UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Teorema de Brouwer de Translação no Plano segundo John Franks

Fabiano Figueiredo Gomes

Niterói, RJ
Abril de 2009

Fabiano Figueiredo Gomes

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Orientador: Paulo Henrique Cabido Gusmão

Niterói, RJ
Abril de 2009

RESUMO

Seja f um homeomorfismo que preserva a orientação de $\mathbb{R}^2$ sem ponto fixo. O Teorema de Brouwer de Translação no Plano afirma que cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ está contido num *Domínio de Translação* por f, ou seja, um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é $L \cup f(L)$ onde L é imagem de um mergulho próprio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, tal que L separa $f(L)$ e $f^{-1}(L)$. Além disso provamos a existência de uma função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(f(x)) < g(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Abstract

Let f be an orientation-preserving homeomorphism of $\mathbb{R}^2$ which is fixed point free. The Brouwer plane translation theorem asserts that every $x_0 \in \mathbb{R}^2$ is contained in a *Domain of Translation* for f, i.e. an open connected subset of $\mathbb{R}^2$, whose boundary is $L \cup f(L)$ where L is the image of a proper embedding of $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$, such that L separates $f(L)$ and $f^{-1}(L)$. In addition we show that there is a function $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ such that $g(f(x)) < g(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Introdução

Nessa dissertação investigamos homeomorfismos sem ponto fixo que preservam a orientação do plano e damos uma pequena prova do Teorema de Translação no Plano de Brouwer. A demonstração original de Brouwer pode ser encontrada em [3]. Algumas das histórias interessantes desse resultado assim como algumas simplificações da prova de Brouwer podem ser encontradas em [2].

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos sobre homotopia da identidade em $\mathbb{R}^2$ e, em seguida, sobre certas condições construímos uma função de Lyapounov $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ associada a uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados sobre pontos recorrentes por cadeia para homeomorfismos f de $\mathbb{R}^2$ sem pontos fixos e que preservam a orientação. O resultado central é o Teorema 2.2 que assegura que para tais homeomorfismos, dado qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^2$, existe um aberto U tal que $\overline{U} \subset f^{-1}(U)$ e $x_0 \in f^{-1}(U) - \overline{U}$. Finalmente, no Capítulo 3, apresentamos a prova do Teorema de Brouwer de translação no Plano.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus pela oportunidade, força e direção constantes para chegar em um ponto que até anos atrás não conseguiria imaginar que pudesse chegar. Agradeço ao meu orientador Paulo Gusmão por ter sido o primeiro a acreditar em mim e a me incentivar, desde a época da graduação. Ao coordenador da Pós-Graduação do Instituto de Matemática da UFF, Dinamérico Pombo, fica a minha admiração e gratidão pelo eterno apoio. Aos amigos agradeço pelo afeto e ajuda em todo esse período, em especial, ao Marcelo Rainha e ao Eduardo (Dudu) me sinto grato pelas efetivas cooperações. Não posso deixar de lado a minha família que foi "obrigada"a entender a minha ausência e excessiva dedicação aos estudos. Finalmente, à Sâmara, que mal chegou e já mostrou paciência e companheirismo, me sinto muito agradecido.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados de que precisaremos para a demonstração do teorema de Brouwer.

Definição 1.1. *Se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva suave parametrizada regular, a função $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \int_{t_0}^{t} \parallel \alpha'(s) \parallel ds$ é chamada função comprimento de arco da curva a partir de t_0, onde, $t_0 \in I$.*

Definição 1.2. *Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se $\int_{t_0}^{t_1} \parallel \alpha'(s) \parallel ds = t_1 - t_0$, para quaisquer $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. Isto é, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.*

Definição 1.3. *Uma curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada proporcional ao comprimento de arco quando existe uma constante $c > 0$ de modo que $\int_{t_0}^{t_1} \parallel \alpha'(s) \parallel ds = c(t_1 - t_0)$, para quaisquer $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$.*

Teorema 1.1 (Teorema de Sard)**.** *Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então o conjunto dos valores regulares de g é denso em $\mathbb{R}$.*

Definição 1.4. *Uma homotopia entre as aplicações $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k é uma aplicação contínua $h : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, tem-se $h(0,x) = f(x)$, $h(1,x) = g(x)$. Se f e g são difeomorfismos e para cada $t \in [0,1]$, $h_t(x) = h(t,x)$ também é um difeomorfismo, então dizemos que h é uma isotopia entre f e g.*

Perceba que *ser isotópico a* é uma relação de equivalência. De fato, temos que esta relação tem as seguintes propriedades:

1. Reflexiva:

   Para vermos que um difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é isotópico a si mesmo basta tomarmos $h_t(x) = f(x), \forall t$, e notarmos que $h_0(x) =$

$h_1(x) = f(x)$ e que $h_t(x)$ é um difeomorfismo para todo $t \in [0,1]$, logo h é isotopia entre f e f.

2. Simétrica:

   Se tivermos os difeomorfismos $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que f é isotópico a g então existe uma isotopia $h_t(x)$ tal que $h_0(x) = f(x), h_1(x) = g(x)$ e $h_t(x)$ é um difeomorfismo para $t \in [0,1]$. Tomando $h'(t,x) = h(1-t,x)$ notamos que $h'_0(x) = h_1(x) = g(x), h'_1(x) = h_0(x) = f(x)$ e que $h'_t(x) = h(1-t,x)$ é um difeomorfismo se tomarmos $t \in [0,1]$. Com isso temos que h' é uma isotopia entre g e f.

3. Transitiva:

   Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ difeomorfismos tal que f é isotópico a g e g é isotópico a h. Então f é isotópico a h. Com efeito, existe uma isotopia $h_t(x)$ tal que $h_0(x) = f(x), h_1(x) = g(x)$ e $h_t(x)$ é um difeomorfismo para $t \in [0,1]$ e outra isotopia $h'_t(x)$ tal que $h'_0(x) = g(x), h'_1(x) = h(x)$ e $h'_t(x)$ é um difeomorfismo para $t \in [0,1]$. Agora consideremos a seguinte aplicação:

$$\overline{h_t}(x) = \begin{cases} h_t(2t,x), & se\, t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h'_t(2t-1,x), & se\, t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

   Perceba que $\overline{h_0}(x) = h_0(x) = f(x), \overline{h_{\frac{1}{2}}}(x) = h_1(x) = h'_0(x) = g(x)$ e $\overline{h_1}(x) = h'_0(x) = h(x)$, além de termos que $\overline{h_t}$ é um difeomorfismo para todo $t \in [0,1]$, por conta das definições de h_t e h'_t. Desta forma temos que $\overline{h_t}$ é uma isotopia entre f e h.

Seguimos com resultados necessários sobre isotopia.

Lema 1.1. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco topológico aberto e convexo , $p, q \in D$ e o segmento de reta $\Gamma : [0,1] \longrightarrow D$ ligando p a q. Então existe uma isotopia h_t, $t \in [0,1]$ ao longo de Γ tal que $h_0 = Id$, $h_1(p) = q$ e $h_t(x) = x, \forall t \in [0,1]$ e para todo $x \in \mathbb{R}^2 - D$.*

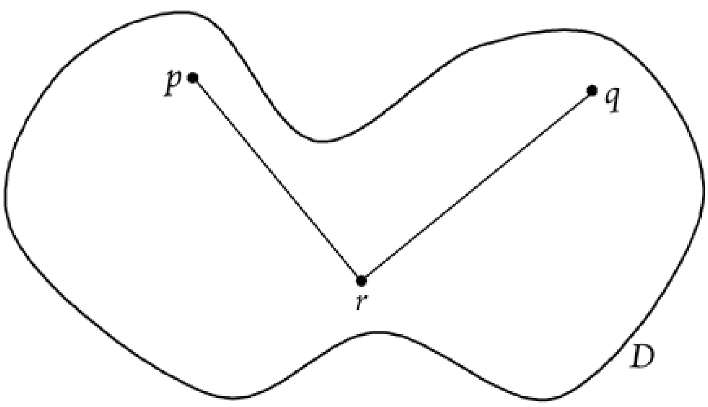
Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ de classe C^∞ tal que $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 - D$ e $f(x) > 0, \forall x \in D$.

A partir do campo vetorial constante definido por $X(x) = q - p, \forall x \in \mathbb{R}^2$, construímos o campo C^∞ definido por $X'(x) = f(x)X(x)$. Pela definição de f notamos que D é o suporte do campo X', isto é, D é o fecho do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid X'(x) \neq x\}$. Temos que $D \subset \overline{D}$, ou seja, o suporte de X' está contido num compacto, donde se conclui que o fluxo associado a X' está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Se tomarmos $\varphi_t(p), t \in \mathbb{R}$, como a órbita de p, teremos que $\varphi_0(p) = p$ e $\varphi_t(p)$ tenderá ao bordo de D quando $t \longrightarrow \infty$, pois, do contrário, a órbita de p tenderia para o interior de D e assim o campo X' teria uma singularidade, o que seria um absurdo, já que o campo Y é produto de um valor real positivo por um campo constante. Desse modo, necessariamente existe um $t' > 0$ tal que $\varphi_{t'}(p) = q$, o que significa que existe uma isotopia h_t com as propriedades desejadas. Para obtê-la basta tomarmos a aplicação $h : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que leva (t,x) em $h_t(x)$, que é definida por $h_t = \varphi_{t.t'}$ pois temos que $h_0 = \varphi_0 = Id$, $h_1 = \varphi_{t'}$ e $h_1(p) = \varphi_{t'}(p) = q$. $\square$

Definição 1.5. *Seja $h_t : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isotopia. O conjunto N é dito suporte de h_t quando h_t é identidade fora de N.*

Corolário 1.1. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco topológico aberto, $p, q \in int(D)$ e uma poligonal $\Gamma : [0,1] \longrightarrow D$ ligando p a q. Então existe uma isotopia $h_t, t \in [0,1]$ ao longo de Γ com suporte numa vizinhança $N \subset D$ de Γ tal que $h_0 = Id$ e $h_1(p) = q$.*



Demonstração. Como Γ é uma poligonal, então existem pontos $t_0, t_1, ..., t_n$ onde Γ não é diferenciável. Podemos supor que Γ não é diferenciável somente em $t_0 \in (0,1)$, o caso geral é análogo. Sendo assim, seja $\Gamma(0) = p$, $\Gamma(t_0) = r$ e $\Gamma(1) = q$.

Considere N_1 e N_2 abertos convexos contidos em D e contendo respectivamente os segmentos $\Gamma_0 = \Gamma([0,t_0])$ e $\Gamma_1 = \Gamma([t_0,1])$. Pelo lema 1.1 existem isotopias φ_t e ψ_t, $t \in [0,1]$, ao longo respectivamente de Γ_0 e Γ_1 tal que $\varphi_0 = \psi_0 = Id$, $\varphi_1(p) = r$, $\psi_1(r) = q$ e $\varphi_t(x) = x$, para todo $t \in [0,1]$ e todo $x \in \mathbb{R}^2 - N_1$ e $\psi_t(x) = x$, para todo $t \in [0,1]$ e todo $x \in \mathbb{R}^2 - N_2$.

Seja $N = N_1 \cup N_2$. Defina $h_t = \psi_t \circ \varphi_t, t \in [0,1]$. Note que $h_0(x) = \psi_0 \circ \varphi_0(x) = \psi_0(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Para todo $x \in \mathbb{R}^2 - N$, tem-se que

$h_t(x) = \psi_t \circ \varphi_t(x) = \psi_t(x) = x, \forall t \in [0,1]$ e $h_1(p) = \psi_1(\varphi_1(p)) = \psi_1(r) = q$. Deste modo, temos a isotopia procurada. $\square$

Dado um homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva a orientação do plano, uma noção muito importante na demonstração do Teorema de Brouwer de Translação no Plano é a de uma função g como construída no lema a seguir. Ela também é utilizada como auxílio na construção de uma função de Lyapounov g para f, que faremos na seqüência como resultado adicional.

Lema 1.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação do plano e $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto tal que $\overline{U} \subset f^{-1}(U)$. Então existe uma função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ de classe C^∞ tal que:*

1. *g se anula em $\overline{U}$;*

2. *$g = 1$ em $Y = \mathbb{R}^2 - f^{-1}(U)$;*

3. *$g(x) \in (0,1)$ no complementar de $\overline{U} \cup Y$;*

4. *$g(f(x)) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$ e $g(f(x)) < g(x), \forall x \in f^{-1}(U) - \overline{U}$.*

Demonstração. Defina $g_0(x)$ como uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ que é não-negativa e se anula exatamente em $\overline{U}$. Do mesmo modo, seja também $g_1(x)$ uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ que é não-negativa e se anula exatamente em Y e assim defina

$$g(x) = \frac{g_0(x)}{g_0(x) + g_1(x)}.$$

Notamos que, como g_o e g_1 são suaves e o denominador de g não se anula, temos que g é suave. Dado que g_0 se anula exatamente em $\overline{U}$ e $g_1 \equiv 0$ em Y, segue que g se anula precisamente em $\overline{U}$ e é identicamente igual a 1 precisamente em Y, assim como está estritamente entre 0 e 1 no complementar de $\overline{U} \cup Y$ em $\mathbb{R}^2$ (já que o denomidor da equação é maior que o numerador necessariamente).

Concluímos que $g(f(x)) \leq g(x)$, pois pelas definições de f, g_0 e g_1, chegamos a:

1. se $x, f(x) \in Y$ então $g(f(x)) = g(x) = 1$;

2. se $x \in Y$ e $f(x) \in f^{-1}(U)$ temos que $g(f(x)) \in [0,1)$ e $g(x) = 1$;

3. se $x \in f^{-1}(U) - \overline{U}$ então $f(x) \in \overline{U}$ e daí $g(x) \in (0,1)$ e $g(f(x)) = 0$, logo $g(f(x)) < g(x)$;

4. se $x \in \overline{U}$ então $f(x) \in \overline{U}$ e assim $g(f(x)) = g(x) = 0$.

$\square$

Observe que, no lema anterior, se $x \in f^{-1}(U) - \overline{U}$ então $g(x) \in (0,1)$ e neste caso temos que $f(x) \in U - f(\overline{U}) \subset \overline{U}$, logo $g(f(x)) = 0$. Também notamos que $g(f^{-1}(x)) = 1$ se $g(x) \in (0,1)$ já que, desta forma, teríamos $x \in f^{-1}(U) - \overline{U}$.

Definição 1.6. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem ponto fixo que preserva a orientação do plano. Uma função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é denominada função de Lyapounov para f quando $g(f(x)) < g(x)$ para todo x no plano.*

Lema 1.3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem ponto fixo que preserva a orientação do plano tal que para qualquer ponto y no plano existe um aberto U tal que $\overline{U} \subset f^{-1}(U)$ e $y \in f^{-1}(U) - \overline{U}$. Então existe uma função g_0 contínua tal que $g_0(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^2$, de Lyapounov para f.*

Demonstração. O que o lema 1.2 nos diz é que se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo que preserva orientação do plano tal que para qualquer ponto y no plano existe um aberto U tal que $\overline{U} \subset f^{-1}(U)$ e $y \in f^{-1}(U) - \overline{U}$ então para cada y podemos construir uma função $g_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ e tomar um aberto U_y contendo y tal que $g_y(f(x)) \leq g_y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $g_y(f(x)) < g_y(x)$ para todo x em U_y. Então a família de conjuntos $\{U_y\}$ é uma cobertura do plano donde podemos escolher uma subcobertura localmente finita e enumerável $\{U_{y_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Seja $U_i = U_{y_i}$ e $g_i = g_{y_i}$. A questão agora é encontrar uma função de Lyapounov g para f.

Defina a função $g_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(x)}{2^i}. \tag{1.1}$$

Note que, como a imagem de qualquer ponto por g_i é menor ou igual a 1 para todo $i \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que

$$\frac{g_i(x)}{2^i} \leq \frac{1}{2^i}.$$

Assim temos que cada termo da série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(x)}{2^i} \tag{1.2}$$

é menor ou igual a cada termo de mesmo índice da série geométrica $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Logo, como ambas as séries possuem todos os termos não-negativos e a série geométrica é convergente, pelo critério de comparação de séries temos que a série 1.2 é convergente e, em particular, possui limite menor ou igual a 1 (limite da série geométrica), para todo x. Isso prova que $g_0(x) \leq 1$.

Claramente, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, e escrevendo

$$g_0(x) = \frac{g_1(x)}{2} + \frac{g_2(x)}{4} + ... + \frac{g_n(x)}{2^n} + R_n(x),$$

tem-se $R_n(x) < \varepsilon$, para todo x, o que significa que a série 1.2 converge uniformemente para g_0. E como temos que cada termo desta soma é uma função contínua, concluímos que g_0 também é contínua.

Nos resta provar que g_0 é de Lyapounov. Para isso basta notar que, para todo x existe um número finito de abertos U_k contendo x, logo para tais índices k temos que $g_k(f(x)) < g_k(x)$, o que nos conduz à desigualdade

$$\frac{g_k(f(x))}{2^k} < \frac{g_k(x)}{2^k}$$

e assim, $g_0(f(x)) < g_0(x)$, como queríamos demonstrar.

$\square$

No próximo capítulo provaremos que, se f é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$, sem pontos fixos e que preserva a orientação, então para qualquer ponto y no plano podemos construir esse aberto U tal que $\overline{U} \subset f^{-1}(U)$ e $y \in f^{-1}(U) - \overline{U}$. Esse será um passo fundamental na demonstração do Teorema de Brouwer.

Capítulo 2

Homeomorfismos sem pontos fixos e recorrência

Neste capítulo apresentaremos alguns importantes resultados sobre homeomorfismos sem pontos fixos, que serão úteis na demonstração do teorema de translação no plano de Brouwer.

Na demonstração da proposição a seguir, utilizaremos o teorema abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação do plano. Se f tem um ponto periódico então f tem um ponto fixo.*

Proposição 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem ponto fixo que preserva a orientação do plano e D um disco topológico aberto tal que $f(D) \cap D = \emptyset$. Então $f^i(D) \cap f^j(D) = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.*

Demonstração. Se $f^i(D) \cap f^j(D) \neq \emptyset$ para algum $i \neq j$ então, sendo f homeomorfismo, se tomarmos $n_0 = i - j$ teremos que $f^{n_0}(D) \cap D \neq \emptyset$. Seja n o menor inteiro positivo tal que $f^n(D) \cap D \neq \emptyset$. Seja $x \in D \cap f^{-n}(D)$; logo $f^n(x) \in f^n(D) \cap D$ e então $x, f^n(x) \in D$; e escolha um arco poligonal $\Gamma \subset D$ ligando $f^n(x)$ a x.

Escolha uma vizinhança N de Γ sucientemente pequena que esteja contida em D. Do corolário 1.1 podemos tomar uma isotopia com suporte em N que leva $f^n(x)$ ao longo de Γ a x e então construímos um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com suporte em N satisfazendo $h(f^n(x)) = x$. Seja $f_1 = f \circ h$. Note que, fora de D, como h é identidade, então $f_1 \equiv f$ e, como f não tem ponto fixo, segue que f_1 não tem ponto fixo fora de D. Também percebemos que f_1 não tem ponto fixo em D pois $f_1(D) = f(D)$, que é disjunto de D. Mas se $z = f^n(x)$ então $f_1(z) = f(h(z)) = f(h(f^n(x))) = f(x)$, logo

$f_1^n(z) = f^n(x) = z$, ou seja, f_1 tem um ponto periódico, o que contradiz o teorema 2.1.

□

Definição 2.1. *Uma ε-cadeia de x a y por f é uma seqüência $x = x_1, x_2, ..., x_n$ de pontos em X tal que*

$$\| f(x_i) - x_{i+1} \| < \varepsilon \quad para \ \ 1 \leq i \leq n-1,$$

e

$$\| f(x_n) - y \| < \varepsilon.$$

Lema 2.1. *Se existe uma ε-cadeia $y = x_1, x_2, ..., x_n = y$, de y a y, então podemos tomá-la de maneira que para $i, j \notin \{1, n\}$ tem-se que $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$ e $f(x_i) \neq x_j$.*

Demonstração. Se existirem índices $i, j \in 2, ..., n-1$ tal que $f(x_i) = x_j$ então tome x'_j tal que $\|f(x_i) - x'_j\| < \varepsilon$ e $\|f(x'_j) - x_{j+1}\| < \varepsilon$. Então se substituirmos x_j por x'_j na seqüência acima, ainda teremos uma ε-cadeia de y a y.

Caso $x'_j = f(x_k)$ ou $f(x'_j) = x_k$ para algum $k \in 2, ..., n-1$ então repetimos o processo acima e o faremos sempre que necessário até obtermos uma ε-cadeia conforme desejado. □

Proposição 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação do plano tal que $\| f(x) - x \| > \delta > 0$ para todo x. Então, se $0 < \varepsilon < \delta$, não existe uma ε-cadeia de y a y para qualquer $y \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Suponha que exista tal ε-cadeia $y = x_1, x_2, ..., x_n = y$, de y a y. Se necessário faremos algumas alterações nestes pontos para obtermos uma ε-cadeia como a do lema 2.1.

Assim, como $\| f(x_k) - x_{k+1} \| < \varepsilon$, para cada k consideremos o segmento de reta γ_k ligando $f(x_k)$ a x_{k+1}. Tomemos parametrizações desses segmentos, $\gamma_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que eles sejam proporcionais ao comprimento de arco. Se necessário, alteraremos levemente esses mergulhos para que estes sejam caminhos poligonais parametrizados proporcionais ao comprimento de arco tal que $\gamma_i(s) \neq \gamma_j(s), \forall s \in [0,1]$ e $i \neq j$.

Seja $\delta = min\|\gamma_i(s) - \gamma_j(s)\|, \forall s \in [0,1], \forall i \neq j$. Tome um inteiro N tal que $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\delta}{2}$. Então os segmentos $\gamma_k([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]), 1 \leq i < N, 1 \leq k \leq n$ têm comprimento menor que $\dfrac{\varepsilon}{N}$ pois a parametrização é proporcional ao comprimento de arco. Mais ainda: por conta do δ tomado temos que os arcos $\gamma_k([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]), 1 \leq k < n$, são disjuntos dois a dois.

Pelo corolário 1.1, para cada i entre 1 e N, podemos construir uma isotopia $h_t(i) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

1. O suporte de $h_t(i)$ está contido na união de pequenas vizinhanças disjuntas de $\gamma_k([\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]), 1 \leq k \leq n$,

2. $\| h_t(i)(x) - x \| < \varepsilon/N, \forall x \in \mathbb{R}^2$,

3. $h_1(i)(\gamma_k(\frac{i-1}{N})) = \gamma_k(\frac{i}{N}), 1 \leq k < n$.

Agora defina $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $h = h_1(N) \circ h_1(N-1) \circ ... \circ h_1(1)$. Então, claramente, $\| h(x) - x \| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^2$ e $h(f(x_k)) = x_{k+1}$. Então o homeomorfismo $g = h \circ f$ tem $x_1, x_2, ..., x_n$ como órbita periódica. Veja:
$x_1 = y$
$g(x_1) = h(f(x_1)) = x_2$
$g^2(x_1) = g(x_2) = h(f(x_2)) = x_3$
$g^3(x_1) = g(x_3) = h(f(x_3)) = x_4$
...
$g^{n-1}(x_1) = g(x_{n-1}) = h(f(x_{n-1})) = x_n = x_1 = y$

Logo, existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $g(w) = w$. Assim, pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} \delta &< \| f(w) - w \| \leq \| f(w) - g(w) \| + \| g(w) - w \| \\ &= \| g(w) - f(w) \| = \| h(f(w)) - f(w) \| < \varepsilon < \delta. \end{aligned}$$

Isto implica em uma contradição.
Então não existe ε-cadeia de y a y por f tal que $0 < \varepsilon < \delta$.

$\square$

Agora provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é homeomorfismo sem ponto fixo que preserva a orientação do plano então para todo $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existe um aberto U tal que $f^{-1}(U) \supset \overline{U}$ e $x_0 \in f^{-1}(U) - \overline{U}$.*

Antes de demonstrar o teorema, note que ele garante para cada vizinhança U_{x_0} a existência de uma função $g_{x_0} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ conforme o lema 1.2.

O teorema será demonstrado numa seqüência de cinco lemas. Para tais demonstrações, precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.2. *Seja I um arco mergulhado ligando dois pontos no plano. Para $\varepsilon > 0$ defina $U(\varepsilon)$ como o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^2$ tal que existe $x \in I$ e uma ε-cadeia de x a y.*

Note que $U(\varepsilon) \neq \emptyset$. Para ver isto basta tomar, para qualquer $x \in I$, um ponto $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $\| f(x) - y \| < \varepsilon$ e assim temos que x é uma ε-cadeia de x a y, ou seja, $y \in U(\varepsilon)$.

Também temos que $U(\varepsilon)$ é aberto, pois se $y \in U(\varepsilon)$ temos que existe um $x \in I$ e uma seqüência $x = x_1, x_2, ..., x_n$ de pontos em $\mathbb{R}^2$ tais que $\| f(x_i) - x_{i+1} \| < \varepsilon$ para $1 \leq i \leq n-1$, e $\| f(x_n) - y \| < \varepsilon$. Seja $\delta = \| f(x_n) - y \| < \varepsilon$ e tome δ' tal que $\delta + \delta' < \varepsilon$ e considere a bola aberta $B_{\delta'}(y)$. Se $y' \in B_{\delta'}(y)$ então $\| f(x_n) - y' \| \leq \| f(x_n) - y \| + \| y - y' \| < \delta + \delta' < \varepsilon$, logo $x_1, ..., x_n$ é uma ε-cadeia de x a y', portanto $B_{\delta'}(y) \subset U(\varepsilon)$.

Lema 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem ponto fixo que preserva a orientação do plano. Para todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existe um arco de translação, isto é, um arco mergulhado I que liga x_0 a $f(x_0)$ tal que $f(I) \cap I = \{f(x_0)\}$.*

Para demonstrar esse lema observamos que um homeomorfismo que preserva a orientação do plano sem ponto fixo é sempre diferencialmente conjugado a um homeomorfismo que move cada ponto a uma distância mínimo uniforme. Precisamente, temos o

Lema 2.3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva a orientação do plano sem ponto fixo. Então existe um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_1 = h \circ f \circ h^{-1}$ satisfaz $\|f_1(x) - x\| \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Seja $B_r = \{x \mid \| x \| \leq r\}$. Tome uma função $\phi : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(t) > 1$ para todo $t, \phi'(t) \geq 0$ para $t \geq 0$, e tão grande que

$$\phi(r) > \max_{x \in B_{r+1}} \left\{ \frac{1}{\| x - f(x) \|} \right\}.$$

Note que uma tal função sempre existe, pois função $g(r) = \max_{x \in B_{r+1}} \left\{ \frac{1}{\| x - f(x) \|} \right\}$ é crescente, monótona e contínua em $r \in [0, \infty)$ e é claro que com essas propriedades podemos encontrar uma função suave com derivada positiva que é maior que g.

Defina um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por $h(r, \theta) = (r\phi(r), \theta)$, onde r e θ estão em coordenadas polares. A matriz de $Dh_{(r,\theta)}$ com respeito a base ortonormal $\{\partial/\partial r, (1/r)(\partial/\partial\theta)\}$ em (r, θ) e $\{\partial/\partial r, (1/r\phi(r))(\partial/\partial\theta)\}$ em $h(r, \theta)$ é

$$\begin{pmatrix} \phi(r) + r\phi'(r) & 0 \\ 0 & \phi(r) \end{pmatrix}.$$

Com isso a matriz de $Dh^{-1}_{(r,\theta)}$ fica da forma:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\phi(r)+r\phi'(r)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\phi(r)} \end{pmatrix}.$$

Se considerarmos a norma do máximo da soma das linhas para matrizes teremos que

$$\|Dh^{-1}_{h(r,\theta)}\| \leq \frac{1}{\phi(r)}. \tag{2.1}$$

Mostraremos que $\| h(f(x))-h(x) \| \geq 1$ para todo x. Se isso não ocorresse existiria um x_0 tal que $\| h(f(x_0))-h(x_0) \| < 1$. Pelo teorema do valor médio aplicado ao difeomorfismo h^{-1}

$$\| f(x_0)-x_0 \| \leq \| Dh^{-1}_p \| \| h(f(x_0))-h(x_0) \| < \| Dh^{-1}_p \|$$

onde p é um ponto do segmento de reta ligando $h(x_0)$ e $h(f(x_0))$. Então, pela desigualdade (2.1) acima,

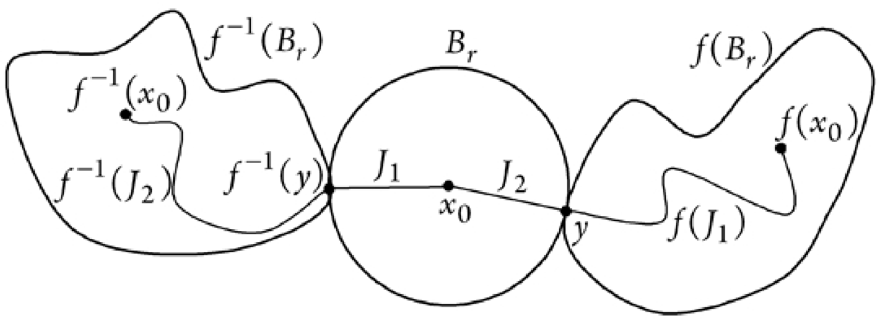
$$\| f(x_0)-x_0 \| < \frac{1}{\phi(r)} < \min_{x\in B_{r+1}} \| x-f(x) \|, \tag{2.2}$$

onde $r = \| h^{-1}(p) \|$. Mas, como $\| Dh^{-1} \| < 1$, h^{-1} é uma contração e deste modo $\| x_0 - h^{-1}(p) \| \leq \| h(x_0)-p \| < 1$. Então $x_0 \in B_{r+1}$ quando $r = \| h^{-1}(p) \|$. Isso contradiz (2.2).

Segue que $\| h(f(x))-h(x) \| \geq 1$ para todo x. Se $f_1 = h\circ f\circ h^{-1}$ então $\| f_1(x)-x \| = \| h(f(h^{-1}(x)))-h(h^{-1}(x) \| = \| h(f(z))-h(z) \| \geq 1$.

$\square$

Demonstração do lema 2.2. Para $x_0 \in \mathbb{R}^2$, seja B_t o disco fechado centrado em x_0 e de raio t, e tome r o supremo de t tal que $B_t \cap f(B_t) = \emptyset$. Os discos B_r e $f(B_r)$ se intersectam, mas seus interiores são disjuntos. Escolha $y \in B_r \cap f(B_r)$. Como, em particular, $y \in f(B_r)$ então $f^{-1}(y) \in B_r$ e logo podemos definir J_1 como sendo o arco radial em B_r do seu centro x_0 a $f^{-1}(y)$. Tomemos também J_2 como o arco radial de x_0 a y. Perceba que y é ponto comum dos arcos J_2 e $f(J_1)$ (já que, como os extremos de J_1 são $f^{-1}(y)$ e x_0, seus extremos são y e $f(x_0)$), assim, defina I como sendo a união de J_2 e $f(J_1)$, o arco que liga x_0 a $f(x_0)$. Dessa maneira, os extremos do arco $f^{-1}(I)$ serão x_0 e $f^{-1}(x_0)$, logo, como os interiores dos conjuntos $B_r, f(B_r)$ e $f^{-1}(B_r)$ são disjuntos dois a dois (já que, pela proposição 2.1 temos que $f(B_r)\cap f^{-1}(B_r) = \emptyset$), temos que I e $f^{-1}(I)$ se intersectam somente em x_0, assim I e $f(I)$ se intersectam somente em $f(x_0)$. Com isso construímos um



arco translação mergulhado I de x_0 a $f(x_0)$ com a propriedade de I e $f(I)$ terem apenas o ponto $f(x_0)$ em comum.

□

Lema 2.4. *Seja agora o conjunto $U(\varepsilon)$ como definido anteriormente. Nas condições do lema 2.2 temos que $f(I) \subset U(\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.*

Demonstração. Tome $y' \in f(I)$. Temos que existe $y \in I$ tal que $f(y) = y'$. Como f é contínua então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\| x - y \| < \delta$ então $\| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$, ou seja $\| f(x) - y' \| < \varepsilon$. Tomando $x \in I$ dessa forma, segue que x é uma ε-cadeia de x a y', isto é, $y' \in U(\varepsilon)$.

□

Lema 2.5. *Também sobre as condições do lema 2.2, temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f^{-1}(I) \cap U(\varepsilon_0) = \emptyset$.*

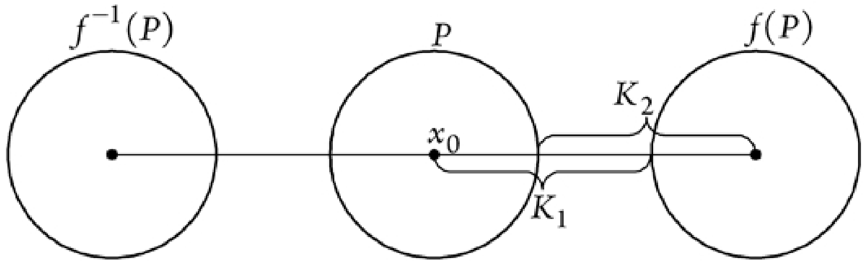
Demonstração. O objetivo dessa demonstração é mostrar que se ε_0 é suficientemente pequeno e existe uma ε_0-cadeia $y_1, y_2, ..., y_n$ do ponto y_1 de I a um ponto $z \in f^{-1}(I)$ então é possível alterar f para um homeomorfismo f_1 tal que existe um número positivo $\delta < \| f_1(x) - x \|$ para todo x e f_1 tem uma ε_1-cadeia periódica de y_1 por um valor $\varepsilon_1 < \delta$. E isso contradiz a proposição 2.2, garantindo então que a ε_0-cadeia de y_1 a z não pode existir. Obtemos assim que $f^{-1}(I) \cap U(\varepsilon_0) = \emptyset$.

Suponha, conforme lema 2.3, que $\| f(x) - x \| \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Como na prova do lema 2.2 seja x_0 o centro do disco B_r. Tome um disco geométrico P centrado em x_0 suficientemente pequeno tal que

$$diam(P) < \frac{1}{4} \quad e \quad diam(f(P)) < \frac{1}{4}. \tag{2.3}$$

Sejam $K_1 = I - int(f(P))$ e $K_2 = I - int(P)$ subarcos compactos de I e $\delta_0 < 1$ tal que existam vizinhanças compactas N_i de K_i de maneira que:

$$dist(N_i, f^{-1}(N_i)) > \delta_0, \quad para \ i = 1, 2. \tag{2.4}$$



Escolha $\varepsilon_0 < min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\delta_0\right\}$ e suponha por absurdo que $f^{-1}(I) \cap U(\varepsilon_0) \neq \emptyset$, ou seja, que existe uma ε_0-cadeia $y_1, y_2, ..., y_n$, de y_1 em I a um ponto $z \in f^{-1}(I)$. Perturbando $y_1, y_2, ..., y_n$ levemente, se necessário, podemos assumir que y_1 está no interior de I e nenhum dos pontos $\{y_2, ..., y_n, f(y_1), ..., f(y_n)\}$ está em I.

Feito isto, consideremos primeiramente o caso em que $y_1 \in P \cup f(P)$ e $z \in P \cup f^{-1}(P)$. Temos então as seguintes possibilidades:

1. $y_1, z \in P$

   Por 2.3 temos que $\| z - y_1 \| < \frac{1}{4}$ e, pela definição de ε_0-cadeia, segue que $\| f(y_n) - z \| < \frac{1}{4}$, logo:

   $$\| f(y_n) - y_1 \| \leq \| f(y_n) - z \| + \| z - y_1 \| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

   Logo , se $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, então $y_1, y_2, ..., y_n$ será uma ε_1-cadeia de y_1 a y_1 por f.

2. $y_1 \in f(P), z \in P$

   Como, por 2.3, teríamos $\| f(z) - y_1 \| < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \varepsilon_1$, já que nesse caso $f(z)$ estaria em $f(P)$, então bastaria tomar $y_1, y_2, ..., y_n, z$ como ε_1-cadeia periódica para $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ por f.

3. $y_1 \in P, z \in f^{-1}(P)$

   Assim, $f(z) \in P$, logo, do mesmo modo que no item precedente, $\| f(z) - y_1 \| < \varepsilon_1$ e cairíamos no caso anterior.

4. $y_1 \in f(P), z \in f^{-1}(P)$

   Já que teríamos $\| f(z) - f(z) \| = 0 < \varepsilon_1$ e $\| f^2(z) - y_1 \| < \frac{1}{4} < \varepsilon_1$, pois $f^2(z) \in f(P)$, então chegaríamos a $y_1, y_2, ..., y_n, z, f(z)$ como ε_1-cadeia de y_1 a y_1 por f.

Em cada um dos casos anteriores basta tomar $f_1 = f$ e $\delta = 1$ para chegar numa contradição da proposição 2.2, já que $\| f(x) - x \| \geq 1$.

Os únicos casos que restam analisar são quando o subarco I ligando y_1 e $f(z)$ está inteiramente em K_1 ou inteiramente em K_2. Como ambos os casos são similares, assumamos o primeiro. Sendo assim $z \in f^{-1}(I) - P$.

Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo satisfazendo $h(f(x)) = y_1$ e com suporte numa vizinhança de K_1 tão pequeno que está contido em N_1 assim como é disjunto de $\{y_2, ..., y_n, f(y_1), ..., f(y_n)\}$. Defina $f_1 = h \circ f$. Como $f_1(z) = h(f(z)) = y_1$ e $f_1(y_i) = f(h(y_i)) = f(y_i)$ para $1 \leq i \leq n$, pois y_i está no complementar do suporte de h, onde ela é a identidade, então temos que $\| f_1(y_i) - y_{i+1} \| < \varepsilon_0$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $\| f_1(y_n) - z \| = \| z - z \| = 0 < \varepsilon_0$, ou seja, $y_1, y_2, ..., y_n, z$ é uma ε_0-cadeia periódica de y_1 a y_1.

O que resta para obter uma contradição da proposição 2.2 é mostrar que $\| f_1(x) - x \| > \delta_0$ para todo x.

Pela escolha de N_1 e δ_0 em 2.4 notamos que $\| f_1(x) - x \| > \delta_0$ se $x \in f^{-1}(N_1)$. Se $x \notin f^{-1}(N_1)$ então $f(x) \notin N_1$. Sendo $h \equiv Id$ fora de N_1, segue que $f_1(x) = f(h(x)) = f(x)$ e assim $\| f_1(x) - x \| \geq 1 > \delta_0$. Portanto temos que $\| f_1(x) - x \| > \delta_0$ para todo x_0, o que significa que se tomarmos $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ e $\delta = \delta_0$ chegaremos que $y_1, y_2, ..., y_n, z$ é ε_0-cadeia de y_1 a y_1 por f_1, o que seria uma contradição por 2.2.

Então $f^{-1}(I) \cap U(\varepsilon_0) = \emptyset$.

$\square$

Concluindo o teorema 2.2 temos o seguinte:

Lema 2.6. *Ainda sobre as condições do lema 2.2, temos que* $\overline{U(\frac{\varepsilon_0}{2})} \subset f^{-1}(U(\frac{\varepsilon_0}{2}))$.

Demonstração. Denotamos $U = U(\frac{\varepsilon_0}{2})$. Tome $W = \overline{f(U)}$ e note que, como f é um homeomorfismo, $\overline{f(U)} = f(\overline{U})$. Basta mostrar que $W \subset U$ pois, assim, teremos que $\overline{U} = f^{-1}(W) \subset f^{-1}(U)$. Para $y \in W, f^{-1}(y) \in \overline{U}$, logo, só precisamos escolher um ponto w em U tão próximo de $f^{-1}(y)$ tal que $f(w)$ esteja a uma distância menor que $\frac{\varepsilon_0}{2}$ de y, ou seja, escolhemos δ tal que $\|w - f^{-1}(y)\| < \delta$ implica em $\|f(w) - y\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Feito isso, dado que $w \in U$, temos que para algum $z \in I$ existe uma $\frac{\varepsilon_0}{2}$-cadeia $z = x_1, x_2, ..., x_n$ de z ao ponto w com $\|w - f^{-1}(y)\| < \delta$. Então a seqüência $x_1, x_2, ..., x_n, w$ é uma $\frac{\varepsilon_0}{2}$-cadeia de z a y, ou seja, $y \in U$, o que significa que $W \subset U$. Assim $\overline{U} \subset f^{-1}(U)$.

$\square$

Capítulo 3

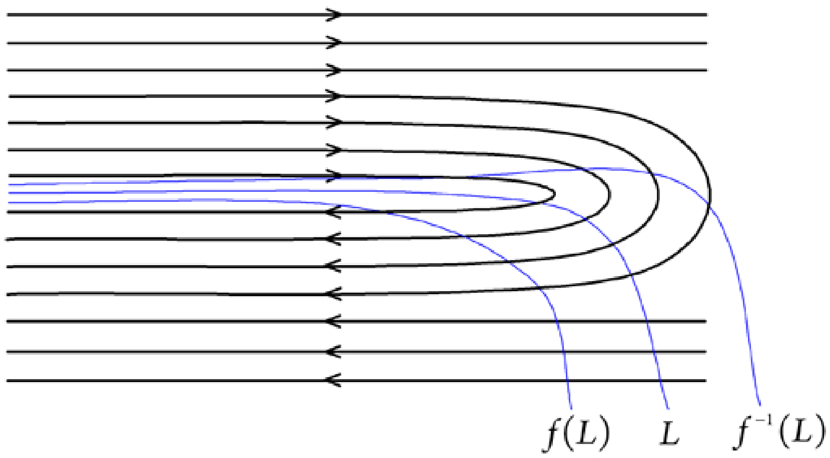
O Teorema de Brouwer

Definição 3.1. *Um domínio de translação para f é um subconjunto D aberto de $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é $L \cup f(L)$, onde L é a imagem de um mergulho próprio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, tal que L separa $f(L)$ e $f^{-1}(L)$.*

Um fato importante para um domínio de translação D é que o conjunto $V = \cup f^n(\overline{D}), n \in \mathbb{Z}$, é aberto e invariante por f.

De fato, se $x \in V$ então existe uma linha mergulhada L', que é da forma $f^k(L)$, para alguma $k \in \mathbb{Z}$, tal que x pertence ao interior de um subconjunto de V com bordos $f^{-1}(L')$ e $f(L')$, logo existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B_\delta(x)$ está contida nesse conjunto, então $B_\delta(x) \subset V$, o que indica que V é aberto. Naturalmente, $f(V) \subset V$, e temos que V é invariante por f.

É importante observar que nem sempre o conjunto V acima será todo o plano. Considere, por exemplo, o fluxo (φ_t) como na figura abaixo.



Considerando $f(x) = \varphi_1(x)$ e o conjunto D como o conjunto de bordos L e $f(L)$ como na figura, notamos que V será um semi-plano do $\mathbb{R}^2$. Esse exemplo mostra que um homeomorfismo sem ponto fixo que preserva a orientação do plano em geral não é conjugado à translação no plano.

Observação: Note que pelo lema 2.2, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^2$, podemos construir um arco de translação I de x_0 a $f(x_0)$. Sejam $U = U(\frac{\varepsilon_0}{2})$ o aberto associado à I conforme o capítulo anterior e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ a função como no lema 1.2 associado ao aberto U. Sendo assim, temos que, como $\overline{U} \subset U(\varepsilon_0)$ e $f^{-1}(I) \cap U(\varepsilon_0) = \emptyset$ (pelo lema 2.5) então também teremos que $f^{-1}(I) \cap \overline{U} = \emptyset$. Além disso, pelo lema 2.4 também vale a inclusão $f(I) \subset U$, assim como temos que $\overline{U} \subset f^{-1}(U)$, pelo teorema 2.2.

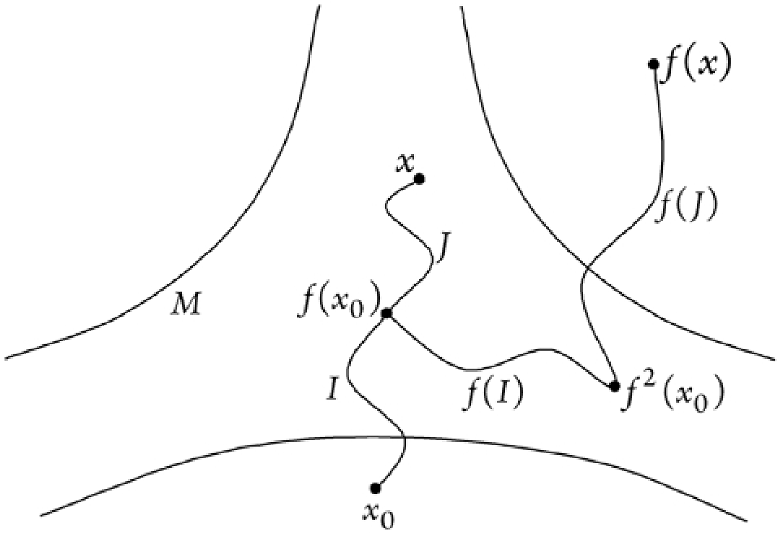
Agora já podemos demonstrar o Teorema de Translação no Plano de Brouwer. Um esboço do que faremos a seguir é escolher convenientemente um valor regular c de g de maneira que uma componente conexa L de $g^{-1}(c)$ é homeomorfa à reta real e é disjunta de sua imagem tanto por f como por f^{-1}, de maneira que x_0 pertence ao aberto cujo bordo é $L \cup f^{-1}(L)$, o que nos dará o domínio de translação procurado.

Teorema 3.1. *[Teorema de Brouwer de translação no plano] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo sem ponto fixo e que preserva a orientação. Então todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ está em algum domínio de translação por f.*

Demonstração. Sejam I e U conforme a observação acima. Dado que $f^{-1}(I) \cap \overline{U} = \emptyset$ e g é estritamente positiva fora de $\overline{U}$, o mínimo de g restrito à $f^{-1}(I)$ é positivo. Pelo teorema de Sard podemos escolher um valor regular $c \in (0, 1)$ de g que é menor que esse mínimo. Considere a subvariedade $g^{-1}((-\infty, c])$ de $\mathbb{R}^2$.

Note que, como $f(I) \subset g^{-1}(0)$, temos que $f(I)$ está contido no interior de uma componente conexa M de $g^{-1}((-\infty, c])$.

Mostremos que $f(M) \subset M$. Com efeito, dado que $M \subset f^{-1}(U)$, visto que fora de $f^{-1}(U)$ tem-se que $g \equiv 1$, segue que $f(M) \subset g^{-1}(0)$, donde $f(M) \subset int(g^{-1}((-\infty, c]))$. Agora suponha por absurdo que $f(M)$ não esteja contido em M, ou seja, que existe $x \in M$ com $f(x) \notin M$. Tome um camimho J em M de x a $f(x_0)$. Segue que $f(J)$ é um caminho ligando $f^2(x_0)$ a $f(x)$. Como toda componente conexa do bordo de M é uma componente conexa de $g^{-1}(c)$, ela é uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1 (isto segue, por exemplo, da forma local das submersões, que pode ser encontrado em [7]), ou seja, um círculo ou uma cópia de $\mathbb{R}$ mergulhada, assim, separa $\mathbb{R}^2$ em duas componentes conexas, portanto $f(J)$ é um caminho que atravessa uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - g^{-1}((-\infty, c])$, o que seria um absurdo pois $f(M) \subset int(g^{-1}((-\infty, c]))$. Então $f(M) \subset M$, na verdade $f(M) \subset int(M)$, visto que $f(M) \subset g^{-1}(0)$.

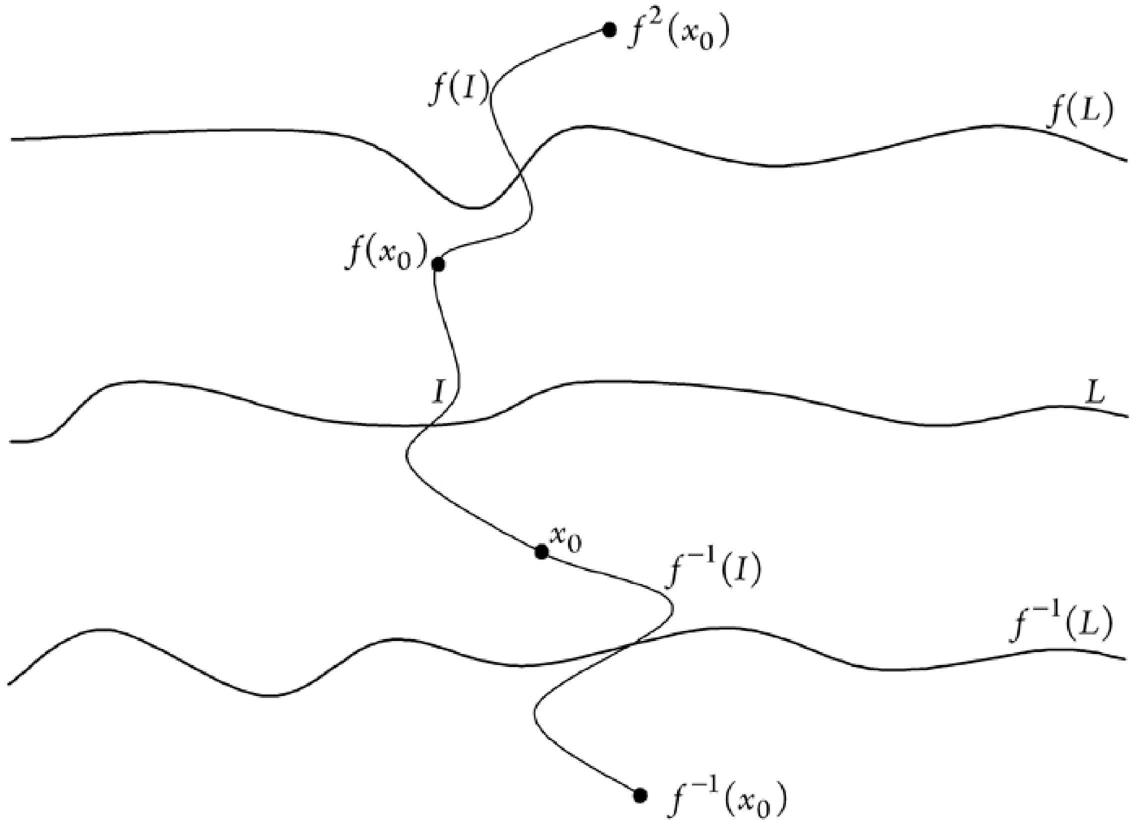


Pela escolha de c, o arco $f^{-1}(I)$ é disjunto de M, então $x_0 \notin M$. Note que qualquer componente do bordo de M é o bordo inteiro de uma componente do seu complementar. Considere N a componente do complementar de M que contém x_0. Como I é um arco que conecta $x_0 \in int(N)$ a $f(x_0) \in int(M)$, temos que I intersecta o bordo L de N. Note que, como $x_0 \in int(N)$, segue que o arco $f^{-1}(I)$ está inteiramente contido em N, já que $g(f^{-1}(x)) > c, \forall x \in I$. Afirmamos que $f^{-1}(N) \subset int(N)$. De fato, se para algum $y \in N$ tem-se que $f^{-1}(y) \notin int(N)$, se considerarmos um caminho J em N que liga x a y, então $f^{-1}(J)$ é um caminho ligando $f^{-1}(x_0)$ a $f^{-1}(y)$ e, portanto, atravessa M. Logo, como $f(f^{-1}(J)) = J$, teríamos uma contradição pois $f(M) \subset int(M)$. Então $f^{-1}(N) \subset N$, e como $f^{-1}(N) \subset g^{-1}(1)$, temos que $f^{-1}(N) \subset int(N)$.

Como $f(\partial M) \subset f(M) \subset int(M)$ então $f(L) \subset int(M)$. Também, $f^{-1}(L) \subset int(N)$, pois $f^{-1}(N) \subset int(N)$. Segue que $L, f(L)$ e $f^{-1}(L)$ são disjuntos e L separa $f(L)$ de $f^{-1}(L)$.

Note agora que L não pode ser compacta, isto é, L é uma cópia mergulhada de $\mathbb{R}$. Com efeito, caso contrário, L seria o bordo de um disco D e ou $M \subset D$ ou $N = D$. No primeiro caso teríamos $f(D) \subset D$ e no segundo $f^{-1}(D) \subset D$. Note que o primeiro caso valeria pois, se houvesse algum ponto x em uma componente conexa N' do complementar de M em D tal que $f(x) \in N$ então $f^{-1}(N') \cap N \neq \emptyset$, o que implicaria em $N' \cap f^{-1}(N) \neq \emptyset$, logo $N' \cap N \neq \emptyset$, o que seria uma contradição. Mas, dessa maneira, em ambos os casos f teria um ponto fixo, segundo o teorema do ponto fixo de Brouwer (que pode ser encontrado em [7]).

Para ver que x_0 está num domínio de translação bordado por L e $f^{-1}(L)$ note que $f^{-1}(I)$ contém x_0 e um ponto de $f^{-1}(L)$, mas nenhum ponto de L, enquanto I contém x_0 e um ponto de L, mas nenhum ponto de $f^{-1}(L)$ (pois $f(I) \subset int(M)$).



□

Referências Bibliográficas

[1] J. Franks, *A new proof of the Brouwer plane translation theorem*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1992), 12, 217-226.

[2] E. E. Slamika, *A Brouwer Translation Theorem for Free Homeomorphisms*, Trans. Amer. math. Soc. 306 (1988), 277-291

[3] A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma translation arcs*, L'enseignement Math. 33 (1987), 315-322

[4] M. Brown, *A New Proof of Brouwer's Lemma on Translation Arcs*, Houston J. Math. 10 (1984), 35-41.

[5] E. B. Pinheiro, *O lema de translação de arcos de Brouwer*, Niterói, RJ : [s.n.], 2008

[6] E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 1 Projeto Euclides (IMPA)

[7] E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 2 Projeto Euclides (IMPA)

[8] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides (IMPA)

[9] T. M. Apostol *Calculus*, vol. 2, Second Edition, Ed.Wiley