado e $x \in A^*$ temos que $w(x) \subset A^*$.

Mas, $w(x) \subset V$. De fato, se $y \in w(x)$ então existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $(f^m(x))_{m \in \mathbb{N}_1}$ converge para y. Daí, existe um $m_0 \in \mathbb{N}_1$ tal que $d(f^{m_0}(x), y) < \varepsilon_0$. Assim, $x, f(x), \ldots, f^{m_0 - 1}(x), y$ é uma ε_0-cadeia para f de x a y, isto implica que $y \in V$.

Portanto, $w(x) \subset V \cap A^*$, contradição! Logo, $x \in R(f)$.

Provamos, assim, que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*) \subset R(f)$.

Concluímos, portanto, que $R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$.

$\square$

Defina a seguinte relação em $R(f)$:

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \textit{ uma } \varepsilon\textit{-cadeia de } x \textit{ a } y \textit{ e outra de } y \textit{ a } x.$$

É fácil verificar que a relação definida acima é uma relação de equivalência em $R(f)$.

Definição 1.4. *As classes de equivalência em $R(f)$ relativas a relação de equivalência acima são chamadas de componentes transitivas por cadeia.*

Proposição 1.3. *Sejam $x, y \in R(f)$. Então, x e y estão em uma mesma componente trasitiva por cadeia se, e somente se, não existe um atrator A de f tal que $x \in A$ e $y \in A^*$ ou $y \in A$ e $x \in A^*$.*

Demonstração. Suponhamos que x e y estão em uma mesma componente transitiva por cadeia.

Seja A um atrator de f qualquer com vizinhança isolada U.

Suponhamos que $x \in A$ (o caso em que $x \in A^*$ é análogo). Tome $\varepsilon = d(X - U, \overline{f(U)}) > 0$ ($\varepsilon > 0$ pois $\overline{f(U)} \subset U$).

Afirmação: Não podemos ter uma $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia de um ponto de $f(U)$ a um ponto de $X - U$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que exista uma $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia $z_1, z_2, \ldots, z_n$ para f tal que $z_1 \in f(U)$ e $z_n \in X - U$.

Como $z_1 \in f(U) \subset U$ então $f(z_1) \in f(U)$. Temos que $z_2 \in U$, pois se $z_2 \in X - U$ teríamos que $d(f(z_1), z_2) \geqslant \varepsilon$ que entra em contradição com o fato de $z_1, \ldots, z_n$ ser uma $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia.

Como $z_2 \in U$ temos que $f(z_2) \in f(U)$. Novamente, temos que $z_3 \in U$, pois se $z_3 \in X - U$ teríamos que $d(f(z_2), z_3) \geqslant \varepsilon$ o que contradiz o fato de $z_1, \ldots, z_n$ ser uma $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia.

Continuando esse argumento chegamos que $z_{n-1} \in U$.

Assim, como $z_{n-1} \in U$, então $f(z_{n-1}) \in f(U)$, e como $z_n \in X - U$ temos que $d(f(z_{n-1}), z_n) \geqslant \varepsilon$, mas isto contradiz o fato de $z_1, \ldots, z_n$ ser uma $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia para f.

Portanto, não pode existir $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia de um ponto de $f(U)$ a um ponto de $X - U$.

Agora, como $A \subset f(U)$ e $A^* \subset X - \overline{U}$ temos que não existe $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia de um ponto de A a um ponto de A^*.

Pelo lema 1.2, $y \in R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$ onde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ são todos os atratores de f e $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ os seus respectivos duais repulsores. Logo, $y \in A \cup A^*$.

Como x e y estão em uma mesma componente transitiva por cadeia, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma ε-cadeia de x a y e outra de y a x. Assim, pelo que acabamos de mostrar acima, $y \in A$ (pois $x \in A$).

Suponhamos, agora, que não existe atrator A para f tal que $x \in A$ e $y \in A^*$ ou $x \in A^*$ e $y \in A$. Essa hipótese é equivalente a : Dado um atrator A de f qualquer, então $x \in A$ se, e somente se, $y \in A$.

Tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Considere o seguinte conjunto

$$V = \Omega(x, \varepsilon) = \{z \in X \mid \exists\ \varepsilon\text{-cadeia de } x \text{ a } z\}$$

Observe que $x \in V$, pois x é um ponto recorrente por cadeia.

Como vimos na demonstração do lema 1.2, $A_0 = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{V})$ é um atrator para f com vizinhança isolada V.

Pelo lema 1.2, temos que $x \in A_0 \cup A_0^*$. Agora, como $x \in V$, então $x \in A_0$. E, por hipótese, $x \in A_0$ se, e só se, $y \in A_0$. Logo, $y \in A_0 \subset V$, isto é, existe uma ε-cadeia de x a y.

Por um argumento similar encontramos, também, uma ε-cadeia de y a x.

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de modo arbitrário, concluímos que x e y estão em uma mesma componente transitiva por cadeia. $\square$

1.3 A existência da função de Lyapounov completa

Definição 1.5. *Uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ é dita uma função de Lyapounov completa para $f : X \to X$ se satisfaz:*

1. *Se x não pertence a $R(f)$ então $g(f(x)) < g(x)$;*

2. *Se $x, y \in R(f)$ então $g(x) = g(y) \Leftrightarrow x \sim y$ (isto é, $\Leftrightarrow$ estão em uma mesma componente transitiva por cadeia);*

3. *$g(R(f))$ é um compacto que não é denso em nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$.*

Chamaremos os elementos de $g(R(f))$ de valores críticos de g. E os pontos que não são valores críticos serão chamados de valores regulares.

Lema 1.3. *Dado A um atrator de f existe uma função contínua $g : X \to [0,1]$ tal que $g^{-1}(0) = A$, $g^{-1}(1) = A^*$ e g é estritamente decrescente nas órbitas de f dos pontos de $X - (A \cup A^*)$.*

Demonstração. Sejam A um atrator de f com vizinhança isolada U e A^* o seu respectivo dual repulsor.

Defina $g_0 : X \to [0,1]$ por

$$g_0(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,A^*)}$$

Seja $g_1(x) = \sup\{g_0(f^n(x)) \mid n \geqslant 0\}$. Temos:
1) $g_1(X) \subset [0,1]$, pois $g_0(X) \subset [0,1]$
2) $g_1(f(x)) \leqslant g_1(x), \forall x \in X$
De fato, como

$$\{g_0(f^n(f(x))) \mid n \geqslant 0\} \subset \{g_0(f^n(x)) \mid n \geqslant 0\}, \forall x \in X$$

Logo;

$$\sup\{g_0(f^n(f(x))) \mid n \geqslant 0\} \leqslant \sup\{g_0(f^n(x)) \mid n \geqslant 0\}, \forall x \in X$$

Daí, temos que $g_1(f(x)) \leqslant g_1(x), \forall x \in X$.
3) g_1 é contínua em X.
De fato, primeiro vamos mostrar que g_1 é contínua em $A \cup A^*$.
Seja $x \in A$ e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequênica em X tal que $x_k \to x$ quando $k \to \infty$. Assim;

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} g_1(x_k) &= \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant 0} g_0(f^n(x_k)) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant 0} \frac{d(f^n(x_k),A)}{d(f^n(x_k),A) + d(f^n(x_k),A^*)} = 0 \end{aligned}$$

pois a partir de um certo índice, teremos que $x_k \in U$ e A é um atrator de f, e portanto $d(f^n(x_k), A) \to 0$ quando $n \to \infty$.
Assim;

$$\lim_{k\to\infty} g_1(x_k) = 0 = g_1(x)$$

pois $d(f^n(x), A) = 0$.
Logo, g_1 é contínua em x. Portanto, g_1 é contínua em A.
Agora, sejam $y \in A^*$ e $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $y_k \to y$ quando $k \to \infty$. Assim, segue, de maneira similar ao que fizemos acima, que:

$$\lim_{k\to\infty} g_1(y_k) = \lim_{k\to\infty} (\sup_{n\geqslant 0} \frac{d(f^n(y_k),A)}{d(f^n(y_k),A) + d(f^n(y_k),A^*)}) = 1 = g_1(y)$$

Logo, g_1 é contínua em y. Portanto, g_1 é contínua em A^*.
Provamos, assim, que g_1 é contínua em $A \cup A^*$.
Seja agora, $N = U - f(\overline{U}) \subset U \subset \overline{U}$, então $f^n(N) \subset f^n(\overline{U}), \forall n \in \mathbb{N}$.

Sejam $x \in N$ e $r = \inf\{g_0(y) \mid y \in N\}$.

Tome $n_0 > 0$ tal que $g_0(f^n(N)) \subset [0, \frac{r}{2}]$ sempre que $n > n_0$.
Portanto, para cada $x \in N$, tem-se

$$g_1(x) = \max_{0 \leqslant n \leqslant n_0} \{g_0(f^n(x))\}$$

pois para todo $n \geqslant n_0$ temos que $g_0(f^n(N)) \subset [0, \frac{r}{2}]$.
Assim, temos que g_1 é contínua em N.

Observe que $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\overline{N}) = X - (A \cup A^*)$.
Temos, então, por esta observação e pelo fato de g_1 ser contínua em N, que g_1 é contínua em $X - (A \cup A^*)$.
Com isto concluímos que g_1 é contínua em X.

Definimos $g : X \to [0, 1]$ por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}}$$

Essa função está bem definida, pois

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

Observe que g é contínua, pois é uma série de funções contínuas uniformemente convergente.
Afirmação: $g^{-1}(0) = A$.
De fato, seja $x \in A$ então $f^n(x) \in A, \forall n \in \mathbb{N}$, e assim, tem-se que $d(f^n(x), A) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$g_1(f^n(x)) = \sup_{m \geqslant 0} \frac{d(f^{n+m}(x), A)}{d(f^{n+m}(x), A) + d(f^{n+m}(x), A^*)} = 0$$

Logo, $g(x) = 0$, isto é, $x \in g^{-1}(0)$. Provamos, assim, que $A \subset g^{-1}(0)$.
Agora, se $x \in g^{-1}(0)$, então $g(x) = 0$, logo, como $g_1(f^n(x)) \in [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $g_1(f^n(x)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim;

$$\sup_{m \geqslant 0} g_0(f^{n+m}(x)) = 0, \forall n \geqslant 0$$

Daí, $g_0(f^{0+0}(x)) = g_0(x) = 0$, então $d(x, A) = 0$, e portanto $x \in A$.

Assim, $g^{-1}(0) \subset A$, o que conclui que $g^{-1}(0) = A$.

Afirmação: $g^{-1}(1) = A^*$

De fato, seja $x \in A^*$, então

$$g_1(f^n(x)) = \sup_{m \geqslant 0} \frac{d(f^{m+n}(x), A)}{d(f^{m+n}(x), A) + d(f^{m+n}(x), A^*)} = 1$$

para todo $n \geqslant 0$, pois $d(f^k(x), A^*) = 0$ ($x \in A^*$ o que implica $f^k(x) \in A^*, \forall k \geqslant 0$).

Assim,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$$

Logo, $x \in g^{-1}(1)$. Portanto, $A^* \subset g^{-1}(1)$.

Agora, seja $x \in g^{-1}(1)$, ou seja, $g(x) = 1$. Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}} = 1$$

temos que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(1 - g_1(f^n(x))) = 0$$

Como $0 \leqslant g_1(f^n(x)) \leqslant 1, \forall n \geqslant 0$, então $0 \leqslant 1 - g_1(f^n(x)) \leqslant 1, \forall n \geqslant 0$. Assim, $1 - g_1(f^n(x)) = 0, \forall n \geqslant 0$, isto é, $g_1(f^n(x)) = 1$ para todo $n \geqslant 0$.

Assim,

$$\sup_{m \geqslant 0} \frac{d(f^{n+m}(x), A)}{d(f^{n+m}(x), A) + d(f^{n+m}(x), A^*)} = 1, \forall n \geqslant 0$$

e com isso $x \in A^*$.

Logo, $g^{-1}(1) \subset A^*$. Portanto, $A^* = g^{-1}(1)$.

Também;

$$g(f(x)) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^{n+1}(x)) - g_1(f^n(x))}{2^{n+1}} \leqslant 0$$

para todo $x \in X$, pois, pelo provado anteriormente, $g_1(f(y)) \leqslant g(y), \forall y \in X$.

Afirmação: Temos que $g(f(x)) = g(x)$ se, e somente se, $x \in A \cup A^*$

De fato, se $x \in A$ então, como $f(A) = A$, tem-se que $g(x) = 0 = g(f(x))$. Se $x \in A^*$ então, como $f(A^*) = A^*$, temos que $g(x) = 1 = g(f(x))$.

Agora, se $g(f(x)) = g(x)$ temos que $x \in A \cup A^*$.

Assim, $g(f(x)) < g(x)$ para todo $x \in X - (A \cup A^*)$. $\square$

Teorema 1.1. *Se $f : X \to X$ é um homeomorfismo onde X é um espaço métrico compacto, então existe uma função de Lyapounov completa $g : X \to \mathbb{R}$ para f.*

Demonstração. Pelo lema 1.1, sabemos que o conjunto de atratores para f, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, é enumerável.

Pelo lema 1.3, temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função contínua $g_n : X \to [0,1]$ tal que $g_n^{-1}(0) = A_n$, $g_n^{-1}(1) = A_n^*$ e g_n é estritamente decrescente por f em $X - (A_n \cup A_n^*)$, onde, para cada n, A_n^* é o dual repulsor de A_n.

Seja $g : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g_n(x)}{3^n}$$

Afirmação: A série acima converge uniformemente.

De fato, temos que

$$|\frac{2}{3^n}g_n(x)| = \frac{2}{3^n}|g_n(x)| \leqslant \frac{2}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

pois $g_n(X) \subset [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$.

Daí e do fato que $\frac{2}{3^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ converge, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} g_n(x)$ é normalmente convergente, e assim, pelo teste de Weierstrass, tem-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} g_n(x)$ é uniformemente convergente.

Como, para cada $x \in X$, $g(x)$ é uma série uniformemente converegente temos que a sequência das reduzidas é uma sequência de funções contínuas uniformemente convergente, e portanto g está bem definida e é contínua em X.

Afirmação 1: Se $x \notin R(f)$, então $g(f(x)) < g(x)$.

De fato, se $x \notin R(f)$, então existe algum $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin (A_i \cup A_i^*)$, logo $g(f(x)) < g(x)$.

Afirmação 2: $g(R(f))$ é um compacto que não é denso em nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$.

Com efeito, se $x \in R(f)$ então $x \in (A_n \cup A_n^*), \forall n \in \mathbb{N}$, portanto para cada $n \geqslant 1$ temos que ou $g_n(x) = 0$ ou $g_n(x) = 1$. Daí, temos, para cada $n \geqslant 1$, que ou $2g_n(x) = 0$ ou $2g_n(x) = 2$, e portanto $g(x) \in C$ onde C é o conjunto de Cantor.

Logo, $g(R(f)) \subset C$, portanto $g(R(f))$ é um compacto que não é denso em nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$.

Afirmação 3: Se $x, y \in R(f)$ então $g(x) = g(y)$ se, e somente se, x e y estão na mesma componente transitiva por cadeia.

($\Rightarrow$): Se $x, y \in R(f)$ e $g(x) = g(y)$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} |g_n(x) - g_n(y)| = 0$$

logo, $|g_n(x) - g_n(y)| = 0, \forall n \geqslant 1$ então $g_n(x) = g_n(y), \forall n \geqslant 1$.

Para $n \in \mathbb{N}$ qualquer, temos que $x \in A_n$ ou $x \in A_n^*$.

Se $x \in A_n$,então $g_n(x) = 0$ o que implica que $g_n(y) = 0$, então $y \in A_n$. Se $x \in A_n^*$, então $g_n(x) = 1$, o que implica que $g_n(y) = 1$, então $y \in A_n^*$.

Assim, para qualquer $n \geqslant 1$ temos que

$$x \in A_n \Leftrightarrow y \in A_n$$

portanto, não existe nenhum atrator de f, A, tal que $x \in A$ e $y \in A^*$ ou $x \in A^*$ e $y \in A$ satisfazendo $g(x) = g(y)$, e assim, pela proposição 1.3, tem-se que x e y estão em uma mesma componente transitiva por cadeia.

($\Leftarrow$): Se x e y estão em uma mesma componente transitiva por cadeia, então, pela proposição 1.3, tem-se, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$x \in A_n \Leftrightarrow y \in A_n$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, ou $x, y \in A_n$ ou $x, y \in A_n^*$, isto é, ou $g_n(x) = 0 = g_n(y)$ ou $g_n(x) = 1 = g_n(y)$. Portanto, $g_n(x) = g_n(y), \forall n \in \mathbb{N}$, o que implica que $g(x) = g(y)$.

Concluímos, assim, pelas afirmações 1, 2 e 3 que g é uma função de Lyapounov completa para f.

$\square$

1.4 As componetes δ-transitivas e o $R(f)$

Definição 1.6. *Dado um $\delta > 0$ fixo dizemos que $x, y \in R(f)$ são δ-equivalentes, e denotamos por $x \overset{\delta}{\sim} y$, se existe uma δ-cadeia de x a y e outra de y a x.*

Observação 1.2. *A relação $\overset{\delta}{\sim}$ definida acima é uma relação de equivalência em $R(f)$.*

Definição 1.7. *Chamaremos de componentes δ-transitivas de $R(f)$ as classes de equivalência definidas por* $\overset{\delta}{\sim}$.

Proposição 1.4. *As componentes δ-transitivas de f são invariantes por f.*

Demonstração. Dada uma componente δ-transitiva Λ queremos mostrar que $f(\Lambda) \subset \Lambda$.

Seja $x \in \Lambda$ qualquer. Vamos mostrar que para todo $y \in \Lambda$ existe uma δ-cadeia de $f(x)$ a y e outra de y a $f(x)$, e com isso provaremos que $f(x) \in \Lambda$.

Tome $y \in \Lambda$ qualquer e $0 < \delta' \lll \frac{\delta}{2}$. Pela continuidade da f, existe um $0 < \delta'' < \delta'$ tal que $f(B(f(x), \delta'')) \subset B(f^2(x), \delta')$.

Seja $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = x$ uma δ''-cadeia para f, e essa δ''-cadeia existe, pois $x \in R(f)$. Logo, como $d(f(x), x_1) < \delta''$, temos que $d(f(x_1), f^2(x)) < \delta'$. Assim,

$$d(f^2(x), x_2) \leqslant d(f^2(x), f(x_1)) + d(f(x_1, x_2) < \delta' + \delta'' < 2\delta' < \delta$$

Portanto, $f(x), x_2, \ldots, x_n = x$ é uma δ-cadeia para f. Agora, como $x, y \in \Lambda$ existe uma δ-cadeia $x = y_0, y_1, \ldots, y_m = y$ de x a y para f. Assim, juntando essas duas δ-cadeias temos que $f(x), x_2, \ldots, x_n = x = y_0, y_1, \ldots, y_m = y$ é uma δ-cadeia de $f(x)$ a y para f.

Seja agora $y = y_0', y_1', \ldots, y_s' = x$ a δ-cadeia para f de y a x, essa δ-cadeia existe pois $x, y \in \Lambda$. Assim, $y = y_0', y_1', \ldots, y_s' = x, f(x)$ é uma δ-cadeia de y a $f(x)$ para f.

Como y foi tomado de modo arbitrário em Λ temos que $f(x) \in \Lambda$. Portanto, $f(\Lambda) \subset \Lambda$.

□

Definição 1.8. *Diremos que um conjunto compacto e invariante por f, Λ, é δ-transitivo se para todo $x, y \in \Lambda$, x é δ-equivalente a y, isto é, $x \overset{\delta}{\sim} y$.*

Lema 1.4. *Dados $\delta > 0$ e um homeomorfismo $f : X \to X$ onde X é um espaço métrico compacto, então o número de componentes δ-transitivas de $R(f)$ é finito.*

Demonstração. Afirmação 1: Uma componente δ-transitiva é uma união de componentes transitivas por cadeia.

Com efeito, seja C uma componente δ-transitiva qualquer de $R(f)$. Como a união de todas as componentes transitivas por cadeia de $R(f)$ é $R(f)$, temos que:

$$C \subseteqq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$$

onde para cada $\lambda \in L$ o C_λ é uma componente transitiva por cadeia e $C \cap C_\lambda \neq \emptyset$.

Seja $x \in \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, então existe um $\lambda_0 \in L$ tal que $x \in C_{\lambda_0}$. Como $C \cap C_{\lambda_0} \neq \emptyset$ temos que existe $z \in C \cap C_{\lambda_0}$. Assim, para todo $y \in C$ tem-se que y é δ-equivalente a z. Por outro lado, como $x, z \in C_{\lambda_0}$ temos que $z \sim x$, em particular, z é δ-equivalente a x. Portanto, para todo $y \in C$ tem-se que y é δ-equivalente a x, isto é, $x \in C$. Logo,

$$\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \subseteqq C$$

Concluímos assim que $C = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Afirmação 2: Duas componentes transitivas por cadeia que estão em componentes δ-transitivas distintas estão separadas por uma distância de pelo menos δ.

De fato, sejam C_λ e C'_μ duas componentes transitivas por cadeia que estão em componentes δ-transitivas distintas C e C', respectivamente.

Suponhamos, por absurdo, que $d(C_\lambda, C'_\mu) < \delta$, isto é, existem pontos $x \in C_\lambda$ e $y \in C'_\mu$ tais que $d(x, y) < \delta$.

Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\varepsilon + d(x, y) < \delta$. Tome $z \in C_\lambda$ qualquer diferente de x. Como x, z pertencem a componente transitiva por cadeia C_λ, temos que existe uma ε-cadeia de x a z e outra de z a x. Seja $z = x_1, ..., x_n = x$ a ε-cadeia de z a x.

Afirmação (a): Temos que $z = x_1, ..., x_{n-1}, y$ é uma δ-cadeia de z a y.

De fato, se $1 \leqslant i \leqslant n-2$ temos que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon < \delta$, pois $x_1, ..., x_n$ é uma ε-cadeia para f, e

$$d(f(x_{n-1}), y) \leqslant d(f(x_{n-1}), x) + d(x, y) < \varepsilon + d(x, y) < \delta$$

Agora, tome $z' \in C'_\mu$ qualquer diferente de y. Como y, z' pertencem a componente transitiva por cadeia C'_μ, temos que existe uma ε-cadeia de y a z' e outra de z' a y. Seja $z' = y_1, \ldots, y_m = y$ a ε-cadeia de z' a y.

Afirmação (b): Temos que $z' = y_1, \ldots, y_{m-1}, x$ é uma δ-cadeia de z' a x.

De fato, se $1 \leqslant i \leqslant m-2$ temos que $d(f(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon < \delta$, pois $y_1, \ldots, y_m$ é uma ε-cadeia para f. E

$$d(f(y_{m-1}), x) \leqslant d(f(y_{m-1}), y) + d(x, y) < \varepsilon + d(x, y) < \delta$$

(c): Sejam $x = x'_1, \ldots, x'_l = z$ a δ-cadeia de x a z e $y = y'_1, \ldots, y'_r = z'$ a δ-cadeia de y a z'.

Assim, de *(a), (b) e (c)* temos que $z = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y = y_1^{'}, y_2^{'}, \ldots, y_r^{'} = z^{'}$ é uma δ-cadeia de z a $z^{'}$, e $z^{'} = y_1, \ldots, y_{m-1}, x = x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots, x_l^{'} = z$ é uma δ-cadeia de $z^{'}$ a z. Deste modo z e $z^{'}$ pertencem a mesma componente δ-transitiva, contradição, pois $z \in C_\lambda \subset C$ e $z^{'} \in C_\mu^{'} \subset C^{'}$ e C e $C^{'}$ são componentes δ-transitivas distintas.

Portanto, temos que se duas componentes transitivas por cadeia estão em componentes δ-transitivas distintas então elas estão seperadas por uma distância de pelo menos δ.

Suponhamos, por absurdo, que existam infinitas componentes δ-transitivas, então existiriam infinitos subconjuntos de X, onde quaisquer dois desses subconjuntos estão separados por uma distância de pelo menos $\delta > 0$. Portanto, teríamos que $diam X = \infty$, absurdo, pois X é compacto e logo o seu diâmetro é finito.

Assim, concluímos que existe apenas um número finito de componentes δ-transitivas.

□

Teorema 1.2. *Dados $\delta > 0$ e um homeomorfismo $f : X \to X$ onde X é um espaço métrico compacto, existem uma função de Lyapounov completa $g : X \to \mathbb{R}$ para f e valores regulares de g, $c_0 < c_1 < \ldots < c_n$, tais que se $\Lambda_i = R(f) \cap g^{-1}([c_{i-1}, c_i])$, então $\{\Lambda_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ são as componentes δ-transitivas de f.*

Demonstração. Sejam $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ as componentes δ-transitivas de f. Observe que, pelo lema anterior, existe apenas um número finito de componentes δ-transitivas.

Afirmação 1: Podemos ordenar as componentes $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ de modo que se $i < j$, então não existe δ-cadeia de Λ_i a Λ_j.

De fato, como Λ_1 e Λ_2 são componentes δ-transitivas distintas, temos que ou não existe δ-cadeia de Λ_1 a Λ_2 ou não existe δ-cadeia de Λ_2 a Λ_1. Assim, reorganizando os índices, se necessário, teremos que não existe δ-cadeia de Λ_1 a Λ_2.

Comparemos, agora, Λ_1, Λ_2 e Λ_3. Para isso vamos primeiro comparar Λ_2 e Λ_3. Como são componentes δ-transitivas distintas temos que ou não existe δ-cadeia de Λ_2 a Λ_3 ou não existe δ-cadeia de Λ_3 a Λ_2. No primeiro caso, a arrumação seria Λ_1, Λ_2 e Λ_3, no segundo caso, ainda teremos a sequência Λ_1, Λ_3 e Λ_2 e assim ainda devemos comparar Λ_1 e Λ_3, e assim como Λ_1 e Λ_3 são componentes δ-transitivas distintas, temos que ou não existe δ-cadeia de Λ_1 a Λ_3, ou não existe δ-cadeia de Λ_3 a Λ_1. Assim, teremos apenas as seguintes sequências aonde satisfazem a condição desejada: ou Λ_1, Λ_2 e Λ_3, ou Λ_1, Λ_3 e Λ_2, ou Λ_3, Λ_1 e Λ_2. Portanto, reorganizando os índices, se necessário, temos que se $i, j = 1, 2, 3$ e $i < j$, então não existe δ-cadeia de Λ_i a Λ_j.

Como o número de comonentes δ-transitivas é finito temos que podemos continuar esse processo de comparação até que consigamos ordenar as componentes $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ de modo que se $i < j$, então não existe δ-cadeia de Λ_i a Λ_j.

Seja $U_i = \{z \in X; \exists\ \delta\text{-cadeia de } \Lambda_i \text{ a } z\}$.

Afirmação 2: **(a)** U_i é aberto e **(b)** $f(\overline{U_i}) \subset U_i$

(a) Com efeito, seja $z \in U_i$ qualquer, então existe um $y \in \Lambda_i$ tal que existe uma δ-cadeia de y a z, seja $y = x_1, x_2, \ldots, x_n = z$ essa δ-cadeia.

Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $d(f(x_{n-1}), z) + \varepsilon < \delta$ (observe que um tal ε existe pois $d(f(x_{n-1}), z) < \delta$). Vamos mostrar que $B(z, \varepsilon) \subset U_i$. Para isso, tome $x \in B(z, \varepsilon)$ qualquer. Temos que, $y = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x$ é uma δ-cadeia de y a x, pois

$$d(f(x_{n-1}), x) \leqslant d(f(x_{n-1}), z) + d(z, x) < d(f(x_{n-1}), z) + \varepsilon < \delta$$

Assim, tem-se que $x \in U_i$. Portanto, como x foi tomado de modo arbitrário em $B(z, \varepsilon)$, temos que $B(z, \varepsilon) \subset U_i$. Daí, concluímos que U_i é aberto.

(b) Seja $z \in \overline{U_i}$ qualquer. Como f é contínua, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(B(z, \varepsilon)) \subset B(f(z), \delta)$. Como $z \in \overline{U_i}$, então existe $z_0 \in B(z, \varepsilon) \cap U_i$, logo $f(z_0) \in B(f(z), \delta)$, isto é, $d(f(z_0, f(z)) < \delta$. Como $z_0 \in U_i$, existe um $y \in \Lambda_i$ tal que existe uma δ-cadeia $y = y_1, y_2, \ldots, y_m = z_0$ de y a z_0. Assim, $y = y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m = z_0, f(z)$ é uma δ-cadeia de y a $f(z)$, pois $d(f(z_0, f(z)) < \delta$. Logo, existe uma δ-cadeia de Λ_i a $f(z)$, isto implica que $f(z) \in U_i$. Portanto, $f(\overline{U_i}) \subset U_i$.

Sejam agora,

$$A_i = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{U_i}), A_i^* = \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(\overline{X - \overline{U_i}})$$

temos que A_i e A_i^* é um par atrator-repulsor para cada $i = 1, \ldots, n$.

Afirmação 3: $\Lambda_i \subset A_i$.

Pelo Lema 1.2 temos que $R(f) = \bigcap_{m=1}^{\infty}(A_m \cup A_m^*)$. Assim,

$$\Lambda_i \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k = R(f) = \bigcap_{m=1}^{\infty}(A_m \cup A_m^*) \subset A_i \cup A_i^*$$

Agora, como $\Lambda_i \subset U_i$ e $A_i^* \subset X - \overline{U_i}$ temos que $\Lambda_i \cap A_i^* = \emptyset$, portanto $\Lambda_i \subset A_i$.

Pelo Lema 1.3, temos, para cada $i = 1, \ldots, n$, que existe uma função contínua $g_i : X \to [0,1]$ tal que $A_i = g_i^{-1}(0), A_i^* = g_i^{-1}(1)$ e $g_i(f(x)) < g_i(x), \forall x \in X - (A_i \cup A_i^*)$

Afirmação 4: Se $i < j$ então $\Lambda_j \subset A_i^*$. Portanto, $g_i(\Lambda_j) = \{1\}$.

De fato, se $i < j$ então pela afirmação 1 não existe δ-cadeia de Λ_i a Λ_j e como $U_i = \{z \in X; \exists\ \delta\text{-cadeia de } \Lambda_i \text{ a } z\}$ temos que $\Lambda_j \cap U_i = \emptyset$. Logo, $\Lambda_j \subset X - U_i$.

Pela proposição 1.4, $f(\Lambda_j) \subset \Lambda_j$, logo

$$\Lambda_j \subset f^{-1}(\Lambda_j) \Rightarrow f^{-1}(\Lambda_j) \subset f^{-2}(\Lambda_j) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f^{-n}(\Lambda_j) \subset f^{-(n+1)}(\Lambda_j) \Rightarrow \cdots$$

Daí,

$$\Lambda_j \subset f^{-1}(\Lambda_j) \subset f^{-2}(\Lambda_j) \subset \cdots \subset f^{-n}(\Lambda_j) \subset \cdots$$

Portanto, $\Lambda_j \subset f^{-n}(\Lambda_j), \forall n \geqslant 0$.

Agora, como $\Lambda_j \subset X - U_i$, temos que $\Lambda_j \subset f^{-n}(\Lambda_j) \subset f^{-n}(X - U_i) \subset f^{-n}(\overline{X - \overline{U_i}})$ para todo $n \geqslant 0$. Logo, $\Lambda_j \subset \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(\overline{X - \overline{U_i}}) = A_i^*$. E, também, como $A_i^* = g_i^{-1}(1)$, tem-se que $g_i(\Lambda_j) = \{1\}$.

Seja

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^i g_i(x)$$

Afirmação 5: $h(f(x)) \leqslant h(x), \forall x \in X$.

Como, para todo $i = 1, \ldots, n$, $g_i(f(x)) \leqslant g_i(x)$ para todo $x \in X$, temos que $h(f(x)) \leqslant h(x), \forall x \in X$.

Afirmação 6: Para $x \in R(f) = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$, $h(x)$ é um inteiro par entre 0 e 2^{n+1}.

De fato, seja $x \in R(f)$, então existe um $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in \Lambda_i$. Assim;

$$\begin{aligned}
0 \leqslant h(x) = 2g_1(x) + 2^2 g_2(x) + \ldots + 2^n g_n(x) &= \overbrace{2(g_1(x) + \ldots + 2^{n-1} g_n(x))}^{(*)} \\
&\leqslant 2(1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) \\
&= 2^n (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}) \\
&\leqslant 2^n \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 2^n(2) = 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

pois $g_i(x) \in [0,1]$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e para todo $x \in X$. Daí, temos que $h(x) \in [0, 2^{n+1}], \forall x \in R(f)$. E ainda, por (*), temos que $h(x)$ é um número par para todo $x \in R(f)$.

Ainda nos resta mostrar que $h(x)$ é um número inteiro para todo $x \in R(f)$. Temos que $R(f) = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i = \bigcap_{m=1}^{\infty} (A_m \cup A_m^*) \subset A_k \cup A_k^*, \forall k = 1, \ldots, n$. Assim, para cada $x \in R(f)$ e cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, temos que ou $x \in A_k$ ou $x \in A_k^*$, isto implica que ou $g_k(x) = 0$ ou $g_k(x) = 1$. Portanto, para cada $x \in R(f)$, tem-se que $h(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^i g_i(x)$ é um número inteiro, pois para cada $k = 1, \ldots, n$ ou $2^k g_k(x) = 0$ ou $2^k g_k(x) = 2^k$.

Afirmação 7: Se $x, y \in R(f)$, temos que $h(x) = h(y)$ se, e somente se, $g_i(x) = g_i(y), \forall i = 1, \ldots, n$.

Com efeito, a implicação ($\Leftarrow$) é imediata pela definição de h. Provemos então a implicação ($\Rightarrow$).

Suponhamos que $h(x) = h(y)$. Logo;

$$2g_1(x) + 2^2 g_2(x) + \ldots + 2^n g_n(x) = 2g_1(y) + 2^2 g_2(y) + \ldots + 2^n g_n(y)$$

onde para cada $i = 1, \ldots, n$, tem-se $g_i(x) = 0$ ou 1 e $g_i(y) = 0$ ou 1, pois $x, y \in R(f)$. Ainda, temos, pela afirmação provada acima, que $h(x)$ e $h(y)$ são inteiros pares entre 0 e 2^{n+1}.

Sejam $\{k_1 < k_2 < \ldots < k_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tais que $g_{k_i}(x) = 1$ e $k_{s+1}, \ldots, k_n \in \{1, \ldots, n\}$ distintos tais que $g_{k_i}(x) = 0$. E sejam $\{r_1 < r_2 < \ldots < r_l\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tais que $g_{r_i}(y) = 1$ e $r_{l+1}, \ldots, r_n \in \{1, \ldots, n\}$ distintos tais que $g_{r_i}(y) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 2^{k_1} + \ldots + 2^{k_s} &= 2^{r_1} + \ldots + 2^{r_l} \\ 2^{k_1}(1 + \ldots + 2^{k_s - k_1}) &= 2^{r_1}(1 + \ldots + 2^{r_l - r_1}) \end{aligned}$$

Assim, se $k_1 \neq r_1$ teríamos que um número par seria igual a um número ímpar, absurdo! Logo, $k_1 = r_1$. Daí,

$$\begin{aligned} 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_s} &= 2^{r_2} + \ldots + 2^{r_l} \\ 2^{k_2}(1 + \ldots + 2^{k_s - k_2}) &= 2^{r_2}(1 + \ldots + 2^{r_l - r_2}) \end{aligned}$$

Assim, se $k_2 \neq r_2$ teríamos que um número par seria igual a um número ímpar, absurdo! Logo, $k_2 = r_2$.

Como esse processo é finito chegaremos que $s = l$ e que $k_i = r_i, \forall i = 1, \ldots, s$. Logo, $g_{k_i}(x) = g_{r_i}(y) = g_{s_i}(y), \forall i = 1, \ldots, s$.

E ainda,

$$\begin{aligned} g_{k_{s+1}}(x) &= 0 = & g_{r_{s+1}}(y) \\ g_{k_{s+2}}(x) &= 0 = & g_{r_{s+2}}(y) \\ \vdots \quad & \quad \vdots & \vdots \\ g_{k_n}(x) &= 0 = & g_{r_n}(y) \end{aligned}$$

Portanto, $g_i(x) = g_i(y), \forall i = 1, \ldots, n$.

Note que se $i < j$, $x \in \Lambda_i$ e $y \in \Lambda_j$, então $h(x) \neq h(y)$ visto que $g_i(x) \neq g_i(y)$, pois $\Lambda_i \subset A_i$ e $\Lambda_j \subset A_i^*$.

Afirmação 8: Seja $g_0 : X \to [0,1]$ uma função de Lyapounov completa para f dada pelo teorema 1.1. Então $g : X \to [0,1]$ definida por $g(x) = g_0(x) + h(x)$ é a função de Lyapounov completa desejada.
(8.1): A função g definida acima é uma função de Lyapounov completa.
(i) Se $x \notin R(f)$ então $g(f(x)) < g(x)$.

Como g_0 é uma função de Lyapounov completa, temos que $g_0(f(x)) < g_0(x), \forall x \notin R(f)$. Também, pelo que provamos anteriormente $h(f(x)) \leqslant h(x), \forall x \in X$. Assim;

$$g(f(x)) = g_0(f(x)) + h(f(x)) < g_0(x) + h(x) = g(x), \forall x \notin R(f)$$

o que conclui (i).
(ii) Se $x, y \in R(f)$, então $g(x) = g(y)$ se, e somente se, $x \sim y$.

Provemos primeiramente a implicação ($\Rightarrow$). Sejam $k, l \in \mathbb{Z}_+$ tais que $h(x) = 2k$ e $h(y) = 2l$ (já vimos anteriormente que $h(x)$ com $x \in R(f)$ é um inteiro par entre 0 e 2^{n+1}). Então, como $g(x) = g(y)$, tem-se:

$$2(k-l) = 2k - 2l = h(x) - h(y) = g_0(y) - g_0(x)$$

E, como $g_0(x), g_0(y) \in [0,1]$, temos que $|g_0(y) - g_0(x)| \leqslant 1$. Logo, $2|k-l| = |g_0(y) - g_0(x)| \leqslant 1$.

Concluímos, assim, que, $k = l$ o que implica que $h(x) = h(y)$. Daí e do fato que $g(x) = g(y)$, temos que $g_0(x) = g_0(y)$, agora, como g_0 é Lyapounov completa, isto implica que $x \sim y$.

Reciprocamente, suponhamos que $x \sim y$. Como g_0 é Lyapounov completa temos que $g_0(x) = g_0(y)$. Assim, para mostrar que $g(x) = g(y)$ basta mostrar que $h(x) = h(y)$.

Suponhamos, por absurdo, que $h(x) \neq h(y)$, então existe algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g_i(x) \neq g_i(y)$. Logo, ou $g_i(x) = 0$ e $g_i(y) = 1$ ou $g_i(x) = 1$ e $g_i(y) = 0$, isto é, ou $x \in A_i$ e $y \in A_i^*$ ou $x \in A_i^*$ e $y \in A_i$, isto contradiz a proposição 1.3, pois $x \sim y$.

Portanto, $h(x) = h(y)$ o que implica que $g(x) = g(y)$.
(iii) $g(R(f))$ é um compacto que não é denso em nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$.

De fato, temos que a g_0 é contínua, pois é uma função de Lyapounov completa. Também, h é contínua, pois as $g_i's$ o são. Logo, g é contínua, e como $R(f)$ é compacto tem-se que $g(R(f))$ é compacto.

Agora, para cada $x \in R(f)$ temos que $g(x) = g_0(x) + h(x)$, onde $h(x)$ é um inteiro par entre 0 e 2^{n+1}.

Seja $\{p_1 < p_2 < \ldots < p_m\}$ o conjunto de todos os números inteiros pares entre 0 e 2^{n+1}. Assim;

$$g(R(f)) \subset g_0(R(f)) + h(R(f)) \subset g_0(R(f)) + p_1 \cup g_0(R(f)) + p_2 \cup \ldots \cup g_0(R(f) + p_m$$

Como $g_0(R(f))$ não é denso em nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$ e $(g_0(R(f)) + p_1) \cap (g_0(R(f)) + p_2) \cap \ldots \cap (g_0(R(f) + p_m) = \emptyset$ temos que $(g_0(R(f)) + p_1), (g_0(R(f)) + p_2), \ldots, (g_0(R(f) + p_m)$ não são densos em nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$ e, portanto, $g(R(f))$ não é denso em nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$.

Assim, de **(i), (ii)** e **(iii)**, temos que g é uma função de Lyapounov completa para f.

(8.2) Existem valores regulares para g, $c_0 < c_1 < \ldots < c_n$, tais que $\Lambda_i = R(f) \cap g^{-1}([c_{i-1}, c_i])$.

(i) Se $i \neq j$ então $g(\Lambda_i) \cap g(\Lambda_j) = \emptyset$.

Suponhamos, por absurdo, que existam $i < j$ pertencentes a $\{1, \ldots, n\}$ tais que existe $x \in g(\Lambda_i) \cap g(\Lambda_j)$. Logo, existem $x_i \in \Lambda_i$ e $x_j \in \Lambda_j$ tais que $g(x_i) = x = g(x_j)$.

Agora, como $x_i, x_j \in R(f)$, g é uma função de Lyapounov completa e $g(x_i) = g(x_j)$, temos que $x_i \sim x_j$, absurdo, pois como $i < j$ tem-se que $\Lambda_j \subset A_i^*$ e $\Lambda_i \subset A_i$, logo, pela proposição 1.3, tem-se não se pode ter $x_i \sim x_j$.

Portanto, se $i \neq j$ então $g(\Lambda_i) \cap g(\Lambda_j) = \emptyset$.

(ii) Temos que, se $x \in \Lambda_i$ e $y \in \Lambda_j$ com $i \neq j$, tem-se que $h(x) \neq h(y)$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $i < j$ e o resultado segue pelo fato de que $\Lambda_i \subset A_i$ e $\Lambda_j \subset A_i^*$.

(iii) Temos que se $x, y \in \Lambda_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$, então $h(x) = h(y)$.

Assim, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe um inteiro positivo k_i tal que $g(\Lambda_i) \subset [2k_i, 2k_i + 1]$. Observe que por (i), (ii) e (iii) tem-se que os intervalos $[2k_i, 2k_i + 1]$ são dois a dois disjuntos e nenhum desses intervalos intersecta nenhum dos intervalos da forma $(2k_i + 1, 2k_i + 2)$ com $i = 1, \ldots, n$. Logo, todos os pontos desses intervalos $(2k_i + 1, 2k_i + 2)$, com $i = 1, \ldots, n$, são valores regulares para g. Deste modo, tome $c_i \in (2k_i + 1, 2k_i + 2)$, temos, reordenando se necessário, os Λ_i' s, obtemos os valores regulares $c_0 < \ldots < c_n$ da maneira desejada.

$\square$

Observação 1.3. *Observe, pelo teorema acima, que as componentes δ-transitivas de f são compactas.*

Capítulo 2

A existência de δ-cadeias periódicas

2.1 Conjunto de rotação

Definição 2.1 (conjunto de rotação)**.** *Sejam $f : T^2 \to T^2$ um homeomorfismo homotópico a aplicação identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um lenvantamento para f. O conjunto de rotação para F é o conjunto dos pontos de acumulação do seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$*

$$\{\frac{F^n(x) - x}{n} | x \in \mathbb{R}^2 \text{ e } n \in \mathbb{Z}_+\} \tag{2.1}$$

e denotamos esse conjunto por $\rho(F)$.

Se $\upsilon \in \rho(F)$, então existem sequências $x_i \in \mathbb{R}^2$ e $n_i \in \mathbb{Z}_+$ com $\lim_{i\to\infty} n_i = +\infty$, tais que:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = \upsilon$$

Exceto quando explicitado contrário trataremos o conjunto de rotação para F, $\rho(F)$, como na hipóteses da definição 2.1. Observando que na referência [MZ] podemos definir o conjundo de rotação para aplicações contínuas $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tais que $F(x + k) = F(x) + k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^m$ da maneira análoga da definição 2.1.

Proposição 2.1. *Temos que*

$$\rho(F) = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{(\bigcup_{k\geqslant n} K_k(F))}$$

onde $K_k(F) = \{\frac{F^k(x) - x}{k} \mid x \in \mathbb{R}^2\}$.

Demonstração. Seja $v \in \rho(F)$, então existem uma sequência estritamente crescente $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$ e uma sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ tais que:

$$v = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}$$

Para cada $n \geqslant 1$ existe i_0 tal que $n_{i_0} \geqslant n$. Assim, para todo $i \geqslant i_0$ tem-se que $n_i \geqslant n_{i_0} \geqslant n$ o que implica que

$$\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \in \bigcup_{k\geqslant n}\{\frac{F^k(x) - x}{k} \mid x \in \mathbb{R}^2\}$$

Logo, $v \in \overline{\bigcup_{k\geqslant n}\{\frac{F^k(x) - x}{k} \mid x \in \mathbb{R}^2\}} = \overline{\bigcup_{k\geqslant n} K_k(F)}$ para cada $n \geqslant 1$, isto é, $v \in \bigcap_{n\geqslant 1}(\overline{\bigcup_{k\geqslant n} K_k(F)})$.

Portanto, provamos que $\rho(F) \subset \bigcap_{n\geqslant 1}(\overline{\bigcup_{k\geqslant n} K_k(F)})$.

Seja $y \in \bigcap_{n\geqslant 0}(\overline{\bigcup_{k\geqslant n} K_k(F)})$ então $y \in \overline{\bigcup_{k\geqslant n} K_k(F)} = \overline{A_n}, \forall n \geqslant 1$.

Deste modo, para cada $n \geqslant 1$, existe uma sequência $(y_m^n) \subset A_n$ que converge para y. Existe uma sequência (y_l) que converge para y tal que, para cada $l \geqslant 1$, temos que $y_l \in A_l$. Logo, $y \in \rho(F)$.

Portanto, $\bigcap_{n\geqslant 1}\overline{(\bigcup_{k\geqslant n} K_k(F))} \subset \rho(F)$. □

Observação 2.1. *Observe que pelo fato de* $F^k(x) - x = F^k(x+l) - (x+l), \forall l \in \mathbb{Z}^2$ *temos que:*

$$K_k(F) = \{\frac{F^k(x) - x}{k} \mid x \in I \times I\}$$

onde $I = [0, 1]$*. Portanto,* $K_k(F)$ *é compacto.*

Exemplo 2.1. *Seja* $v \in \mathbb{R}^2$ *qualquer. Defina* $F_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *da seguinte maneira*

$$F_v(z) = z + v$$

temos que F_v *é um levantamento de um homeomorfismo do toro* T^2*, chamado rotação de ângulo* v*. Tem-se que* $\rho(F_v) = \{v\}$

De fato, se tomarmos o homeomorfismo $f_v : T^2 \to T^2$ *definido por* $f_v = \pi \circ F_v \circ \pi^{-1}$ *onde* $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ *é aplicação de recobrimento, então* F_v *é um levantamento desse homeomorfismo.*

Provemos que $\rho(F_v) = \{v\}$*. Temos, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $z \in \mathbb{R}^2$*, que:*

$$\frac{F_v^n(z) - z}{n} = \frac{F_v^{n-1}(z+v) - z}{n} = \frac{F_v^{n-2}(z+2v)}{n} = \ldots = \frac{z + nv - z}{n} = v$$

Logo, $\rho(F_v) = \{v\}$*.*

Proposição 2.2. *Seja $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua tal que $F(x+k)=F(x)+k$ para todo $k\in\mathbb{Z}^2$. Sejam $p\in\mathbb{Z}^2$ e $q\in\mathbb{N}$ então $\rho(F^q-p)=q\rho(F)-p$.*

Demonstração. Seja $v\in\rho(F^q-p)$ então existem sequências $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ e $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ tais que $n_i\to\infty$ e

$$\lim_{i\to\infty}\frac{(F^q-p)^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i}=v$$

Então;

$$\begin{aligned} v=\lim_{i\to\infty}\frac{F^{qn_i}(x_i)-n_ip-x_i}{n_i} &= \lim_{i\to\infty}\frac{F^{qn_i}(x_i)-x_i}{n_i}-p\\ \Rightarrow\quad \frac{1}{q}v=\lim_{i\to\infty}\frac{F^{qn_i}(x_i)-x_i}{qn_i}-\frac{p}{q}&\\ \Rightarrow\quad v=q\lim_{i\to\infty}\frac{F^{qn_i}(x_i)-x_i}{qn_i}-p\in q\rho(F)-p&\end{aligned}$$

pois $\lim_{i\to\infty}\dfrac{F^{qn_i}(x_i)-x_i}{qn_i}\in\rho(F)$.

Daí, temos que $\rho(F^q-p)\subset q\rho(F)-p$.

Agora, seja $v\in\rho(F)$ então existem sequências $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ e $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ tais que $n_i\to\infty$ e

$$\lim_{i\to\infty}\frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i}=v$$

Seja k_i a parte inteira de $\frac{n_i}{q}$. Note que existe uma constante $M>0$ tal que para todo $z\in\mathbb{R}^2$ e $0\leqslant r\leqslant q-1$, $\|F^r(z)-z\|\leqslant M$, pois como para cada inteiro $0\leqslant r\leqslant q-1$, temos que $F^r(z+l)=F^r(z)+l$ tem-se que $\|F^r-id\|=\max_{z\in\mathbb{R}^2}\|F^r(z)-z\|=\max_{z\in[0,1]\times[0,1]}\|F^r(z)-z\|$. Escreva $n_i-qk_i=r$. Então:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i}-\frac{F^{qk_i}(x_i)-x_i}{qk_i}\right\| \leqslant &\quad \left\|\frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i}-\frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{qk_i}\right\|+\\ &+\ \left\|\frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{qk_i}-\frac{F^{qk_i}(x_i)-x_i}{qk_i}\right\|\\ = &\quad \left\|\frac{(n_i-r)(F^{n_i}(x_i)-x_i)-n_i(F^{n_i}(x_i)-x_i)}{n_iqk_i}\right\|+\\ &+\ \frac{1}{qk_i}\|(F^{qk_i+r}(x_i)-x_i)-(F^{qk_i}(x_i)-x_i)\|\\ = &\quad \frac{r}{qk_i}\left\|\frac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i}\right\|+\frac{1}{qk_i}\|F^r(F^{qk_i}(x_i))-F^{qk_i}(x_i)\|\end{aligned}$$

Agora, como $\|\dfrac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\| \to \|v\|$, $\dfrac{r}{qk_i} \to 0$, $\dfrac{1}{qk_i} \to 0$ quando $i \to \infty$ e $\|F^r(F^{qk_i}(x_i)) - F^{qk_i}(x_i)\| \leqslant M$, temos que:

$$\begin{aligned}
& v = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{qk_i}(x_i) - x_i}{qk_i} \\
\Rightarrow\ & v = \frac{1}{q} \lim_{i\to\infty} \frac{(F^q)^{k_i}(x_i) - x_i}{k_i} \\
\Rightarrow\ & \lim_{i\to\infty} \frac{(F^q)^{k_i}(x_i) - x_i}{k_i} = qv \\
\Rightarrow\ & qv - p = \lim_{i\to\infty} \frac{(F^q - p)^{k_i}(x_i) - x_i}{k_i} \in \rho(F^q - p)
\end{aligned}$$

Portanto, $q\rho(F) - p \subset \rho(F^q - p)$.

Concluímos, assim, o desejado. □

Observação 2.2. *Seja A um conjunto qualquer denotaremos por $Conv(A)$ o fecho convexo de A.*

Lema 2.1. *Temos que $\rho(F)$ está contido no fecho convexo de $K_n(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$*

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$ e um vetor $v \in \rho(F)$. Queremos mostrar que $v \in Conv(K_n(F))$. Como $Conv(K_n(F))$ é fechado para mostrar o desejado é suficiente mostrar que existe uma sequência em $K_n(F)$ que converge para v.

Tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $v \in \rho(F)$ existem sequências $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números naturais onde $n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$ e $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v$$

Para cada i, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} &= \frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{q-1} (F^n(F^{nk}(x_i)) - F^{nk}(x_i)) + \frac{1}{n_i}(F^r(F^{qn}(x_i)) - F^{qn}(x_i)) \\
&= (\frac{1}{qn}\frac{qn}{n_i}) \sum_{k=0}^{q-1} (F^n(F^{nk}(x_i)) - F^{nk}(x_i)) + \frac{r}{rn_i}(F^r(F^{qn}(x_i)) - F^{qn}(x_i)) \\
&= \frac{1}{q}(\frac{n_i - r}{n_i}) \sum_{k=0}^{q-1} (\frac{F^n(F^{nk}(x_i)) - F^{nk}(x_i)}{n}) + \frac{r}{n_i}(\frac{F^r(F^{qn}(x_i)) - F^{qn}(x_i)}{r}) \\
&= (1 - \frac{r}{n_i})\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (\frac{F^n(F^{nk}(x_i)) - F^{nk}(x_i)}{n}) + \frac{r}{n_i}(\frac{F^r(F^{qn}(x_i)) - F^{qn}(x_i)}{r})
\end{aligned}$$

onde q e r são respectivamente o quociente e o resto da divisão euclidiana de n_i por n.

Para cada i, considere o seguinte vetor

$$v_i = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{F^n(F^{nk}(x_i)) - F^{nk}(x_i)}{n}\right)$$

Pela definição de $K_n(F)$, temos que v_i é uma combinação linear de vetores de $K_n(F)$. Logo, v_i é uma sequência em $Conv(K_n(F))$.

Seja $M = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \|\frac{1}{i}(F^i - Id)\|_\infty$.

Assim;

$$\begin{aligned}
\|v_i - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\| &= \|v_i - [(1-\frac{r}{n_i})v_i + \frac{r}{n_i}(\frac{F^r(F^{qn}(x_i)) - F^{qn}(x_i))}{r})]\| \\
&= \|\frac{r}{n_i}v_i - \frac{r}{n_i}(\frac{F^r(F^{qn}(x_i)) - F^{qn}(x_i)}{r})\| \\
&\leqslant \frac{r}{n_i}(\|v_i\| + \|\frac{F^r(F^{qn}(x_i)) - F^{qn}(x_i)}{r}\|) \\
&\leqslant \frac{r}{n_i}(M+M) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Logo, $v_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} v$ onde $(v_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset Conv(K_n(F))$ e portanto $v \in Conv(K_n(F))$.

Concluímos, assim, que $\rho(F) \subset Conv(K_n(F)), \forall n \in \mathbb{N}^*$. □

Proposição 2.3. *Temos que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é conexo.*

Demonstração. Pelo lema 2.1, $\rho(F)$ está contido no conjunto compacto $Conv(K_1(F))$. Agora, como $\rho(F)$ é fechado temos que $\rho(F)$ é compacto.

Suponhamos, por absurdo, que $\rho(F)$ não é conexo. Então existem conjuntos fechados A e B disjuntos tais que $\rho(F) = A \cup B$, e portanto, A e B são também compactos.

Assim, existem vizinhanças abertas U e V de respectivamente A e B tais que $\overline{U}$ e $\overline{V}$ são compactos e disjuntos. Temos, assim, que $d(\overline{U}, \overline{V}) = \delta > 0$.

Tome $v \in A$ e $w \in B$. Pela definição de $\rho(F)$, existem sequências de naturais $n_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, k_j \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e sequências de pontos de $\mathbb{R}^2$ $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que:

$$v = \lim_{i\to\infty}\frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, w = \lim_{j\to\infty}\frac{F^{k_j}(y_j) - y_j}{k_j}$$

Como o conjunto $K_1(F)$ é compacto, temos que existe $M > 0$ tal que $\|F(t) - t\| \leqslant M, \forall t \in \mathbb{R}^2$.

Assim, se $z \in \mathbb{R}^2$ e $t = F^n(z)$ tem-se:

$$\begin{array}{rcl}
\|\dfrac{F^{n+1}(z)-z}{n+1} - \dfrac{F^n(z)-z}{n}\| & = & \|\dfrac{F(t)-z}{n+1} - \dfrac{t-z}{n}\| \\
& \leqslant & \|\dfrac{F(t)-z}{n+1} - \dfrac{F(t)-z}{n}\| + \|\dfrac{F(t)-z}{n} - \dfrac{t-z}{n}\| \\
& \leqslant & \|F(t)-z\|\|\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\| + \dfrac{\|F(t)-t\|}{n} \\
& \leqslant & \|F(t)-z\|(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) + \dfrac{M}{n} \\
& \leqslant & \|F(t)-z\|\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{M}{n} = \dfrac{1}{n}(\|\dfrac{F^{n+1}(z)-z}{n+1}\| + M)
\end{array}$$

Temos;

$$\begin{array}{rcl}
\|F^{n+1}(z)-z\| & \leqslant & \|F^{n+1}(z)-F^n(z)\| + \|F^n(z)-F^{n-1}(z)\| + \ldots + \|F(z)-z\| \\
& = & \|F(F^n(z)) - F^n(z)\| + \|F(F^{n-1})(z) - F^{n-1}(z)\| + \ldots + \|F(z)-z\| \\
& \leqslant & (n+1)M
\end{array}$$

o que implica que:

$$\|\frac{F^{n+1}(z)-z}{n+1} - \frac{F^n(z)-z}{n}\| \leqslant \frac{1}{n}(\frac{(n+1)M}{n+1} + M) = \frac{2M}{n}$$

Agora, como $\rho(F)$ está contido no aberto $U \cup V$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{F^n(z)-z}{n} \in U \cup V$ para todo $n \geqslant N$ e para todo $z \in \mathbb{R}^2$.

Tome i tal que $\dfrac{2M}{n_i} < \delta$, $n_i \geqslant N$, $\dfrac{F^{n_i}(x_i)-x_i}{n_i} \in U$. Tome j tal que $k_j \geqslant n_i$ e $\dfrac{F^{k_j}(y_j)-y_j}{k_j} \in V$.

Visto que

$$\|\frac{F^{n+1}(x_i)-x_i}{n+1} - \frac{F^n(x_i)-x_i}{n}\| \leqslant \frac{2M}{n} \leqslant \frac{2M}{n_i} < \delta = d(\overline{U}, \overline{V})$$

para todo $n \geqslant n_i$, tem-se que $\dfrac{F^n(x_i)-x_i}{n} \in U, \forall n \geqslant n_i$.

Em particular, $\dfrac{F^{k_j}(x_i)-x_i}{k_j} \in U$.

Tome uma curva ligando x_i com y_j. A imagem desta curva pela aplicação $\dfrac{F^{k_j}-id}{k_j}$ é uma curva ligando $\dfrac{F^{k_i}(x_i)-x_i}{k_j} \in U$ com $\dfrac{F^{k_j}(y_j)-y_j}{k_j} \in V$, que comtradiz o fato que $\dfrac{F^n(z) - z}{n} \in U \cup V$ para todo $n \geqslant N$ e para todo $z \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, $\rho(F)$ é conexo. $\square$

Proposição 2.4. *O conjunto $\rho(F)$ é convexo.*

Usaremos a proposição acima no próximo capítulo. Para uma prova dessa proposição consultar a referência [MZ].

2.2 A existência de δ-cadeias periódicas

Para provar o lema 2.3 abaixo usaremos os dois resultados a seguir sem demonstra-los.

Teorema 2.1. *Sejam $F_1, F_2, \ldots, F_m$ conjuntos finitos de pontos do $\mathbb{R}^2$ disjuntos não vazios e seja U um subconjunto aberto do plano que contém uma vizinhança convexa de cada um dos conjuntos F_j com $j = 1, \ldots, m$. Então, se $C > \frac{2}{\sqrt{3}}$, existem arcos poligonais disjuntos $A_1, A_2 \ldots, A_m$ (podendo ser degenerados) tais que $F_j \subset A_j \subset U$ e $diam A_j \leqslant C diam F_j, \forall j = 1, \ldots, m$*

Para uma demonstração consultar a referência [Ox].

Lema 2.2 (Lema de Brouwer's para translação de arcos)**.** *Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo livre de pontos fixos que preserva orientação. Então h não possui ponto periódico.*

Para uma demonstração consultar a referência [Br].

A seguir assumiremos sempre que $f : T^2 \to T^2$ é um homeomorfismo homotópico à aplicação identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um levantamento de f, isto é, se $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ é a aplicação de recobrimento então $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Lema 2.3. *Se F não tem pontos fixos, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que não existem ε-cadeias periódicas para F.*

Demonstração. Seja $\delta = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|F(x) - x\|$. Esse mínimo é assumido, pois cada $k, l \in \mathbb{Z}$, temos que $\delta_{kl} = \min_{[k,k+1]\times[l,l+1]} \|F(x) - x\|$ é assumido e são todos iguais. Logo, $\delta = \delta_{kl}, \forall k, l \in \mathbb{Z}$.

Agora, como F, por hipótese, não possui pontos fixos temos que $\delta > 0$.

Suponhamos, por absurdo, que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma ε-cadeia periódica para F. Tome $C > \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $\varepsilon = \gamma = \frac{\delta}{C}$

Seja $z = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = z$ uma ε-cadeia periódica para F. Sejam $F_1 = \{z_1, F(z_0)\}, F_2 = \{z_2, F(z_1)\}, \ldots, F_n = \{z_n, F(z_{n-1})\}$. Temos que $\|z_i - F(z_{i-1})\| < \varepsilon = \gamma$, pois $z_0, \ldots, z_n$ é uma ε-cadeia periódica para F.

Pelo Teorema 2.1, temos, tomando U um subconjunto aberto do plano que contém uma vizinhança convexa de cada um dos $F_j's$ (isto é possível visto que cada um dos $F_j's$ é finito), que existem arcos poligonais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dois a dois disjuntos tais que $F_j \subset \alpha_j \subset U$ e $diam\alpha_j \leqslant CdiamF_j, \forall j = 1, \ldots, n$. Daí;

$$diam\alpha_j \leqslant CdiamF_j \leqslant C\|z_j - F(z_{j-1})\| < C\gamma < C\frac{\delta}{C} = \delta, \forall j = 1, \ldots, n.$$

isto é, $diam\alpha_j < \delta, \forall j = 1, \ldots, n$. Observe que o arco α_j é o segmento que liga $F(z_{j-1})$ a z_j, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Por isotopia numa vizinhança desses arcos nós podemos construir uma pertubação G de F satisfazendo:
(1) $\|F(x) - G(x)\| < \delta, \forall x \in \mathbb{R}^2$
(2) $G(z_{i-1}) = z_i$

Agora, temos que z é um ponto periódico de G com período n, pois $G^n(z) = G^{n-1}(G(z)) = G^{n-1}(z_1) = G^{n-2}(G(z_1)) = G^{n-2}(z_2) = \ldots = G(z_{n-1}) = z_n = z$.

Agora, pelo Lema 2.2, como G possui um ponto periódico, tem-se que G possui um ponto fixo p. Então;

$$\|F(p)-p\| \leqslant \|F(p)-G(p)\|+\|G(p)-p\| = \|F(p)-G(p)\| < \delta = \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|F(x)-x\|$$

absurdo!

Portanto, existe um $\varepsilon > 0$ tal que não existem ε-cadeia periódicas para F. □

Lema 2.4. *Seja Λ um subconjunto compacto de $R(f)$, invariante por f e δ-transitivo. Então existe uma constante $K > 0$ tal que para qualquer x_0 e $y_0 \in \Lambda$ e $x \in \pi^{-1}(x_0)$, existe uma δ-cadeia para F de x a um ponto $y \in \pi^{-1}(y_0)$ com $\|y - x\| < K$.*

Demonstração. Fixe $w \in \pi^{-1}(\Lambda)$ e defina, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o seguinte conjunto

$$Q_n = \{z \in \Lambda | \exists\ \delta\text{-cadeia para } f \text{ de } \pi(w) \text{ a } z \text{ de comprimento} < n\}$$

Observe que $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_n \subset \ldots$.
Afirmação 1: Q_n é aberto em Λ.

De fato, seja $z \in Q_n$ então existe um δ-cadeia para f, $\pi(w) = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_m = z$ onde $m < n$. Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $d(f(x_{m-1}), z) + \varepsilon < \delta$. Vamos mostrar que $B(z, \varepsilon) \cap \Lambda \subset Q_n$.

Seja $y \in B(z,\varepsilon) \cap \Lambda$. Temos que $\pi(w) = x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y$ tem comprimento $m < n$ e é uma δ-cadeia para f, pois $d(f(x_{m-1}), y) \leqslant d(f(x_{m-1}), z) + d(y,z) < d(f(x_{m-1}), z) + \varepsilon < \delta$. Logo, $y \in Q_n$.

Portanto, $B(z,\varepsilon) \cap \Lambda \subset Q_n$ e com isso, temos que Q_n é aberto em Λ.

Afirmação 2: $\Lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$.

Com efeito, como qualquer dois pontos de Λ são δ-equivalentes e $\pi(w) \in \Lambda$, temos que $\Lambda \subset \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$.

Por outro lado, observe que $Q_n \subset \Lambda, \forall n \geqslant 1$. Portanto, $\bigcup_{n \geqslant 1} Q_n \subset \Lambda$.

Concluímos, assim, que $\Lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$.

Afirmação 3: Existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\Lambda = Q_N$.

De fato, como Λ é compacto e $\bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$ é uma cobertura aberta de Λ, temos que Λ possui uma subcobertura finita, isto é, existem $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ tais que $\Lambda = Q_{n_1} \cup Q_{n_2} \cup \ldots \cup Q_{n_k}$. Agora, como $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_n \subset \ldots$, então tomando $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{n_i\}$ teremos que $\Lambda = Q_N$.

Portanto, dado $y_0 \in \Lambda = Q_N$ existe uma δ-cadeia de $\pi(w)$ a y_0 de comprimento menor que N.

Agora, levantando essa δ-cadeia para $\mathbb{R}^2$, começando de $\pi(w)$, nós obtemos uma δ-cadeia para F de w a algum $y' \in \pi^{-1}(y_0)$, seja $w = x_1, x_2, \ldots, x_m = y'$ essa δ-cadeia.

Seja $P = \sup_{v \in \mathbb{R}^2} \|F(v) - v\|$.

Como a δ-cadeia de w a y' tem comprimento menor que N tem-se:

$$\begin{aligned}
\|w - y'\| &\leqslant \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_3\| + \ldots + \|x_{m-2} - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_m\| \\
&\leqslant \|F(x_1) - x_1\| + \|F(x_1) - x_2\| + \ldots + \|F(x_{m-1}) - x_{m-1}\| + \\
&\quad + \|F(x_{m-1}) - x_m\| \\
&\leqslant (\|F(x_1) - x_1\| + \ldots + \|F(x_{m-1}) - x_{m-1}\|) + (\|F(x_1) - x_2\| + \\
&\quad + \|F(x_2) - x_3\| + \ldots + \|F(x_{m-1}) - x_m\|) \\
&< (m-1)P + (m-1)\delta < m(P+\delta) < N(P+\delta).
\end{aligned}$$

Daí, $\|w - y'\| < C_1 = N(P+\delta)$.

Por um argumento similar tomando, em vez de Q_n, $H_n = \{z \in \Lambda | \exists\ \delta$-cadeia para f de z a $\pi(w)$ de comprimento $< n\}$, temos que $\bigcup_{n \geqslant 1} H_n$ é uma cobertura aberta de Λ que, por sua vez, como $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots$ e Λ é compacto tem-se que existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tal que $\Lambda = H_{N'}$. Daí, dado $x_0 \in \Lambda = H_{N'}$ existe uma δ-cadeia para f de x_0 a $\pi(w)$ de comprimento menor que N'. Agora, levantando essa δ-cadeia para $\mathbb{R}^2$, nós obtemos uma δ-cadeia para F de um ponto $x' \in \pi^{-1}(x_0)$ a w. Da mesma forma, chegamos que $\|x' - w\| < N'(P+\delta) = C_2$.

Agora, juntando a δ-cadeia de $x^{'}$ a w e a δ-cadeia de w a $y^{'}$ obtemos uma δ-cadeia de $x^{'}$ a $y^{'}$ onde:

$$\|y^{'} - x^{'}\| \leqslant \|y^{'} - w\| + \|x^{'} - w\| < C_1 + C_2 = K$$

Agora, dado $x \in \pi^{-1}(x_0)$ transladamos a δ-cadeia de $x^{'}$ a $y^{'}$ pelo vetor inteiro $x - x^{'}$ e assim obtemos uma δ-cadeia de x a y, onde $y = y^{'} + (x - x^{'}$, que satisfaz $\pi(y) = y_0$ e $\|y - x\| = \|y^{'} - x^{'}\| < K$. (Note que $x - x^{'}$ é um vetor inteiro, pois $x, x^{'} \in \pi^{-1}(x_0)$, isto é, estão na mesma fibra). $\square$

Definição 2.2. *Sejam $\Lambda \subset T^2$ um subconjunto compacto e invariante por $f : T^2 \to T^2$, e F um levantamento de f. Chamaremos de conjunto de rotação de F sobre Λ, e denotaremos por $\rho(F, \Lambda)$, o conjunto dos pontos de acumulação do seguinte conjunto*

$$\{\frac{F^n(x) - x}{n} | \pi(x) \in \Lambda, n > 0\} \tag{2.2}$$

O teorema a seguir será utilizado, sem demonstração, na prova da proposição 2.5.

Teorema 2.2. *Um ponto está no interior do fecho convexo de um conjunto do plano se, e só se, está no interior do fecho convexo de quatro ou menos pontos do conjunto.*

Para uma prova consultar a referência [HDK].

Proposição 2.5. *Seja $\Lambda \subset T^2$ um subconjunto compacto de $R(f)$, invariante por f e suponha que para algum $\delta > 0$ tem-se que Λ é δ-transitivo. Se o zero está no interior do fecho convexo de $\rho(F, \Lambda)$, então existe uma δ-cadeia periódica para F.*

Demonstração. Como, por hipótese, o zero está no interior do fecho convexo de $\rho(F, \Lambda)$, pelo teorema 2.2, temos que existem vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 em $\rho(F, \Lambda)$ tais que o zero está no interior do fecho convexo desses vetores.

Escolha, para cada $i = 1, \ldots, 4$, vizinhanças U_i de v_i suficientemente pequenas de modo que se $v_i^{'} \in U_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, tem-se que o zero continua no interior do fecho convexo de $v_1^{'}, v_2^{'}, v_3^{'}, v_4^{'}$.

Fixe $z_0 \in \Lambda$ e $z \in \pi^{-1}(z_0)$. Como $v_1 \in \rho(F, \Lambda)$, então existe $x_i^{'}$ em $\mathbb{R}^2$ e $n_i > i$ tais que $\pi(x_i^{'}) \in \Lambda$ e $\lim_{i\to\infty} \dfrac{F^{n_i}(x_i^{'}) - x_i^{'}}{n_i} = v_1$.

Agora, pelo lema 2.4, temos que existe um ponto $x_i \in \pi^{-1}(\pi(x_i^{'}))$ tal que existe uma δ-cadeia de z a x_i e $\|x_i - z\| < K^{'}$ para algum $K^{'} > 0$. Devemos verificar que $\lim_{i\to\infty} \dfrac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v_1$. Para isso, observe que para cada $x_i \in \pi^{-1}(\pi(x_i^{'}))$ existe $(m_i, m_i^{'}) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x_i = x_i^{'} + (m_i, m_i^{'})$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} &= \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i^{'} + (m_i, m_i^{'})) - x_i^{'} - (m_i, m_i^{'})}{n_i} \\
&= \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i^{'}) + (m_i, m_i^{'}) - x_i^{'} - (m_i, m_i^{'})}{n_i} \\
&= \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i^{'}) - x_i^{'}}{n_i} = v_1
\end{aligned}$$

Como $z_0 \in \Lambda$, $\pi(F^{n_i}(x_i)) = f^{n_i}(\pi(x_i)) \in \Lambda$ (pois Λ é invariante por f) e $F^{n_i}(x_i) \in \pi^{-1}(\pi(f^{n_i}(x_i)))$ temos, pelo lema 2.4, que existe uma δ-cadeia de $F^{n_i}(x_i)$ a um ponto $z_i^{'} \in \pi^{-1}(z_0)$ e $\|F^{n_i}(x_i) - z_i^{'}\| < K^{''}$ para algum $K^{''} > 0$.

Tome $K = \max\{K^{'}, K^{''}\}$. Assim, temos que existem $x_i \in \mathbb{R}^2$ e $n_i > i$ tais que:

(1) $\lim_{i\to\infty} \dfrac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v_1$ (pois $v_1 \in \rho(F, \Lambda)$)
(2) Existe uma δ-cadeia de z a x_i com $\|x_i - z\| < K$
(3) Existe uma δ-cadeia de $f^{n_i}(x_i)$ a $z_i^{'} \in \pi^{-1}(z_0)$ com $\|F^{n_i}(x_i) - z_i^{'}\| < K$

Observe que juntando a δ-cadeia de z a x_i, o segmento de órbita de x_i a $F^{n_i}(x_i)$ e a δ-cadeia de $F^{n_i}(x_i)$ a $z_i^{'}$, obtemos uma δ-cadeia para F de z a $z_i^{'}$.

Temos, de (1), (2) e (3), que:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{z_i^{'} - z}{n_i} - \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}\right\| &= \left\|\frac{z_i^{'} - z - F^{n_i}(x_i) + x_i}{n_i}\right\| \\
&\leqslant \frac{\|x_i - z\|}{n_i} + \frac{\|F^{n_i}(x_i) - z_i^{'}\|}{n_i} \leqslant \frac{2K}{n_i} \xrightarrow{i\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{i\to\infty} \dfrac{z_i^{'} - z}{n_i} = \lim_{i\to\infty} \dfrac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v_1$. Daí, como $\lim_{i\to\infty} \dfrac{z_i^{'} - z}{n_i} = v_1 \in U_1$, podemos escolher i suficientemente grande tal que $\dfrac{z_i^{'} - z_i}{n_i} \in U_1$.

Seja $w_1 = z_i^{'} - z$ e $m_1 = n_i$. Observe, pelo visto acima, que existe uma δ-cadeia de z a $z + w_1$ tal que $\dfrac{w_1}{m_1} \in U_1$.

Como $z_i^{'}, z \in \pi^{-1}(z_0)$, temos que $\pi(z_i^{'}) = \pi(z) = z_0$ e, portanto, $w_1 = z_i^{'} - z$ é um vetor inteiro em $\mathbb{R}^2$.

De maneira análoga, encontramos vetores inteiros w_2, w_3 e w_4 e números naturais m_2, m_3 e m_4 tais que existem δ-cadeias de z a $z + w_i, i = 2, 3, 4$ e que $\dfrac{w_i}{m_i} \in U_i, i = 2, 3, 4$.

Agora, como o zero está no interior do fecho convexo de v_1, v_2, v_3, v_4 e $\frac{w_i}{m_i} \in U_i, i = 1, 2, 3, 4$, temos que o zero está no interior do fecho convexo de $\frac{w_1}{m_1}, \frac{w_2}{m_2}, \frac{w_3}{m_3}, \frac{w_4}{m_4}$. Disto e do fato que w_1, w_2, w_3 e w_4 serem vetores inteiros de $\mathbb{R}^2$, temos que existem inteiros positivos não nulos A, B, C e D tais que $Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4 = 0$.

Sabemos que existe uma δ-cadeia de z a $z + w_1$. Transladando essa δ-cadeia pelo vetor inteiro w_1 obtemos uma δ-cadeia de $z+w_1$ a $z+2w_1$. Agora, transladando essa nova δ-cadeia pelo vetor w_1 obtemos, agora, uma δ-cadeia de $z + 2w_1$ a $z + 3w_1$. Continuando esse processo encontramos uma δ-cadeia de $z + kw_1$ a $z + (k + 1)w_1$ para cada $k = 0, 1, \ldots, A - 1$. Agora, juntando essas δ-cadeias obtemos uma δ-cadeia de z a $z + Aw_1$.

Por esse mesmo processo, encontramos δ-cadeias de z a $z + Bw_2$, de z a $z + Cw_3$ e de z a $z + Dw_4$, pelo fato de existirem as δ-cadeias de z a $z + w_2$, de z a $z + w_3$ e de z a $z + w_4$.

Transladando a δ-cadeia de z a $z + Aw_1$ pelo vetor inteiro Bw_2 obtemos uma δ-cadeia de $z + Bw_2$ a $z + Aw_1 + Bw_2$. Juntando a δ-cadeia de z a $z + Bw_2$ e a δ-cadeia de $z + Bw_2$ a $z + Aw_1 + Bw_2$ obtemos uma δ-cadeia de z a $z + Aw_1 + Bw_2$. Transladando essa nova δ-cadeia pelo vetor inteiro Cw_3 obtemos uma δ-cadeia de $z + Cw_3$ a $z + Aw_1 + Bw_2 + Cw_3$. Agora, juntando a δ-cadeia de z a $z + Cw_3$ com essa nova δ-cadeia obtemos uma δ-cadeia de z a $z + Aw_1 + Bw_2 + Cw_3$. Transladando essa nova δ-cadeia pelo vetor inteiro Dw_4 obtemos uma δ-cadeia de $z + Dw_4$ a $z + Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4$. Finalmente, juntando a δ-cadeia de z a $z + Dw_4$ como essa nova δ-cadeia obtemos um δ-cadeia de z a $z + Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4 = z$ como o desejado.

$\square$

Capítulo 3

A existência de pontos periódicos

3.1 Conceitos preliminares

3.1.1 Sobre inclinação

Definição 3.1. *Seja γ uma curva simples fechada essencial no toro vamos definir a inclinação de γ como sendo a inclinação do segmento de reta que liga as extremidades de algum levantamento de γ.*

Observação 3.1. *A inclinação de γ independe da escolha do levantamento de γ.*

Lema 3.1. *Dada uma curva simples fechada essencial no toro , γ, a inclinação dessa curva é racional.*

Demonstração. Tome $\widetilde{\gamma}$ um levantamento de γ e r a reta que é homotópica a $\widetilde{\gamma}$. Temos que $\widetilde{\gamma}(0) - \widetilde{\gamma}(1)$ é um inteiro, logo a inclinação do segmento de reta que liga esses pontos tem inclinação racional

Portanto, concluímos que γ dever ter inclinação racional. $\square$

3.1.2 Sobre índice

Nesta subseção iremos definir o índice de uma aplicação contínua e resultado sobre isso. Para uma prova consultar as referências [M], [B] e [BG].

Definição 3.2. *Sejam M e N variedades de mesma dimensão e seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável onde M é compacta e N é conexa.*

Definimos o grau de f com respeito ao valor regular y:

$$deg(f;y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sinal df_x$$

onde sinal de df_x é $+1$ se df_x preserva orientação e -1 se df_x inverte orientação.

A seguir sempre, a menos de menção contrária, consideraremos M^n e N^n variedades de mesma dimensão onde M é compacta e N é conexa.

Pode-se mostrar que $deg(f;y)$ independe da escolha da escolha do valor regular y.

Definição 3.3. *Definimos o grau de f como sendo $deg(f) = deg(f;y)$ onde y é um valor regular de f qualquer.*

Lema 3.2. *Dado uma aplicação $g_1 \in C^2(M^n, N^n)$ existe um aberto $U \subset C^2(M^n, N^n)$ contendo g_1 tal que para todo $g_2 \in U$ tem-se que $deg(g_1, y) = deg(g_2, y)$ para todo y valor regular comum de g_1 e g_2.*

Pelo lema 3.2, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 3.4. *Seja $f : M^n \to N^n$ uma aplicação contínua e $y \in N$ quaisquer. Definimos o grau de f no ponto y como sendo*

$$deg(f;y) = deg(g;y)$$

onde g é uma aproximação de f diferenciável tal que y é um valor regular de g.

Teorema 3.1. *Se $f, g \in C^2(M^n, N^n)$ são homotópicas então $deg(f) = deg(g)$.*

Observação 3.2. *Vamos denotar por $Fix(f)$ como sendo o conjunto de pontos fixos de f.*

Definição 3.5. *Sejam $f : M \to M$ uma aplicação contínua e $\Gamma \subset Fix(f)$. Seja $\gamma : S^{n-1} \to M$ tal que $\gamma(S^{n-1}) \cap \Gamma = \emptyset$ e $\gamma(S^{n-1})$ é difeomorfo ao bordo de um disco fechado $D \subset M$ $n-$dimensional.*

Vamos considerar primeiramente o caso em que $M = \mathbb{R}^n$. Neste caso, considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} v_f : \gamma(S^{n-1}) &\to S^{n-1} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|} \end{aligned}$$

Deste modo definimos o índice de f em relação a Γ por

$$Ind(f;\Gamma) = deg(v_f)$$

Agora, considere M uma variedade $n-$dimensional qualquer. Seja $\phi : M \to V \subset M$ uma parametrização com $\Gamma \subset V$ e onde $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \Gamma$. Deste modo definimos o índice de f em relação a Γ por

$$Ind(f;\Gamma) = Ind(\phi^{-1} \circ f \circ \phi, \phi^{-1}(\Gamma))$$

Observação 3.3. *O $Ind(f;\Gamma)$ independe da escolha da curva γ com as referidas propriedades da definição acima. Portanto, $Ind(f;\Gamma)$ é invariante por homotopia.*

Proposição 3.1. *Sejam $f : T^2 \to T^2$ uma aplicação contínua que preserva orientação e $\Gamma \subset Fix(f)$. Seja $D \subset T^2$ um disco topológico tal que $\Gamma \subset D$, $\partial D \cap Fix(f) = \emptyset$ e $f(D) \subset D$. Então $Ind(f;\Gamma) = +1$.*

Definição 3.6. *Seja $f : T^2 \to T^2$ um homeomorfismo. Dados pontos fixos p_1 e p_2 de f em T^2 dizemos que estão em uma mesma classe de Nielsen de f se para todo levantamento F de f que fixa os pontos de $\pi^{-1}(p_1)$, F também fixa os pontos de $\pi^{-1}(p_2)$.*

Iremos usar o seguinte teorema abaixo na demonstração da proposição da próxima seção. Para uma prova consultar referência [B].

Teorema 3.2. *Se $f : T^2 \to T^2$ um homeomorfismo homotópico a uma aplicação sem pontos fixos, então a soma dos índices de todos os pontos fixos em qualquer uma classe de Nielsen para f dada é zero.*

3.2 O teorema principal

Como anteriormente estamos considerando $f : T^2 \to T^2$ um homeomorfismo homotópico à aplicação identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f.

Proposição 3.2. *Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 pontos extremos do conjunto convexo $\rho(F)$ onde o zero está no interior do fecho convexo desses vetores. Então F possui um ponto fixo.*

Demonstração. Por resultados de [MZ], sendo v_i é um ponto extremo do conjunto convexo $\rho(F)$ existe um ponto não errante $x_i \in T^2$ tal que se $x \in \pi^{-1}(x_i)$ tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = v_i$$

Usaremos apenas o fato que um tal x_i existe com $x_i \in R(f)$.

Para mostrar que F tem um ponto fixo é suficiente, pelo lema 2.3, mostrar que para todo $\delta > 0$ existe uma δ-cadeia periódica para F.

Dado $\delta > 0$, seja $R(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ uma decomposição de $R(f)$ por componentes δ-transitivas dada no teorema 1.2, e seja $g : T^2 \to \mathbb{R}$ uma função de Lyapounov completa compatível com esta decomposição, dada por esse mesmo teorema.

Nós vamos mostrar que existem um Λ_j da decomposição do $R(f)$ dada acima e pontos y_1, y_2, y_3 e y_4 em Λ_j tais que sempre que $y \in \pi^{-1}(y_i)$ tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n} = v_i \in \rho(F, \Lambda_j)$$

para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Agora, como zero está contido no interior de $Conv(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ e este por sua vez está contido em $Conv(\rho(F, \Lambda_j))$ então $0 \in intConv(\rho(F, \Lambda_j))$.

Deste modo, pela proposição 2.5, existe uma δ-cadeia periódica para F.

Como para todo $\delta > 0$ encontramos uma δ-cadeia periódica para F, então, pelo lema 2.3, tem-se que F tem um ponto fixo.

Assim para demonstrarmos o desejado devemos encontrar o tal Λ_j e os tais $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \Lambda_j$.

(I) Queremos escolher uma aproximação $g_0 : T^2 \to \mathbb{R}$ de g e valores regulares $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ tais que as variedades com bordo $M_i = g_0^{-1}((-\infty, c_i])$ satisfazem:

(1) $f(M_i) \subset int(M_i)$

(2) $\Lambda_i \subset M_i - M_{i-1}$

Para isso sejam $d_0 < d_1 < \ldots < d_m$ os valores regulares de g tais que $\Lambda_i = R(f) \cap g^{-1}([d_{i-1}, d_i])$.

Escolha vizinhanças $V_0, V_1, \ldots, V_m$ respectivamente dos valores regulares $d_0, d_1, \ldots, d_m$ que não interceptam $g(R(f))$.

Vamos tomar a aproximação $g_0 : T^2 \to \mathbb{R}$ de g da seguinte forma:

(i) $g_0(x) = g(x)$ para todo $x \in R(f)$.

(ii) g_0 é de classe C^∞ nas vizinhanças $g^{-1}(V_1), g^{-1}(V_2), \ldots, g^{-1}(V_m)$.

(iii) Se $x \notin R(f)$ então $g_0(f(x)) < g_0(x)$.

Pelo teorema de Sard, tem-se que o conjunto de valores regulares (no sentido diferenciável) de g_0 é denso em $g_0(g^{-1}(V_1) \cup \ldots \cup g^{-1}(V_m))$. Daí, para cada vizinhança V_i, existe um valor regular (no sentido diferenciável) para g_0, c_i, contido nessa vizinhança. Como as vizinhanças $V_1, \ldots, V_m$ não interceptam $g(R(f))$ então esses valores regulares no sentido diferenciável para g_0 são ainda valores regulares no sentido de Lyapounov. Além disso, $\Lambda_i = R(f) \cap g^{-1}([d_{i-1}, d_i]) = R(f) \cap g_0^{-1}([c_{i-1}, c_i])$ e $c_1 < \ldots < c_m$, pois $g(x) = g_0(x)$, para todo $x \in R(f)$, para cada $i = 1, \ldots, m$, temos que V_i não intercepta o $g(R(f))$ e $c_i \in V_i$.

Agora, como, para cada $i = 1, \ldots, m$, c_i é um valor regular para g_0 então tem-se que $g_0^{-1}(c_i)$ é uma subvariedade compacta de T^2 de codimensão 1.

Deste modo, temos que g_0 é também uma função de Lyapounov completa para f.

Provemos, para cada $i = 1, \ldots, m$, que $f(M_i) \subset int(M_i)$ e $\Lambda_i \subset M_i - M_{i-1}$.

(1) $f(M_i) \subset int(M_i)$.

De fato, seja $x \in M_i$.

Se $x \notin R(f)$, então $g_0(f(x)) < g_0(x) \leqslant c_i$. Logo, $f(x) \in g_0^{-1}((-\infty, c_i)) = int M_i$.

Se $x \in R(f)$, então $x \in \Lambda_j$ para algum $j = 1, \ldots, m$. Se $j < i$, então $c_j < c_i$, como Λ_j é invariante por f, temos que $f(x) \in \Lambda_j \subset g_0^{-1}((-\infty, c_j])$, o que implica que $g_0(f(x)) \leqslant c_j < c_i$ e, portanto, $f(x) \in int M_i$. Se $i = j$, então $f(x) \in \Lambda_i \subset int M_i$. E, finalmente, não podemos ter $j > i$, pois $x \in \Lambda_j \cap M_i$, mas se $j > i$, tem-se que $\Lambda_j \cap M_i = \emptyset$.

Portanto, em qualquer caso, temos que $f(x) \in int M_i$. Logo, $f(M_i) \subset int M_i$.

(2) $\Lambda_i \subset M_i - M_{i-1}$.

De fato, sabemos que $g_0^{-1}([c_{i-1}, c_i]) \cap R(f) = \Lambda_i$. Assim;

$$\begin{aligned}
\Lambda_i &= g_0^{-1}([c_{i-1}, c_i]) \cap R(f) \\
&= (g_0^{-1}((-\infty, c_i])) - g_0^{-1}((-\infty, c_{i-1}])) \cap R(f) \\
&= (g_0^{-1}((-\infty, c_i]) \cap R(f)) - (g_0^{-1}((-\infty, c_{i-1}]) \cap R(f)) \subset M_i - M_{i-1}
\end{aligned}$$

(II) Considere, para cada $i = 2, \ldots, m$, $N_i = \overline{M_i - M_{i-1}}$. Temos que, $M_i - M_{i-1} = g_0^{-1}((c_{i-1}, c_i])$ e com isso $N_i = g_0^{-1}([c_{i-1}, c_i])$. Daí,

$$N_i \cap N_{i-1} = g_0^{-1}(c_{i-1}) \text{ para cada } i = 2, \ldots, m$$

$$N_i \cap N_k = \emptyset \text{ se } k \neq i \text{ e } k \neq i \pm 1$$

Pela Forma Local das Submersões, para cada $i = 1, \ldots, m$, temos que $g_0^{-1}(c_i)$ é uma união finita de círculos.

(III) Nenhum dos círculos em $g_0^{-1}(\{c_1, c_2, \ldots, c_m\})$ é essencial em T^2, isto é, uma curva simples fechada não homotopicamente trivial.

De fato, suponhamos, por absurdo, que exista um círculo γ pertencente a $g_0^{-1}(\{c_1, c_2, \ldots, c_m\})$ que é essencial. Temos que existe um $j = 1, \ldots, m$ tal que γ está contida na fronteira de M_j.
Afirmação: Temos que M_j deve conter uma outra componente de fronteira isotópica a γ.

Primeiramente observe que M_j deve conter outra componente de fronteira essencial, pois se não existisse poderíamos construir um caminho ligando um ponto de M_j a um ponto que não está em M_j sem passar pela fronteira de M_j (isso é possível, pois se não existir uma outra componente de fronteira de M_j essencial, então as outras únicas possíveis componentes de fronteira de M_j são um número finito de círculos não essenciais). Logo, γ não seria uma componente de fronteira de M_j, absurdo! Portanto, existe outra componente de fronteira $\gamma^{'}$ essencial além da γ.

Agora, devemos ter que $\gamma^{'}$ é isótopica a γ, pois caso contrário $\gamma^{'}$ e γ teriam inclinações diferentes e quando olharmos os seus levantamentos no plano essas curvas devem de cruzar, e portanto γ e $\gamma^{'}$ teriam um ponto de interseção, o que contradiz o fato de γ e $\gamma^{'}$ serem componentes de fronteira de M_j. Portando, γ e $\gamma^{'}$ seriam isotópicas.

Observe que poderia haver alguns círculos não essenciais na fronteira de M_j.

Pela afirmação acima, temos que M_j é um anel topológico essencial (talvez com alguns discos removidos) em T^2.

Seja $\widetilde{M_j} \in \pi^{-1}(M_j)$ um levantamento de M_j.

Podemos escolher um levantamento F_0 de f tal que $F_0(\widetilde{M_j}) \subset \widetilde{M_j}$.

Temos que, $\widetilde{M_j}$ é uma faixa infinita (talvez com buracos) com inclinação racional, onde a inclinação dessa faixa significa a inclinação do levantamento de uma de suas componentes de bordo que é essencial. (Veja Lema 3.1)

Afirmação: Se para algum $x \in \mathbb{R}^2$ existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x) - x}{n} = v$ então v deve estar em uma reta de mesma inclinação que $\widetilde{M_j}$.

Dividiremos essa prova em dois casos.
Caso 1: $x \in \widetilde{M_j}$

Seja $x \in \widetilde{M_j}$ tal que existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)-x}{n} = v$. Seja r a reta que passa por x e tem a mesma inclinação da faixa $\widetilde{M_j}$.

Suponhamos, por absurdo, que $v \notin r$. (Note que estamos olhando v como um vetor baseado em x)

Observe que $F(x) = F_0(x) + w$ onde w é um vetor inteiro, portanto $v - w = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F_0^n(x)-x}{n}$. Assim, temos que $v - w \notin r$.

Assim, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $F_0^{n_1}(x)$ vai estar fora da faixa $\widetilde{M_j}$ o que contradiz o fato de $\widetilde{M_j}$ ser invariante por F_0.

Mostraremos agora o segundo caso.

Caso 2: $x \notin \widetilde{M_j}$

Segue de maneira análoga ao caso 1 observando que para todo $n \in \mathbb{N}$ o $F_0^n(x)$ deve estar contido em uma faixa delimitada por dois tranladados de $\widetilde{M_j}$ consecutivos.

Considerando que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ tal que existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)-x}{n} = v$ tem-se que v está em uma reta de mesma inclinação de $\widetilde{M_j}$ temos que v_1, v_2, v_3 e v_4 têm a mesma inclinação de $\widetilde{M_j}$. Assim, v_1, v_2, v_3 e v_4 estão em uma mesma reta, pois $\rho(F)$ é conexo e com isso o zero não pode estar no interior do fecho convexo desse quatro vetores, absurdo!

Portanto, nenhum desses círculos pode ser essencial.

Deste modo, $g_0^{-1}(\{c_1, \ldots, c_m\})$ é formado por círculos não essenciais, e assim cada um desses círculos determina um único disco "suave"no T^2.

(IV) O complementar da união dos discos cujos bordos são determinados por $g_0^{-1}(\{c_1, \ldots, c_m\})$ consiste do interior de um único N_j dos N_i.

Portanto, o complementar do $intN_j$ em T^2 consiste de um conjunto finito de discos, digamos $D_1, D_2, \ldots, D_r$.

Podemos enumerar esses discos de modo que

$$D_i \subset M_j \text{ se } 1 \leqslant i \leqslant s$$

$$D_i \subset \overline{T^2 - M_j} \text{ se } s < i \leqslant r$$

Temos também:

(i) $f(D_i) \subset \bigcup_{k=1}^{s}(D_k)$ se $1 \leqslant i \leqslant s$.

(ii) $f^{-1}(D_i) \subset \bigcup_{k=s+1}^{r}(D_k)$ se $s < i \leqslant r$.

Pelo que vimos inicialmente, existe um ponto não errante $x_1 \in T^2$ tal que se $x \in \pi^{-1}(x_1)$

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

Fixe um tal $x \in \pi^{-1}(x_1)$.

(V) Se x_1 não está em Λ_j, vamos mostrar que existe outro ponto $y_1 \in \Lambda_j$ tal que sempre que $y \in \pi^{-1}(y_1)$ tem-se

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}$$

Por um argumento similar ao que faremos agora podemos encontrar y_2, y_3 e y_4 como desejado e portanto temos completada a prova.

Suponhamos que $x_1 \notin \Lambda_j$. Pelo que vimos no começo da demonstração, temos que $x_1 \in R(f)$. Como $x_1 \notin \Lambda_j = R(f) \cap g_0^{-1}([c_{j-1}, c_j])$ e $x_1 \in R(f)$ então $x_1 \notin g_0^{-1}([c_{j-1}, c_j]) = N_j$. Logo, $x_1 \in T^2 - intN_j$. E como $T^2 - intN_j = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_r$ então $x_1 \in D_p$ para algum $p \in \{1, \ldots, r\}$.

Deste modo temos os dois seguinte casos:

Caso 1: $x_1 \in D_p$ onde $1 \leqslant p \leqslant s$.

Como x_1 é um ponto não errante então existe um $q > 0$ tal que $f^q(D_p) \cap D_p \neq \emptyset$. Daí e do fato que f^q é contínua, D_p é conexo e $f^q(D_p) \subset \bigcup_{k=1}^{s} D_k$, temos que $f^q(D_p) \subset D_p$.

Seja D um levantamento de D_p contendo x. Daí, existe um vetor inteiro w tal que $F^q(D) \subset D + w$. Defina $G(z) = F^q(z) - w$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$. Logo, $G(D) \subset D$ o que implica, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, que G possui um ponto fixo $z_0 \in D$.

Temos que

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(z_0) - z_0}{nq} = \frac{w}{q}$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(z_0) - z_0}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(z_0) + nw - z_0}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(z_0) - z_0}{nq} + \frac{w}{q} = \frac{w}{q}$$

e como $F^{nq}(x) \in D + nw, \forall n \in \mathbb{N}$ implica que $\dfrac{F^{nq}(x) - x}{nq} \in (\dfrac{D - x}{nq} + \dfrac{w}{q}), \forall n \in \mathbb{N}$ e daí tem-se, fazendo $n \to \infty$, que $v_1 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \dfrac{w}{q}$.

Caso 2: $x_1 \in D_p$ onde $s < p \leqslant r$.

Procede de maneira análoga ao caso 1 utilizando em vez da função f a função f^{-1} e assim encontramos um ponto fixo para função G, z_0, com as mesmas propriedades.

Afirmação: Existe um ponto fixo para G em $\pi^{-1}(N_j)$.

Para isso procuraremos um ponto fixo para f^q em N_j.

Primeiro observe que f^q é homotópica a aplicação identidade, pois a f o é. Agora, como a identidade é homotópica a uma aplicação sem ponto fixos temos que a f^q é homotópica a uma aplicação sem pontos fixos.

Considere B o conjunto de pontos fixos de f^q que estão na mesma classe de Nielsen de $\pi(z_0)$ onde z_0 é o ponto fixo da G que encontramos anteriormente.

Se nenhum dos pontos de B pertence a N_j então devem pertencer então a $T^2 - N_j$ que é igual a união do interior dos discos $D_1, D_2, \ldots, D_r$ então $B \subset \bigcup_{k=1}^{r} D_k$. E assim, para cada $i = 1, \ldots, r$, se $\widetilde{D_i}$ é um levantamento de D_i então ou $G(\widetilde{D_i}) \subset \widetilde{D_i}$ ou $G^{-1}(\widetilde{D_i}) \subset \widetilde{D_i}$ ou $G(D_i) \cap D_i = \emptyset$.

A contribuição de D_i para o índice é de $+1$ ou 0, pela proposição 3.1. Observe que pelo menos um D_j's contribui com $+1$.

Por isto e pelo que vimos acima sobre B, temos que o índice do conjunto de pontos fixos de f^q que estão na mesma classe de Nielsen de $\pi(z_0)$ é positivo, absurdo, pois f^q é homotópica a uma aplicação sem pontos fixos e, portanto, a soma dos índices do conjunto de pontos fixos em qualquer classe de Nielsen para f^q é zero pelo teorema 3.2.

Logo, existe um ponto fixo $y_1 \in N_j$ de f^q na classe de Nielsen de $\pi(z_0)$.

Visto que y_1 está na mesma classe de Nielsen de $\pi(z_0)$, se $y \in \pi^{-1}(y_1)$ então $G(y) = y$.

Logo,

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(y) - y}{nq} \in \rho(F, \Lambda_j)$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(y) - y}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{G^{n}(y) + nw - y}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{G^{n}(y) - y}{nq} + \frac{w}{q} = \frac{w}{q}$$

Portanto, y_1 é um ponto periódico de f em N_j, logo $y_1 \in \Lambda_j$.

Fazendo o mesmo argumento encontramos y_2, y_3 e y_4 em Λ_j desejados, completando com isso a nossa demonstração.

□

Teorema 3.3. *Sejam $f : T^2 \to T^2$ um homeomorfismo homotópico à aplicação identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f. Se v é um vetor com coordenadas racionais contido no interior de $\rho(F)$, então existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(p) \in T^2$ é um ponto periódico para f e*

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{n} \tag{3.1}$$

Demonstração. Como v é um vetor de coordenadas racionais em $\mathbb{R}^2$, então existem $r, s, q \in \mathbb{Z}$ com $m.d.c.(r, s, q) = 1$ tais que $v = (\frac{r}{q}, \frac{s}{q})$.

Seja $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $G(x) = F^q(x) - (r, s)$. Observe que se G possui um ponto p fixo, então esse ponto é o ponto procurado. De fato, temos que $G(p) = F^q(p) - (r, s) = p$ o que implica $F^q(p) = p + (r, s)$.
Afirmação: $f^n \circ \pi = \pi \circ F^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Provemos por indução sobre n.
(1) Já é conhecido que $f \circ \pi = \pi \circ F$
(2) Suponhamos que é verdade para k, provemos que vale para $k + 1$.

Como vale para k temos que $f^k \circ \pi = \pi \circ F^k$. Assim,

$$\pi \circ F^{k+1} = \pi \circ F^k \circ F = f^k \circ \pi \circ F = f^k \circ f \circ \pi = f^{k+1} \circ \pi$$

logo temos que a afirmação é verdadeira.

Assim,

$$f^q(\pi(p)) = \pi(F^q(p)) = \pi(p + (r, s)) = \pi(p)$$

isto é, $\pi(p)$ é um ponto periódico para f.

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{n} = \lim_{m\to\infty} \frac{F^{mq}(p) - p}{mq} = \lim_{m\to\infty} \frac{G^m(p) + m(r, s) - p}{mq} = \frac{(r, s)}{q} = v$$

pois p é um ponto fixo da G.

Portanto, devemos encontrar um ponto fixo para G.

Pela proposição 2.2, temos que $\rho(G) = q\rho(F) - (r, s)$. Como $(\frac{r}{q}, \frac{s}{q})$ está no interior de $\rho(F)$, temos que o zero está no interior de $\rho(G)$, pois $0 = q(\frac{r}{q}, \frac{s}{q}) - (r, s) \in q\rho(F) - (r, s) = \rho(G)$.

Agora, como $\rho(G)$ é fechado e convexo, pelo teorema 2.2, temos que existem pontos extremos v_1, v_2, v_3 e v_4 de $\rho(G)$ tais que o zero está contido no interior do fecho convexo formado por esses vetores.

Daí, pela proposição 3.2, temos que G possui um ponto fixo p. □

Bibliografia

[Br] M. Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston J. Math. 10, 35–41, 1984.

[B] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[BG] K. Burns and M. Gidea, *Differential Geometry and Topology with a view to Dynamical Systems*, Studies in advanced Mathematics; CHAPMAN and HALL/CRC (2005).

[Fa] A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Enseign. Math. 33, 315–322, 1987.

[F] B. François, *Ensembles de rotations des homéomorphismes du tore* $\mathbb{T}^2$, Notas de curso, http://www.math.u-psud.fr/ leroux/ENSEIGNEMENT/2006/M2/cours-2-grenoble06.pdf, 2007.

[Fr88] J. Franks, *A variation on the Poincaré-Birkhoff Theorem*, Hamiltonian Dynamics, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 111–116, 1988.

[Fr89] J. Franks, *Realizing Rotation vector for torus homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 311, n. 1, 107–115, 1989.

[HDK] H. Hadwiger; H. Debrunner e V. Klee, *Combinatorial geometry in the plane*, Holt Rinehart and Winston, New York, 1964.

[L93] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[L04] E. L. Lima, *Curso de Análise Vol. 1*, v.1, 11 ed, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[L05] E. L. Lima, *Curso de Análise Vol. 2*, v. 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[M] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.

[MZ] M. Misiurewicz e K. Ziemian, *Rotation sets for maps of tori*, J. London Math. Soc. (2), 490–506, 1989.

[Ox] J. Oxtoby, *Diameters of arcs and gerrymandering problem*, Amer. Math. Monthly 84, 155–162, 1977.