

**UNIVERSIDADE FEDERAL  
FLUMINENSE**

**Instituto de Matemática**

**Dinâmica no infinito de folheações  
 $\mathbb{R}$ -cobertas em variedades de dimensão 3**

**Guido Gerson Espiritu Ledesma**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Paulo Henrique C. Gusmão

Niterói, 29 de Março de 2010

# Dinâmica no infinito de folheações $\mathbb{R}$ -cobertas em variedades de dimensão 3

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração : Matemática

Aprovada por:

---

Paulo H. C. Gusmão - UFF  
(Orientador)

---

Leonardo Navarro de Carvalho - UFF

---

Carlos Alberto Maquera Apaza- ICMC

---

Paul Schweitzer- PUC

Niterói, 29 de Março de 2010

# Dedicatória

À minha mãe Antonia e a minha noiva Meylin.

## Agradecimentos

A Meylin pela força e amor que sempre me deu nos momentos de fraqueza.

A minha mãe pelo apoio e a força que sempre me deu.

A meu pai e irmãos, pelo apoio incondicional.

A meu orientador professor Paulo H. C. Gusmão pela paciência, encorajamento.

Ao professor Leonardo Navarro de Carvalho pela ajuda que sempre me deu.

Ao professor Mario Santiago Saldaña pelo apoio e sua amizade.

A meus amigos.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
1	Variedade e espaço tangente . . . . .	4
2	Transversalidade . . . . .	6
3	Folheações . . . . .	6
4	Campo de planos . . . . .	9
5	Orientação . . . . .	10
6	Folheação orientável e transversalmente orientável . . . . .	10
7	Espaço das folhas . . . . .	11
8	Holonomia de uma folha . . . . .	11
9	Teoremas clássicos . . . . .	13
10	Geometria Hiperbólica . . . . .	15
	10.1 Algumas propriedades básicas . . . . .	15
11	Quasi-isometrias . . . . .	17
12	Extensão ao círculo no infinito da $(k, c)$ -quasi-isometria . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Folheação Uniforme</b>	<b>24</b>
1	Introdução . . . . .	24
2	Folheação $\mathbb{R}$ -coberta . . . . .	25
3	Círculo no infinito e sua topologia . . . . .	27
4	Construção da folheação vertical-caso uniforme . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Direções de Contração</b>	<b>36</b>
<b>5</b>	<b>Folheação Não-Uniforme</b>	<b>39</b>
1	Introdução . . . . .	39
2	Propriedades das folheações não-uniformes . . . . .	41
3	Curvas invariantes . . . . .	48
4	Construção da folheação vertical - caso não-uniforme . . . . .	57

# Introdução

Uma folheação  $\mathcal{F}$  de uma 3–variedade fechada pode ser levantada ao recobrimento universal  $\widetilde{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$ ; se a folheação não tem componentes de Reeb, nem folhas homeomorfas a  $S^2$ , as folhas levantadas são todas planas e Palmeira [Pa] mostrou que  $\widetilde{\mathcal{M}}$  é o  $\mathbb{R}^3$  e também que a folheação em  $\widetilde{\mathcal{M}}$  é homeomorfa a uma (folheação de  $\mathbb{R}^2$  por retas)  $\times \mathbb{R}$ . Assim, o espaço das folhas de  $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{F}})$  coincide com o espaço das folhas da folheação de  $\mathbb{R}^2$ . Quando tal espaço é Hausdorff (portanto homeomorfo a  $\mathbb{R}$ ), dizemos que a folheação  $\mathcal{F}$  é  $\mathbb{R}$ –coberta. Exemplos de tais folheações são:

- 1) fibrações sobre o círculo
- 2) folheações definidas por 1–formas fechadas não singulares
- 3) a folheação estável /instável de uma grande classe de fluxos de Anosov
- 4) slitherings sobre o círculo, conforme definido por Thurston [Th3]
- 5) folheações uniformes (ver a definição no Capítulo 2)
- 6) Muitos exemplos de folheações  $\mathbb{R}$ –cobertas não induzidas por slitherings [Cal1].

Em um trabalho central [Th2], Thurston provou que no caso de fibração e a variedade sendo aesférica ou existe um toro incompressível transverso a fibração ou existe a suspensão de um fluxo que é Pseudo-Anosov, produzindo uma folheação singular estável/instável. Seguindo a idéia central de analisar a geometria transversa da folheação, Sergio Fenley e em paralelo Danny Calegari, estenderam esse resultado para o caso de folheações  $\mathbb{R}$ –cobertas em 3-variedades fechadas, irredutíveis e atoroidais. Uma parte importante desse

trabalho é a construção do cilindro no infinito  $\mathcal{A}$  associado à  $\widetilde{\mathcal{M}}$  (Capítulo 3) e à folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , munido de duas folheações transversais e invariantes pela ação de  $\pi_1(\mathcal{M})$ , além disso o  $\pi_1(\mathcal{M})$  preserva a estrutura produto das folheações transversais. Em seguida, é a análise dessa ação que permite construir o fluxo Pseudo-Anosov. Nesta dissertação nos concentraremos na primeira parte.

O resultado principal é o seguinte

**Teorema.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um,  $\mathbb{R}$ -coberta com folhas hiperbólicas em uma variedade fechada, irredutível e atoroidal de dimensão 3. Então existe um cilindro no infinito de  $\widetilde{\mathcal{M}}$  munido de duas folheações transversais, definindo uma estrutura produto que é preservada pela ação de  $\pi_1(\mathcal{M})$ .*

A prova desse resultado é dividida em dois casos: 1) caso uniforme, isto é, a distância de Hausdorff entre quaisquer duas folhas no recobrimento universal é limitada.

2) o caso não uniforme que sob nossas hipóteses acarreta que a distância de Hausdorff entre qualquer par de folhas é não limitada.

Em ambos os casos a folheação, chamada de horizontal, é dada pelo círculo no infinito  $S^1_\infty(F)$  (Capítulo 3), para  $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$  visto que cada uma delas é isométrico ao plano hiperbólico.

No caso 1) mostra-se que existe um homeomorfismo canônico entre os círculos no infinito  $S^1_\infty(F)$  e  $S^1_\infty(E)$  para quaisquer duas folhas  $F$  e  $E$ . Isto nos dá um círculo universal que é naturalmente homeomorfo ao círculo no infinito de qualquer folha. É esse homeomorfismo que permite construir a folheação vertical em  $\mathcal{A}$  transversal à folheação horizontal com a requerida propriedade.

O caso 2) é provado, fazendo-se uma fina análise da dinâmica da folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}$  o que permite definir os chamados marcadores em  $\mathcal{A}$ . Mostra-se que tais marcadores são curvas contínuas, e em seguida que formam um conjunto denso em  $\mathcal{A}$  que se estende a uma folheação transversal à folheação horizontal e com a propriedade desejada.

O trabalho é dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 2 fazemos um sobrevôo dos principais resultados da teoria clássica de folheações e da Geometria Hiperbólica em dimensão 2. No Capítulo 3 fazemos a construção das duas folheações no caso da folheação ser uniforme. No Capítulo 4 é tratado o conceito de direção de contração que permite definir curvas, chamadas por Thurston de marcadores. Essas curvas são fundamentais na construção da folheação vertical no cilindro no infinito. No Capítulo 5 são desenvolvidas todas as ferramentas necessárias para a construção da folheação vertical no caso da folheação não ser uniforme.

# Preliminares

## 1 Variedade e espaço tangente

O nosso primer objetivo é dar a definição de variedade diferenciável primeiramente definimos uma *carta local* ou *sistema de coordenadas* no espaço topológico  $M$  como um par  $(U, \varphi)$  onde  $U$  é um aberto de  $M$  e  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre o aberto  $\varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^m$ .

Um atlas  $\mathfrak{A}$  de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  sobre  $M$  é uma coleção de cartas locais cujos domínios cobrem  $M$  e tal que se  $(U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathfrak{A}$  e  $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ , então a aplicação  $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$  entre abertos de  $\mathbb{R}^m$ . Os difeomorfismos acima são chamados *mudanças de coordenadas*.

Sejam  $M$  e  $N$  espaços topológicos e suponhamos que  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  são atlas de classe  $C^r$  em  $M$  e  $N$  respectivamente. Dizemos que  $f: M \rightarrow N$  diferenciável de classe  $C^k$ ,  $k \leq r$ , se  $f$  é contínua e para cada  $x \in M$  existem cartas locais  $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$  e  $(V, \psi) \in \mathfrak{B}$  com  $x \in U$  e  $f(x) \in V$ , tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

é de classe  $C^k$ .

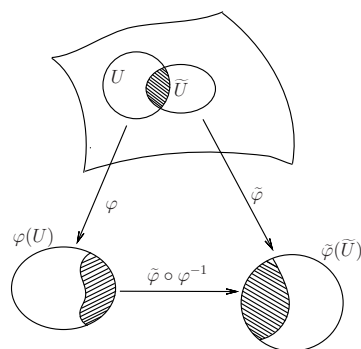
Um atlas  $\mathfrak{A}$  de classe  $C^r$  sobre  $M$  é chamado maximal quando ele contém todas as cartas locais  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ , cujas mudanças de coordenadas com elementos  $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$$

são difeomorfismos  $C^r$ . Um atlas máximo de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  sobre  $M$  é chamado também *estrutura diferenciável* de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  sobre  $M$ .

Uma *variedade diferenciável* de classe  $C^r$  e dimensão  $m$  é um espaço topológico





de Hausdorff  $M$  com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^r$ . Para denotar que  $M$  é uma variedade de dimensão  $m$  usaremos às vezes a notação  $M^m$ .

Um subconjunto  $N \subset M^m$  é chamado subvariedade de  $M$  de dimensão  $n$  e classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), se para todo  $p \in N$  existe uma carta local  $C^r$ ,  $(U, \varphi)$ , com  $\varphi(U) = V \times W$  onde  $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$  são bolas euclidianas, tal que  $\varphi(N \cap U) = V \times 0$ . Na situação acima dizemos também que a codimensão de  $N$  é  $m - n = \dim(M) - \dim(N)$ . Segue da definição que uma subvariedade é em particular uma variedade  $C^r$ .

Agora fixemos  $x \in M$ , consideremos o conjunto  $C_x(M)$  de todas as curvas  $C^\infty$ ,  $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $\epsilon > 0$  e  $\alpha(0) = x$ . Dada uma carta local  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in U$ , as curvas  $\alpha_u(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + tu)$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , estão em  $C_x(M)$ . Logo  $C_x(M) \neq \emptyset$ . Em  $C_x(M)$  introduzimos a seguinte relação de equivalência:  $\alpha \sim \beta$  se para alguma carta local  $(U, \varphi)$ ,  $x \in U$ , temos

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t) \Big|_{t=0}$$

Observe que se  $(V, \psi)$  é outra carta local com  $x \in V$ , então  $\psi \circ \alpha = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \alpha$ , logo pela regra da cadeia, a relação  $\sim$  independe da carta escolhida.

O quociente de  $C_x(M)$  pela relação  $\sim$  é chamado *espaço tangente* a  $M$  em  $x$  e é denotado por  $T_x M$ . O espaço  $T_x M$  possui uma estrutura natural de espaço vetorial real de dimensão  $m$ .

**Observação 2.1.** No trabalho faremos uso da teoria de grupo fundamental e espaço de recobrimento, mais especificamente dos seguintes teoremas.

**Teorema 2.1.** (*Levantamento de caminhos*) Sejam  $\pi: (E_0, e_0) \rightarrow (X, x_0)$  um recobrimento e  $\alpha: I \rightarrow (X, x_0)$  um caminho contínuo tal que  $\alpha(0) = x_0$ .

Então existe um único caminho contínuo  $\tilde{\alpha}: I \rightarrow E$  que levanta  $\alpha$  tal que  $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ . O ponto  $e_0$  é chamado ponto base de  $\tilde{\alpha}$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Li].  $\square$

Dizemos que o recobrimento  $\pi: E \rightarrow X$  é um *recobrimento universal* se  $E$  for simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos.

**Exemplo 2.1.** Seja  $M$  uma variedade de dimensão 2. Se  $M$  é distinto de  $S^2$  e distinto do espaço projetivo real de dimensão 2, então o recobrimento universal de  $M$  é  $\mathbb{R}^2$ .

Neste caso o grupo de automorfismos de recobrimento  $G(E, \pi, X)$  tem uma descrição bastante simples. Fixemos  $e_0 \in E$ ,  $x_0 = \pi(e_0) \in X$ . Dado  $f \in G(E, \pi, X)$ , seja  $\hat{\alpha}: I \rightarrow E$  tal que  $\hat{\alpha}(0) = e_0$  e  $\hat{\alpha}(1) = f(e_0)$ . Coloquemos  $\alpha = \pi \circ \hat{\alpha}$ . Então  $x_0 = \alpha(0) = \pi \circ \hat{\alpha}(0) = \pi(e_0) = \pi \circ f(e_0) = \pi \circ \hat{\alpha}(1) = \alpha(1)$ , ou seja  $\alpha$  é uma curva fechada em  $X$  com  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ . Denote  $\pi_1(X, x_0)$  o grupo fundamental de  $X$  com ponto base  $x_0$ . Definamos  $\varphi: G(E, \pi, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  por  $\varphi(f) = [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  onde  $\alpha$  é como acima. Do fato que  $E$  é simplesmente conexo, segue que  $\varphi$  está bem definida.

**Teorema 2.2.** Se  $E$  é o recobrimento universal de  $X$  e  $e_0 \in E$ ,  $x_0 = \pi(e_0)$  e  $\varphi: G(E, \pi, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  como acima, então  $\varphi$  é um isomorfismo de grupos. Além disto dado  $e_1 \in \pi^{-1}(x_0)$ , existe um único automorfismo  $f \in G(E, \pi, X)$  tal que  $f(e_0) = e_1$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]  $\square$

## 2 Transversalidade

Sejam  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) e  $S \subset N$  uma subvariedade de  $N$ . Dizemos que  $f$  é *transversal* a  $S$  em  $x \in M$  se  $y = f(x) \notin S$  ou  $y = f(x) \in S$  e a condição abaixo é satisfeita:

$$T_y N = T_y S + Df(x) \cdot (T_x M).$$

Quando  $f$  for transversal a  $S$  em todo ponto de  $M$  dizemos que  $f$  é *transversal* a  $S$ .

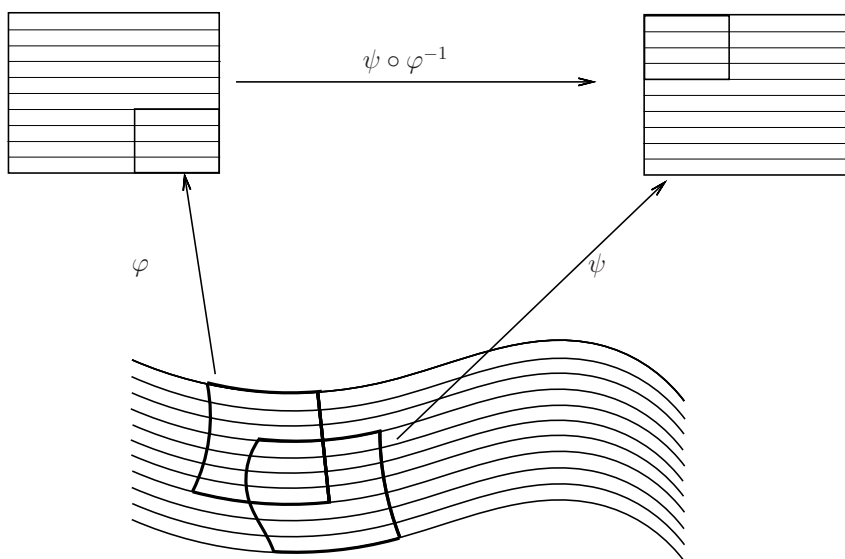
## 3 Folheações

**Definição 2.1.** Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$ . Uma *folheação* de classe  $C^r$  e dimensão  $n$  de  $M$  é um atlas maximal  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  em  $M$  com as seguinte propriedades:

- a) Se  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  então  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ , onde  $U_1$  e  $U_2$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{m-n}$  respectivamente.
- b) Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  em  $\mathcal{F}$  são tais que  $U \cap V \neq \emptyset$  então a mudança de coordenadas  $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  é da forma

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (h_1(x, y), h_2(y))$$

Dizemos também que  $M$  é folheada por  $\mathcal{F}$ , ou ainda que  $\mathcal{F}$  é uma estrutura folheada de dimensão  $n$  e classe  $C^r$  sobre  $M$ .



**Observação 2.2.**

Quando dizemos que  $M$  é uma variedade  $C^\infty$  que possui um atlas  $\mathcal{F}$  como acima estamos implicitamente dizendo que  $M$  possui um atlas  $\mathcal{A}$  cujas mudanças de coordenadas são de classe  $C^\infty$ ; porém, se  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$  e  $(V, \psi) \in \mathcal{F}$  e  $U \cap V \neq \emptyset$  então  $\phi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi \circ \phi^{-1}$  são de classe  $C^r$ . A única relação entre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{F}$  é que as mudanças de variáveis mistas, como acima são de classe  $C^r$ .

Daqui em diante consideraremos apenas folheações de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ . As cartas  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  serão também chamadas cartas trivializadoras de  $\mathcal{F}$ .

**Exemplo 2.2.** Qualquer submersão  $f: M \rightarrow N$  define uma folheação  $\mathcal{F}(f)$  de  $M$  cujas folhas são as componentes conexas das fibras de  $f$  a codimensão

de  $\mathcal{F}(f)$  é igual à dimensão de  $N$ . Um atlas representante de  $\mathcal{F}(f)$  é derivado da forma canônica local da submersão  $f$ . Folheações associadas às submersões são também chamadas folheações *simples*. As folheações associadas à submersões com fibras conexas são chamadas *estritamente simples*. Uma folheação simples é estritamente simples quando o espaço das folhas é hausdorff.

**Exemplo 2.3.** (Folheação de Reeb) Consideremos o disco unitário  $D := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ , e definamos a submersão  $f : \text{Int}(D) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(z, x) = e^{\frac{1}{1-|z|^2}} - x.$$

Assim temos a folheação  $\mathcal{F}(f)$  de  $\text{Int}(D) \times \mathbb{R}$ , a qual pode ser estendida a uma folheação do cilindro  $D \times \mathbb{R}$  adicionando uma nova folha: a folheação de  $D \times \mathbb{R}$  induz uma folheação do toro sólido. Denotaremos a folheação por  $\mathcal{R}$ . Qualquer outra folha de  $\mathcal{R}$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ , e tem a folha fronteira em seu conjunto de pontos de aderência em  $X$ . A folheação de Reeb de  $X$  é qualquer folheação  $\mathcal{F}$  de  $X$  de codimensão 1 para a qual existe um homeomorfismo de  $X$  que aplica as folhas de  $\mathcal{F}$  nas folhas de  $\mathcal{R}$ .

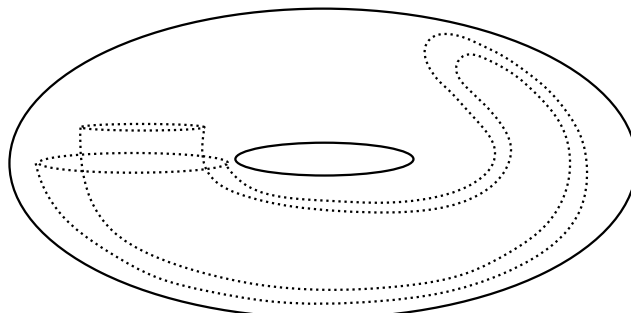


Figura 2.1: Folheação de Reeb do toro sólido

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de classe  $C^r$  e dimensão  $n$ ,  $0 < n < m$  de uma variedade  $M^m$ . Consideremos uma carta local  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Os conjuntos da forma  $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ ,  $c \in U_2$  são chamados placas de  $U$ , ou ainda placas de  $\mathcal{F}$ . Fixado  $c \in U_2$ , a aplicação  $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$  é um mergulho de classe  $C^r$ , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão  $n$  e classe  $C^r$  de  $M$ , além disso se  $\alpha$  e  $\beta$  são placas de  $U$  então  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  ou  $\alpha = \beta$ .

Um caminho de placas de  $\mathcal{F}$  é uma sequência  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de placas de  $\mathcal{F}$  tal que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$  para todo  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ . Como  $M$  é recoberta pelas placas de  $\mathcal{F}$ , podemos definir em  $M$  a seguinte relação de equivalência: " $pRq$  se existe um caminho de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  com  $p \in \alpha_1$  e  $q \in \alpha_k$ ". As classes de equivalência da relação  $R$  são chamadas folhas de  $\mathcal{F}$ . Da definição segue que uma folha de  $\mathcal{F}$  é um subconjunto de  $M$  conexo por caminhos. Com efeito, se  $F$  é uma folha de  $\mathcal{F}$  e  $p, q \in F$ , então existe um caminho de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , tal que  $p \in \alpha_1$  e  $q \in \alpha_k$ . Como as placas  $\alpha_j$  são conexas por caminhos e  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ , é imediato que  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k \subset F$  é conexo por caminhos, logo existe um caminho contínuo em  $F$  ligando  $p$  a  $q$ .

**Lema 2.1.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de uma variedade  $M$ . Existe uma cobertura  $C = \{U_i | i \in I\}$  de  $M$  por domínio de cartas locais de  $\mathcal{F}$  tal que se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  então  $U_i \cup U_j$  está contido no domínio de uma carta local de  $\mathcal{F}$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li].  $\square$

## 4 Campo de planos

Um campo de  $k$ -planos numa variedade  $M$  é uma aplicação contínua  $P$  que associa a cada ponto  $q \in M$  um subespaço vetorial de dimensão  $k$  de  $T_qM$ . Um campo de  $1$ -planos é também chamado de *campo de linhas*. Por exemplo, se  $X$  é um campo de vetores sem singularidade em  $M$ , podemos definir um campo de linhas  $P$  em  $M$  colocando  $P(q) = \mathbb{R} \cdot X(q)$ , subespaço de dimensão um em  $T_qM$  gerado por  $X(q)$ .

Reciprocamente, se  $P$  é um campo de linhas em  $M$ , podemos definir um campo de vetores (localmente) sem singularidades em  $M$  escolhendo em cada ponto  $q \in M$  um vetor não nulo em  $P(q)$ . Dizemos que um campo de linhas em  $M$  é de classe  $C^r$  quando para todo  $q \in M$  existe um campo de vetores  $X$ , de classe  $C^r$ , definido em uma vizinhança  $V$  de  $q$ , tal que  $P(x) = \mathbb{R} \cdot X(x)$  para todo  $x$  em  $V$ . Analogamente ao caso de campos de linhas, dizemos que um campo de  $k$ -planos  $P$  em  $M$  é de classe  $C^r$  se para todo  $q \in M$  existem  $k$  campos de vetores  $C^r$ ,  $X^1, \dots, X^k$ , definidos numa vizinhança  $V$  de  $q$  tais que para todo  $x \in V$ ,  $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$  é uma base de  $P(x)$ . Um fato relevante é o seguinte.

**Proposição 2.1.** *Toda folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $k$  e classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , em  $M$ , define um campo de  $k$ -planos de classe  $C^{r-1}$  em  $M$ , o qual será denotado por  $\mathbb{T}\mathcal{F}$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]  $\square$

## 5 Orientação

Dado um espaço vetorial  $E$  de dimensão  $n \geq 1$ , dizemos que duas bases ordenadas de  $E$ ,  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ , definem a mesma orientação em  $E$  se a matriz de mudança de base  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , definida por  $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$ , tem determinante positivo.

Se  $B$  é o conjunto das bases ordenadas de  $E$ , a relação "  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  definem a mesma orientação em  $E$  " é uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são chamadas as *orientações* de  $E$ .

Seja  $P$  um campo de  $k$ -planos contínuo em  $M$ . Diremos que  $P$  é orientável se para cada  $x \in M$  for possível escolher uma orientação  $\mathcal{O}(x)$  em  $P(x)$  de tal forma que a aplicação  $x \mapsto \mathcal{O}(x)$  seja continua no seguinte sentido. Consideremos uma cobertura de  $M$  por abertos  $(U_i)_{i \in I}$  tal que, para cada  $i \in I$ , a restrição  $P|_{U_i}$  é definida por  $k$  campos de vetores contínuos  $X^1, \dots, X^k$ . Para cada  $x \in U_i$ , as bases  $\mathcal{B}(x) = \{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$  e  $\mathcal{B}'(x) = \{-X^1(x), X^2(x), \dots, X^k(x)\}$  definem duas orientações distintas de  $P(x)$ ,  $\mathcal{O}_i^+$  e  $\mathcal{O}_i^-$  digamos. Dizemos que a escolha de  $\mathcal{O}$  é contínua se  $\mathcal{O}|_{U_i} = \mathcal{O}_i^+$  para todo  $i$  e sempre que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  então  $\mathcal{O}_i^+ = \mathcal{O}_j^+$  na interseção. Se  $k = \dim(M)$  e  $P(x) = T_x M$  dizemos que  $M$  é orientável.

## 6 Folheação orientável e transversalmente orientável

Seja  $P$  um campo de  $k$ -planos em  $M$ . Dizemos que  $\tilde{P}$  é um campo complementar a  $P$  ou transversal a  $P$ , se para todo  $x \in M$  tivermos  $P(x) + \tilde{P}(x) = T_x M$  e  $P(x) \cap \tilde{P}(x) = \{0\}$ . É claro da definição que  $\tilde{P}$  é um campo de planos de codimensão  $k$ .

**Definição 2.2.** Seja  $P$  um campo contínuo de  $k$ -planos. Dizemos que  $P$  é *transversalmente orientável* se existe um campo complementar a  $P$  contínuo e orientável.

**Proposição 2.2.** *Se  $P$  é transversalmente orientável qualquer campo de  $k$ -planos contínuo e complementar de  $P$  é orientável.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. □

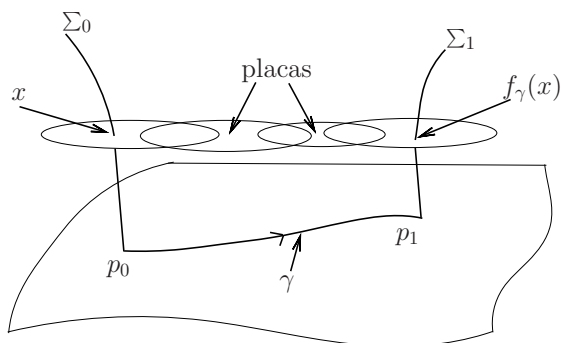
**Definição 2.3.** Uma folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) é *orientável* se o campo de planos tangentes a  $\mathcal{F}$  é orientável. Similarmente,  $\mathcal{F}$  é *transversalmente orientável* se o campo de planos tangentes a  $\mathcal{F}$  é transversalmente orientável.

## 7 Espaço das folhas

Seja  $M^m$  uma variedade folheada por uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $n < m$ . O *espaço das folhas* de  $\mathcal{F}$ ,  $M/\mathcal{F}$  é o espaço quociente de  $M$  pela relação de equivalência  $R$  que identifica dois pontos de  $M$  se eles estão na mesma folha de  $\mathcal{F}$ . Em  $M/\mathcal{F}$  consideremos a topologia quociente. A topologia de  $M/\mathcal{F}$  é em geral pode não ser Hausdorff.

## 8 Holonomia de uma folha

Sejam  $\gamma: [0, 1] \rightarrow F$  um caminho contínuo e  $\Sigma_0, \Sigma_1$  pequenas seções transversais a  $\mathcal{F}$  de dimensão  $m - n$  passando por  $p_0 = \gamma(0)$  e  $p_1 = \gamma(1)$  respectivamente. Definiremos uma transformação local entre  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  "ao longo" das folha de  $\mathcal{F}$ , sobre o caminho  $\gamma$  levando  $p_0$  em  $p_1$ . Segue do lema

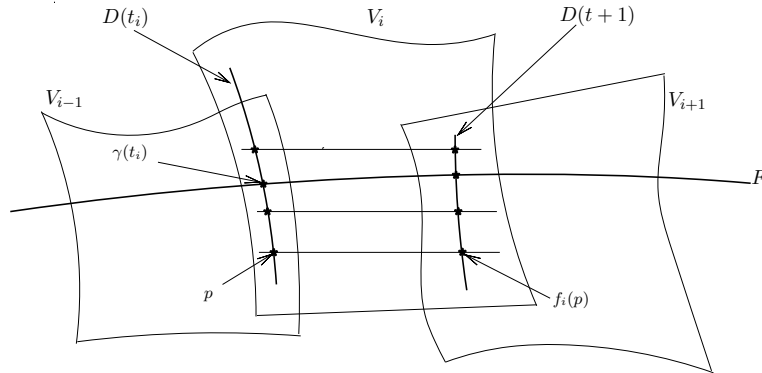


2.1 que existe uma sequência de cartas locais  $(U_i)_{i=0}^k$  e uma partição de  $[0, 1]$ ,  $0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$  tais que

- Se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  então  $U_i \cup U_j$  está contido em uma carta local de  $\mathcal{F}$
- $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ .

Dizemos então que existe uma *cadeia subordinada* a  $\gamma$  ou, por simplicidade, que  $(U_i)_{i=0}^k$  é uma cadeia subordinada a  $\gamma$ .

Para cada  $0 \leq i \leq k$  fixemos uma seção transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$  homeomorfo a um disco de dimensão  $n$  passando por  $\gamma(t_i)$ . Colocando também  $D(0) = \Sigma_0$  e  $D(1) = \Sigma_1$ , então para cada  $x \in D(t_i)$  suficientemente próximo de  $\gamma(t_i)$ , a placa de  $U_i$  que passa por  $x$  intersecta  $D(t_{i+1})$  num único ponto  $f_i(x)$ .



O domínio da aplicação  $f_i$  contém um disco  $D'_i \subset D(t_i)$  contendo  $\gamma(t_i)$ . Daí é claro que a composição

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0$$

está bem definida em uma vizinhança de  $p_0 \in \Sigma_0$ . Chamaremos  $f_\gamma$  de aplicação de holonomia associada a  $\gamma$ .

**Lema 2.2.** *A aplicação  $f_\gamma$  independe dos discos  $(D(t_i))_{i=1}^k$  e da cadeia subordinada, isto é, se  $\tilde{f}_\gamma$  e  $f_\gamma$  são duas aplicações de holonomia associadas ao mesmo caminho, então  $\tilde{f}_\gamma$  e  $f_\gamma$  coincidem na interseção dos seus domínios.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li]. □

**Definição 2.4.** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $x \in X$ . No conjunto de aplicações  $f: V \subset X \rightarrow Y$ , onde  $V$  é uma vizinhança de  $x$ , introduzimos a relação de equivalência  $R: fRg$  se existe uma vizinhança  $W$  de  $x$  tal que  $f|_W = g|_W$ .

A classe de equivalência de  $f$  é denominada *germe* de  $f$  em  $x$ . Quando  $X = Y$ , o conjunto  $G(X, x)$  de germes de homeomorfismos locais que deixam fixo  $x$  é um grupo com a multiplicação germe  $(f) \circ \text{germe}(g) = \text{germe}(f \circ g)$ , sendo que o domínio de  $f \circ g$  é a interseção do domínio de  $g$  com  $g^{-1}(\text{domínio de } f)$ .

**Teorema 2.3.** *Sejam  $\gamma_i: I \rightarrow M, i = 0, 1$ , caminhos contidos numa folha  $F$  de  $\mathcal{F}$  tais que  $\gamma_i(0) = p_0, \gamma_i(1) = p_1, i = 0, 1$ . Sejam  $\Sigma_0, \Sigma_1$  seções transversais a  $F$  em  $p_0, p_1$ ;  $f_{\gamma_i}: D_i \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$  aplicação de holonomia associada a  $\gamma_i$  e  $\varphi_{\gamma_i}$  o germe de  $f_{\gamma_i}$  em  $p_0$ .*



1. Se  $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel}(0, 1)$  então  $\varphi_{\gamma_0} = \varphi_{\gamma_1}$ .
2. Se  $p_0 = p_1$  e  $\Sigma_0 = \Sigma_1$ , então a transformação  $\gamma \rightarrow \varphi_{\gamma^{-1}}$  induz um homeomorfismo.

$$\Phi: \pi_1(F, p_0) \rightarrow G(\Sigma_0, p_0), \quad \Phi([\gamma]) = \varphi_{\gamma^{-1}}$$

do grupo fundamental de  $F$  em  $p_0$  no grupo de germes de difeomorfismos  $C^r$  de  $\Sigma_0$  que deixa  $p_0$  fixo.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li].  $\square$

**Definição 2.5.** O subgrupo  $\text{HOL}(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$  de  $G(\Sigma_0, p_0)$  é chamado grupo de holonomia de  $F$  em  $p_0$ .

## 9 Teoremas clássicos

**Lema 2.3.** (*Lema da trivialização global*) Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , e codimensão  $n$  de uma variedade  $M^m$  e seja  $\gamma: I \rightarrow M$  um caminho contínuo, simples (isto é, injetivo) cuja imagem está contida em uma folha  $F$  de  $\mathcal{F}$ . Existe uma vizinhança  $V \supset \gamma(I)$  e um difeomorfismo  $C^r$

$$h: D^{m-n} \times D^n \rightarrow V$$

tal que  $h^*\mathcal{F}$  é uma folheação cujas folhas são as superfícies  $P^{-1}(y)$ , onde  $P: D^{m-n} \times D^n \rightarrow D^n$  é a projeção  $P(x, y) = y$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li].  $\square$

**Teorema 2.4.** (*Teorema de Heafitger*) Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão  $n$  e classe  $C^2$  de uma variedade  $M$ . Suponha que existe uma curva fechada transversal a  $\mathcal{F}$  homotópica a um ponto. Então existem uma folha  $F$  de  $\mathcal{F}$  e uma curva fechada  $\Gamma \subset F$  cujo germe de holonomia num segmento  $J$  transversal a  $\mathcal{F}$ , com  $x_0 = J \cap \Gamma$ , é a identidade em uma das componentes de  $J - x_0$  mas difere da identidade em qualquer vizinhança de  $x_0$  em  $J$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Ca-Li].  $\square$

**Corolário 2.1.** Seja  $M$  uma variedade analítica real na qual está definida uma folheação analítica  $\mathcal{F}$  de codimensão  $n$ . Toda curva fechada transversal a  $\mathcal{F}$  representa um elemento de ordem infinita de  $\pi_1(M)$ .

**Teorema 2.5.** (*Teorema de Novikov*) Toda folheação de classe  $C^2$  e codimensão um de uma variedade compacta de dimensão três com grupo fundamental finito possui uma folha compacta.

Em particular toda folheação de classe  $C^2$  e codimensão um da esfera  $S^3$  possui uma folha compacta homeomorfa a  $T^2$ . A prova de este teorema é dada no "Séminaire Bourbaki 20e année, 1967-68, Num. 339, p. 433-444".

**Definição 2.6.** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um em uma variedade  $M$ . Um ciclo evanescente de  $\mathcal{F}$  é uma aplicação  $f: S^1 \times [0, \epsilon] \rightarrow M$  (para algum  $\epsilon > 0$ ) tal que se denotamos  $f_t(x) = f^x(t) = f(x, t)$ ,  $\forall (x, t) \in S^1 \times [0, \epsilon]$ , valem as seguintes propriedades:

1.  $f_t(S^1)$  é uma curva fechada contida em uma folha  $A(t)$  de  $\mathcal{F}$ ,  $\forall t$ ;
2.  $f_t(S^1)$  é nula homotópica em  $A(t)$  se, e somente se,  $t > 0$ ;
3.  $f^x([0, \epsilon])$  é transversal a  $\mathcal{F}$ ,  $\forall x$ .

A prova deste teorema é consequência direta dos seguintes dois teoremas.

**Teorema 2.6.** Toda folheação de  $C^2$  e codimensão um de uma variedade compacta de dimensão três com grupo fundamental finito tem um ciclo evanescente.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Sc-Mo]. □

**Teorema 2.7.** Toda folheação transversalmente orientável de classe  $C^1$  de codimensão um de uma variedade compacta de dimensão três com um ciclo evanescente tem uma folha compacta.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Sc-Mo]. □

*Demonstração.* (*Demonstração do teorema de Novikov*) Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de  $C^2$  e de codimensão um de uma variedade compacta  $M$  de dimensão três com  $\pi_1(M)$  finito. Seja  $P: \widehat{M} \rightarrow M$  um recobrimento finito de  $M$  tal que o levantamento  $\widehat{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  é transversalmente orientável.  $\pi_1(\widehat{M})$  é finito pois  $\pi_1(\widehat{M}) < \pi_1(M)$  e  $\pi_1(M)$  é finito. Pelo teorema 2.6 temos que  $\widehat{\mathcal{F}}$  tem um ciclo evanescente. Assim  $\widehat{\mathcal{F}}$  tem uma folha compacta  $\widehat{F}$  pelo teorema 2.7. Então  $F = P(\widehat{F})$  é uma folha compacta de  $\mathcal{F}$  provando o resultado. □

**Corolário 2.2.** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de classe  $C^2$  e codimensão um sem folhas compactas de uma variedade  $M$  de dimensão três. Então o levantamento de  $\mathcal{F}$  no recobrimento universal de  $M$  é uma folheação por planos.

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [Sc-Mo]. □

## 10 Geometria Hiperbólica

### 10.1 Algumas propriedades básicas

O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  tem as seguintes propriedades:

1. **A formula de Gauss-Bonnet:** Se  $[abc]$  é um triângulo geodésico em  $\mathbb{H}^2$  então a soma de ângulos em  $[abc]$  é  $\pi - \text{Area}([abc])$ .
2. **Trigonometria de  $\mathbb{H}^2$**  Considere um triângulo com vértices  $ABC$  de modo que os ângulos em  $A, B, C$  são  $\alpha, \beta, \gamma$  e seus lados opostos tem comprimento  $a, b, c$  respectivamente.

(A) **Fórmula do cosseno hiperbólico:**

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cosh(c)$$

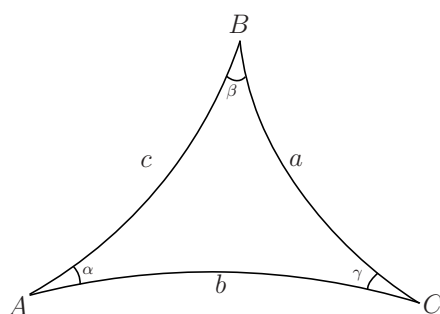
$$\cosh(c) = -\cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)\cos(\gamma)$$

(B) **Fórmula do seno hiperbólico:**

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

(C) Seja  $[ABCD] \subset \mathbb{H}^2$  um quadrilátero (mergulhado) de modo que os ângulos em  $A, B, C$  são  $\frac{\pi}{2}$  e o ângulo em  $D$  é  $\gamma$ . Então

$$\sinh(d(A, B))\sinh(d(A, D)) = \cos(\gamma)$$



**Lema 2.4.** *Considere o quadrilátero **twisted** em  $\mathbb{H}^2$ : como uma configuração de quatro pontos  $A, B, C, D$  em  $\mathbb{H}^2$  tal que*

$$\angle ABC \geq \pi/2, \angle DAB = \pi/2, \angle ADC \geq \pi/2$$

onde " $\angle$ " denota a medida do ângulo e  $d(D, A) \geq h$ . Então  $\sinh(d(A, B)) \leq 1/\sinh(h)$

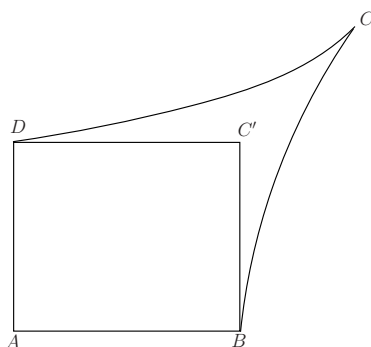


Figura 2.2: Quadriláteros em  $\mathbb{H}^2$ .

*Demonstração.* Pelas hipóteses pode-se encontrar um ponto  $C'$  no interior do quadrilátero  $[ABCD]$  tal que

$$\angle ABC' = \angle DAB = \angle ADC' = \pi/2$$

então a fórmula (C) acima implica que

$$\sinh(d(A, B)) \cdot \sinh(d(A, D)) = \cos(\angle DC'B),$$

donde

$$\sinh(d(A, B)) \cdot \sinh(d(A, D)) \leq 1.$$

Agora pelas hipóteses  $d(A, D) \geq h$  isto implica que  $1/d(A, D) \leq 1/\sinh(h)$ , donde segue o resultado.  $\square$

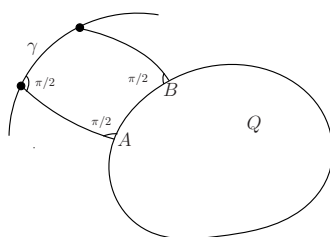
Agora, pegamos uma geodésica  $\gamma$  em  $\mathbb{H}^2$  e definimos a função  $\text{proj}_\gamma: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  como aquela que pega um ponto qualquer em  $\mathbb{H}^2$  e o faz corresponder com o ponto mais próximo da geodésica.

**Lema 2.5.** *Suponha que  $\gamma$  é uma geodésica em  $\mathbb{H}^2$  e  $Q \subset \mathbb{H}^2$  um subconjunto fechado convexo tal que  $d(\gamma, Q) \geq h \geq 0.2$ . Então o diâmetro da projeção no ponto mais próximo de  $\gamma$  a  $Q$  é no máximo  $4 \exp(-h)$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $A \in Q$ ,  $D \in \gamma$  realizam a distância mínima entre  $Q$  e  $\gamma$ . Seja  $C \in \gamma - \{D\}$  qualquer ponto e  $B \in Q$  sua projeção. Agora, aplicamos o lema 2.4 à configuração  $A, B, C, D$ :

$$d(A, B) \leq \sinh(d(A, B)) \leq 1/\sinh(h).$$

Por hipótese tem-se que  $h \geq 0.2$  então  $1/\sinh(h) \leq 4 \exp(-h)$



□

**Corolário 2.3.** *Seja  $Q$  um segmento geodésico em  $\mathbb{H}^2$  e  $\alpha$  uma curva geodésica por partes, a qual consiste de no máximo  $r$  segmentos. Suponha que  $d(Q, \alpha) \geq h \geq 0.2$ . Então o comprimento da projeção no ponto mais próximo de  $\alpha$  a  $Q$  é no máximo  $4r \exp(-h)$ .*

*Demonstração.* É só aplicar o lema 2.5, repetidamente. □

## 11 Quasi-isometrias

Nesta seção damos a definição geral de uma quasi-isometria entre espaços métricos e no caso em que a quasi-isometria esteja definida entre espaços hiperbólicos de dimensão 2 (em geral de dimensão  $n \geq 2$ ), pode-se estender a uma aplicação entre seus bordos ideais de um modo contínuo.

**Definição 2.7.** Uma aplicação  $\varphi : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$  é chamada  $(k, c)$ -quasi-isométrica entre dois espaços métricos se satisfaz: existem constantes  $K > 0$ ,  $c \leq 0$  tais que

$$\frac{1}{K} d_1(x, y) - c < d_2(\varphi(x), \varphi(y)) < K d_1(x, y) + c$$

para quaisquer  $x, y \in M_1$ . Um  $(k, c)$ -quasi-isométrica é chamado uma  $(k, c)$ -quasi-isometria se ela admite uma *inversa aproximada*, isto é uma  $\bar{f}: M_2 \rightarrow M_1$  que é  $(k, c)$ -quasi-isométrica e verifica:

$$d_{M_1}(\bar{f}f(x), x) \leq c, \quad d_{M_2}(f\bar{f}(y), y) \leq c$$

para quaisquer  $x \in M_1, y \in M_2$ . Se a constante é importante dizemos que  $\varphi$  é uma  $(k, c)$ -quasi-isometria.

Os espaços  $M_1$  e  $M_2$  são chamados quasi-isométricos.

**Definição 2.8.** Uma *quasi-geodésica* em um espaço métrico  $M$  é uma função  $\gamma: I \rightarrow M$ , definida sobre um intervalo  $I$ , tal que existem  $c \geq 1, k \geq 0$  com a seguinte propriedade

$$\forall t, t' \in I, \quad \frac{1}{c}|t - t'| - k \leq d_M(\gamma(t), \gamma(t')) \leq c|t - t'| + k \quad (1)$$

**Observação 2.3.** Se pegamos  $K = \max\{c, k\}$  e trocamos  $c$  e  $k$  por  $K$  em (1) temos que  $\gamma$  é uma  $K$ -quasi-isometria entre  $I$  e  $\gamma(I)$ .

**Definição 2.9.** Dado  $(X, d)$  um espaço métrico e  $A, B$  subconjuntos de  $X$ , dizemos que a *distância de Hausdorff* de  $A$  a  $B$  é  $b$ , e denotamos por  $d_H(A, B) = b$ , se para cada  $a \in A$  existe um  $b' \in B$  tal que  $d(a, b') \leq b$ .

Dados dois pontos  $x, y$  em  $\mathbb{H}^2$  denotemos por  $[x, y]$  a geodésica que os liga. Então tem-se o seguinte lema:

**Lema 2.6.** *Existe uma função  $\tau(k, c)$  tal que para qualquer  $(k, c)$ -quasi-geodésica  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{H}^2$  temos:*

$$d_H(f([0, T]), [f(0), f(T)]) \leq \tau(k, c)$$

onde  $k > 1, c > 1$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  a geodésica em  $\mathbb{H}^2$  ligando  $f(0)$  e  $f(T)$ . Agora, mudamos  $f$  por uma curva geodésica por partes como segue: seja  $h = 2kc$ ,  $N = \lfloor T/h \rfloor$ ,  $t_i = hi$ ,  $0 \leq i \leq N$ . Seja  $D = 2kh$ , note que

$$\log\left(\frac{2}{c}\right) = \log\left(\frac{4k}{h}\right) < 1 < D \quad (2)$$

Em cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  escolhemos aplicações geodésicas  $\varphi: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{H}^2$  que une  $f(t_i)$  com  $f(t_{i+1})$ . A distância entre  $f$  e  $\varphi$  é uniformemente

limitada, isto é pegamos  $t \in I$  então  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  para algum  $i$  entre  $0$  e  $N$  logo

$$\begin{aligned} d(f(t), \varphi(t)) &\leq d(f(t), f(t_i)) + d(f(t_i), \varphi(t)), \\ &\leq k|t - t_{i-1}| + c + d(f(t_i), f(t_{i+1})), \\ &\leq 2(kh + c). \end{aligned}$$

Assim é suficiente mostrar o lema para  $\varphi$ . Seja  $x_i := \varphi(t_i)$ . Então  $d(x_i, x_{i+1}) \leq kh + c \leq 2kh$  pois  $f$  é uma quasi-geodésica. Considere a curva  $\alpha_{ij} = \varphi([t_i, t_j])$ ,  $i < j$ . Então

$$\text{long}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=i}^{j-1} d(x_s, x_{s+1}) \leq 2k|t_j - t_i|$$

donde  $\text{long}(\alpha)$  denota o comprimento da curva  $\alpha$ . O fato de que  $f$  é uma quasi-geodésica implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}|t_j - t_i| - c &\leq d(x_i, x_j), \\ |t_j - t_i| &\leq kc + kd(x_i, x_j). \end{aligned}$$

Note que

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{h}{k}|j - i| - c = \frac{h}{k}(j - i) - \frac{h}{2k} \geq \frac{h}{k}(j - i) - \frac{h}{2k}(j - i)$$

assim temos que

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{h}{2k}|j - i| \quad (3)$$

e

$$\text{long}(\alpha_{ij}) \leq 2kh|j - i|. \quad (4)$$

Seja  $\text{proj}_\gamma: \mathbb{H}^2 \rightarrow \gamma$  denota a projeção no ponto mais próximo a  $\gamma$ . Suponha que a curva  $\varphi$  não esteja contida em uma  $D$ -vizinhança de  $\gamma$ , então seja  $x_i$  o primeiro ponto fora da vizinhança e  $x_j$  o último ponto fora dela. Temos que  $d(x_i, \gamma) \leq 2D$  e  $d(x_j, \gamma) \leq 2D$ . Com efeito, temos que  $i > 1$  então  $i - 1 \geq 1$  logo temos que  $\text{long}(\alpha_{i-1, i}) \leq k + c < D$  e como  $x_{i-1}$  pertence a esta vizinhança então  $d(x_i, \gamma) < 2D$ , analogamente  $d(x_j, \gamma) < 2D$ .

O nosso objetivo é limitar  $m = |j - i|$  em função de  $k, c$ . A curva  $\lambda_{i,j}$  consiste de  $m$  segmentos geodésicos, assim do corolário 2.3 temos que

$$\text{long}(\text{proj}_\gamma(\alpha_{i,j})) \leq \exp(-D)m$$

logo

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, \text{proj}_\gamma(x_i)) + d(\text{proj}_\gamma(x_i), \text{proj}_\gamma(x_j)) + d(\text{proj}_\gamma(x_j), x_j), \\ &\leq 2D + d(\text{proj}_\gamma(x_i), \text{proj}_\gamma(x_j)) + 2D, \\ &\leq 4D + \exp(-D)m, \end{aligned}$$

assim aplicando a desigualdade (3) temos que

$$\begin{aligned} \frac{h}{2k}m &\leq \exp(-D) + 4D, \\ m\left(\frac{h}{2k} - \exp(-D)\right) &\leq 4D. \end{aligned}$$

A desigualdade (2) implica que

$$\frac{h}{4k} < \frac{h}{2k} - \exp(-D),$$

portanto

$$m \leq \frac{16Dk}{h} = 32k^2.$$

Agora da desigualdade (2) temos

$$\text{long}(\alpha_{i,j}) \leq 2khm \leq 2kh(32k^2) = 2^7k^4c$$

portanto a curva toda está contida em uma  $2D + 2^7k^4c$ -vizinhança de  $\gamma$ . Isto implica que a curva geodésica por partes  $\text{Image}(\varphi)$  está contida em uma  $4k^2c + 2^7k^4c$  vizinhança de  $\alpha$ . Desde que a distância entre  $\gamma$  e  $\varphi$  é menor que  $2(kh + c)$  conclui-se que

$$\text{Imag}(f) \subseteq \text{Nbd}_{\tau(k,c)}(\gamma),$$

onde  $\text{Nbd}_{\tau(k,c)}$  denota a vizinhança de  $\gamma$  de radio  $\tau(k, c)$  e  $\tau(k, c) = 2^8k^4c$ . A composição  $\text{proj}_\gamma \circ \varphi$  é contínua, isto mostra que  $\gamma$  está contida em uma  $\tau(k, c)$ -vizinhança da imagem de  $f$ . □

**Lema 2.7.** (lema de Morse) *Seja  $Q \subseteq \mathbb{H}^2$  um raio  $(k, c)$ -quasi-geodésica ou uma completa  $(k, c)$ -quasi-geodésica. Então existe  $Q^*$  que é um raio geodésico ou uma geodésica em  $\mathbb{H}^2$  de modo que  $Q$  está contido em  $\text{Nbd}_{\tau(k,c)+1}(Q^*)$ .*



*Demonstração.* Só consideremos o caso de um raio quasi-geodésico  $q: [0, \infty) \rightarrow Q \subseteq \mathbb{H}^2$ , o caso da quasi-geodésica se reduz a dois deste. Considere a sequência de segmentos  $(k, c)$ -quasi-geodésica

$$q_j = q|_{[0, j]}: [0, j] \rightarrow \mathbb{H}^2.$$

Seja  $\gamma_j$  o segmento geodésico  $[q(0), q(j)] \subseteq \mathbb{H}^2$ . Então  $d_{\mathbb{H}}(q([0, j]), \gamma_j) \leq \tau(k, c)$ . Considere os pontos de intersecção  $z_j$  de  $\gamma_j$  com a esfera unitária  $S_1(q(0))$ . Agora seja  $\alpha_j$  a geodésica ligando os pontos  $q(j-1)$  e  $q(j)$ , assim temos que  $\text{long}(\alpha_j) \leq k$ , logo para  $j$  suficientemente grande temos que a  $d(D_1(q(0)), \alpha_j) \geq j/k \geq 0,2$ . O lema 2.5 implica que a distância de  $z_i$  a  $z_{i+1}$  é maior que  $4 \exp(-\frac{j}{k})$ , então a sequência  $\{z_i\}$  é de cauchy em  $S_1(q(0))$ . Assim os segmentos geodésicos  $\gamma_j$  convergem a um raio geodésico  $Q^* = \text{Imagen}(\gamma^*)$ . Agora tem-se que verificar que  $Q \subseteq \text{Nbd}_{\tau(k, c)+1}(Q^*)$ . Escolhamos um  $x = q(t)$  em  $Q$  e seja  $r = d(q(0), x)$ . Então para  $j > t$  temos os pontos  $y_j \in \gamma_j$  próximos de  $x$ . Os pontos  $y_j$  estão contidos na bola  $B_r(q(0))$ . Desde que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j|_{[0, 2t]} = \gamma^*|_{[0, 2t]}$$

deduz-se que  $d(y_j, Q^*) \leq 1$  para  $j$  grande.  $\square$

## 12 Extensão ao círculo no infinito da $(k, c)$ -quasi-isometria

Seja  $\varphi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma  $(k, c)$ -isometria, com  $k, c > 1$ , nesta parte do trabalho queremos estender  $\varphi$  de um jeito natural a uma aplicação  $\phi: \partial_{\infty} \mathbb{H}^2 \rightarrow \partial_{\infty} \mathbb{H}^2$  e mostrar que ela é de fato um homeomorfismo.

Para poder definir-la, tomamos  $x \in \mathbb{H}^2$  e  $p \in \partial_{\infty} \mathbb{H}^2$  quaisquer. Existe um único raio geodésico  $\gamma_p$  que parte de  $x$  e tem ponto ideal  $p$ , logo temos que  $\varphi \circ \gamma_p$  é uma  $(k, c)$ -quasi-geodésica e pelo lema 2.7 está numa vizinhança de um verdadeiro raio geodésico  $\alpha_p$ , que parte de  $\varphi(x)$ . Denotamos por  $\phi(p)$  seu ponto ideal. Dessa maneira definimos  $\phi$ , e vamos a mostrar que esta definição não depende de  $x$ . Com efeito, pegamos  $y$  em  $\mathbb{H}^2$ , distinto de  $x$ , então existe um único raio geodésico  $\gamma'_p$  que parte de  $y$  e tem ponto ideal  $p$  assim pelas propriedades da geometria hiperbólica temos que  $\gamma_p$  e  $\gamma'_p$  são assintóticas, logo elas estão a uma distância limitada e desde que  $\varphi$  é uma quasi-isometria temos que  $\varphi \circ \gamma_p$  e  $\varphi \circ \gamma'_p$  estão a uma distância limitada logo  $\varphi \circ \gamma'_p$  está próximo de  $\alpha_p$  e portanto  $\phi$  está bem definida.

Agora temos que mostrar que  $\phi$  é bijetiva.

**Injetiva:** Suponha que exista  $p, q \in \partial_{\infty} \mathbb{H}^2$  tais que  $\phi(p) = \phi(q)$ , sejam  $\gamma_p$

e  $\gamma_q$  os raios geodésicos que partem de  $x$  e tem pontos ideais  $p$  e  $q$  respectivamente. Desde que  $p$  é distinto de  $q$ , temos que existe uma sequência  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $[0, \infty)$ ,  $x_n = \gamma_p(t_n)$  e  $y_n = \gamma_q(t_n)$  tal que

$$t_n \rightarrow \infty \text{ e } d(x_n, y_n) \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

agora como  $\phi(p) = \phi(q)$  então as quasi-geodésicas  $\phi \circ \gamma_p$  e  $\phi \circ \gamma_q$  estão numa vizinhança limitada de uma geodésica e portanto estão a uma distância limitada uma da outra isto é

$$d(\phi \circ \gamma_p(t), \phi \circ \gamma_q(t)) < r$$

para algum  $r > 0$ . Logo temos

$$\frac{1}{k} d(x_n, y_n) - c \leq d(\phi(x_n), \phi(y_n)) < r$$

que é uma contradição. O que mostra a injetividade.

**Sobrejetiva:** Agora pegamos  $q \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ , então existe um único raio geodésico  $\alpha_q$  que parte de  $\varphi(x)$  e tem ponto ideal  $q$ , seja  $\psi$  a sua inversa aproximada então  $\psi \circ \alpha_q$  é uma quasi-geodésica em  $\mathbb{H}^2$  com ponto inicial  $\psi(\varphi(p))$ . Agora pelo lema 2.7 existe um raio geodésico  $\gamma_p$  com ponto ideal  $p$  e uma aplicação  $\tau(k, c)$  tal que

$$d(\gamma_p(t), \psi(\alpha_q(t))) < \tau(k, c) + 1.$$

Temos que

$$\begin{aligned} d(\alpha_q, \varphi(\gamma_p(t))) &\leq d(\alpha_q(t), \varphi(\psi(\alpha_q(t))) + d(\varphi(\psi(\alpha_q(t))), \varphi(\gamma_p(t))), \\ &\leq c + kd(\psi(\alpha_q(t)), \gamma_p(t)) + c, \\ &\leq k + k(\tau(k) + 1) + c. \end{aligned}$$

Assim  $\varphi(\gamma_p(t))$  está a uma distância limitada de  $\alpha_q$  e pela boa definição de  $\phi$  temos que  $\phi(p) = q$ . Portanto  $\phi$  é sobrejetiva.

Agora vamos mostrar que  $\phi$  é contínua. Pegamos  $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$  e uma sequência  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  convergindo a  $p$ , isto é pegamos  $x$  como ponto base e consideremos o fibrado tangente unitário em  $x$ . Temos que esta sequência define direções  $v_i$  convergindo à direção  $v$  definida por  $p$ . Agora sejam  $\gamma_i$  os raios geodésicos que partem de  $x$  e tem ponto ideal  $p_i$  e seja  $\gamma$  o raio geodésico que parte de  $x$  e tem ponto ideal  $p$ , então  $\varphi \circ \gamma_i$  é uma quasi-geodésica em  $\mathbb{H}^2$ , assim pelo lema 2.7, existe  $\alpha_i$  raios geodésicos, tais que

$$d(\varphi(\gamma_i(t)), \alpha_i(t)) < \tau(k, c) + 1 \text{ para todo } t > 0.$$

Os  $\alpha_i$  definem direções  $u_i$  no fibrado tangente unitário em  $\varphi(x)$ . O nosso objetivo é mostrar que  $u_i$  converge a  $u$ , a direção definida por  $\phi(p)$ . Suponha que isto não acontece, então existe uma subsequência de  $\{u_i\}$  que por comodidade denotamos do mesmo jeito tais que  $u_i$  converge a  $\hat{u}$ , distinto de  $u$ . Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  os raios geodésicos que partem de  $\varphi(x)$  e com direções  $\hat{u}$  e  $u$  respectivamente. Desde que  $u \neq \hat{u}$ , então existe um ponto  $y$  na geodésica  $\alpha$  tal que

$$d(y, \beta) > 2\tau(k, c) + k + c + 3$$

Como  $u_i$  converge a  $\hat{u}$  temos que

$$y = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i(\hat{t}) \quad \text{para algum } \hat{t} > 0.$$

Por outro lado temos que a sequência  $\{\gamma_i(\hat{t})\}$  admite uma subsequência  $\{\gamma_{n_i}(\hat{t})\}$  convergente, isto é  $\{\gamma_{n_i}(\hat{t})\}$  converge a um  $w$ , mas como os  $v_i$  convergem a  $v$  temos que  $w \in \gamma$  e pelo lema 2.7 temos que

$$d(\varphi(\gamma(t)), \alpha(t)) < \tau(k, c) + 1 \quad \text{para todo } t > 0.$$

e o fato que  $\varphi$  é uma quasi-isometria implica que

$$\begin{aligned} d(y, \varphi(w)) &\leq d(y, \alpha_{n_i}(\hat{t})) + d(\alpha_{n_i}(\hat{t}), \varphi(\gamma_{n_i}(\hat{t}))) + d(\varphi(\gamma_{n_i}(\hat{t})), \varphi(w)) \\ &\leq d(y, \alpha_{n_i}(\hat{t})) + \tau(k, c) + 1 + kd(\gamma_{n_i}(\hat{t}), w) + c, \end{aligned}$$

assim para  $i$  suficientemente grande temos que

$$d(y, \varphi(\gamma(\hat{t}))) \leq \tau(k, c) + k + c + 2$$

Finalmente

$$\begin{aligned} d(y, \beta) &\leq d(y, \alpha(\hat{t})), \\ &\leq d(y, \varphi(w)) + d(\varphi(w), \alpha(\hat{t})), \\ &\leq \tau(k, c) + k + c + 2 + \tau(k, c) + 1, \\ &= 2\tau(k, c) + k + c + 3. \end{aligned}$$

que é uma contradição. Logo  $\phi$  é contínua, do mesmo jeito pode-se mostrar que  $\phi^{-1}$  é contínua e portanto  $\phi$  é um homeomorfismo.

# Folheação Uniforme

## 1 Introdução

De agora em diante,  $\mathcal{M}$  representa uma variedade de dimensão 3 fechada e orientada,  $\widetilde{\mathcal{M}}$  seu recobrimento universal,  $\mathcal{F}$  uma folheação de codimensão um transversalmente orientável e  $\widetilde{\mathcal{F}}$  sua folheação pullback no recobrimento universal.  $\mathcal{H}$  sempre denotará o espaço das folhas de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  e  $\pi: \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  denota a projeção do recobrimento universal em  $\mathcal{M}$ .

**Definição 3.1.** Uma folheação *taut*  $\mathcal{F}$  de uma variedade de dimensão 3 é uma folheação com a propriedade que existe um círculo na variedade, transversal a  $\mathcal{F}$ , a qual intersecta qualquer folha de  $\mathcal{F}$ .

**Observação 3.1.** Em uma variedade de dimensão 3 atoroidal, taut é equivalente à condição de não ter uma folha toro.

Lembremos que uma métrica riemanniana numa variedade  $\mathcal{M}$  é uma aplicação que a cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  associa um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definido no espaço tangente a  $\mathcal{M}$  em  $p$ . A métrica é chamada de classe  $C^r$  se para cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  existe um sistema de coordenadas  $\varphi = (x_1, \dots, x_m): \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  com  $p \in \mathcal{U}$  tal que as aplicações  $g_{ij}(q) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle$  são de classe  $C^r$  para todo  $i, j = 1, \dots, m$ .

É fácil verificar que em qualquer variedade existe uma métrica riemanniana de classe  $C^\infty$ . Temos o seguinte resultado devido a Alberto Candel [Can].

**Teorema 3.1.** (Candel) *Seja  $\mathcal{F}$  é uma folheação taut de uma variedade  $\mathcal{M}$  atoroidal e irredutível. Então existe uma métrica riemanniana sobre  $\mathcal{M}$  tal que a métrica induzida sobre as folhas tem curvatura constante  $-1$ .*

Dizemos que tal folheação tem *folhas hiperbólicas*. Denotemos por  $d$  a distância dada pelo teorema anterior e para cada  $F \in \mathcal{F}$  denotemos por  $d_F$  a distância na folha.

## 2 Folheação $\mathbb{R}$ -coberta

**Definição 3.2.**  $\mathcal{F}$  é  $\mathbb{R}$ -coberta se, somente se  $\mathcal{H}$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

No que segue as folheações são  $\mathbb{R}$ -cobertas com folhas hiperbólicas. O que implica que no recobrimento universal, as folhas de  $\mathcal{F}$  são isométricas a cópias de planos hiperbólicos  $\mathbb{H}^2$  e portanto cada uma delas tem um círculo no infinito. Para cada folha  $\lambda$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , seja  $S_\infty^1(\lambda)$  denota o seu círculo no infinito.

**Lema 3.1.**  $\mathcal{F}$  é  $\mathbb{R}$ -coberta se, somente se  $\mathcal{H}$  é hausdorff.

*Demonstração.* Assumamos que  $\mathcal{H}$  é hausdorff. Suponha que existe uma transversal fechada  $\gamma$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$  transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Então  $\gamma$  borda um disco  $D$  imerso que pode-se colocar em posição geral, isto pela construção do círculo evanescente, feita por Haefliger [Ca-Li]. Uma análise da folheação induzida em  $D$  mostra que existem curvas  $\alpha_1, \alpha_2$  de tal jeito que  $\alpha_1$  é uma curva fechada e  $\alpha_2$  se espirala em torno de  $\alpha_1$ . Sejam  $F_1, F_2$  as folhas que contêm  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  respectivamente. Assim  $F_2$  se acumula sobre  $F_1$ , logo para qualquer vizinhança de  $F_1$  contém  $F_2$ , o que contradiz o fato de que  $\mathcal{H}$  é hausdorff. portanto qualquer curva transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$  é projetada no espaço das folhas  $\mathcal{H}$  injetivamente, assim  $\mathcal{H}$  é uma variedade de dimensão 1 com base enumerável, logo ela é ou o círculo ou a reta real. No caso do círculo pode-se construir uma transversal fechada a  $\tilde{\mathcal{F}}$ , que é uma contradição. Assim  $\mathcal{F}$  é  $\mathbb{R}$ -coberta. A recíproca é trivial.  $\square$

**Observação 3.2.** Dada uma sequência de pontos  $p_i$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$ , a menos de fazer translações por elementos de  $\pi_1(\tilde{\mathcal{M}})$  podemos supor que alguma subsequência de  $p_i$  converge. Com efeito, temos que  $\pi(p_i)$  é uma sequência de pontos em  $\mathcal{M}$ , a qual é compacta, assim existe uma subsequência convergente a um ponto  $\hat{p} \in \mathcal{M}$  que também denotaremos por  $\pi(p_i)$ . Pegamos  $p_0$  um levantamento de  $\hat{p}$ , então existem vizinhanças folheada  $U$  de  $\hat{p}$  e  $V$  de  $p_0$  tal que  $\pi : V \rightarrow U$  é um homeomorfismo, logo existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i \geq n_0$  os  $\pi(p_i)$  estão em  $U$ . Assim existem  $\hat{p}_i \in \tilde{\mathcal{M}}$  tais que  $\pi(\hat{p}_i) = \pi(p_i)$ , portanto existem  $g_i \in \pi_1(\tilde{\mathcal{M}})$  tais que  $g_i(p_i) = \hat{p}_i$ , e os  $\hat{p}_i$  convergem a  $p_0$  o que conclui a afirmação.

**Lema 3.2.** *As folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  são uniformemente próprias; isto é, existe uma função  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  tal que  $f(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  e tal que para cada folha  $\lambda$ , e quaisquer dois pontos  $p, q$  em  $\lambda$  que estão distantes de  $t$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$  estão distantes no máximo de  $f(t)$  em  $\lambda$ .*

*Demonstração.* Suponha que o lema é falso, então existe uma sequência de pontos  $p_i, q_i$ , distantes de  $t$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$  que estão em folhas  $F_i$  onde a distância ao longo das folhas entre  $p_i$  e  $q_i$  vai para  $\infty$ . Pela observação 3.2, fazendo translações por elementos  $g_i \in \pi(\mathcal{M})$ , de alguns  $p_i$ 's temos uma subsequência convergente, que denotamos por  $g_{n_i}(p_{n_i})$ , convergindo a  $p \in \tilde{\mathcal{M}}$ . Agora, como os  $g_i$  são isometrias, temos que os trasladados de  $p_i$  e  $q_i$  estão à mesma distância  $t$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$  e estão ambos na folha  $g_i(F_i)$ . Logo, como  $g_{n_i}(p_{n_i})$  converge e a distância de  $g_{n_i}(p_{n_i})$  a  $g_{n_i}(q_{n_i})$  é limitada por  $t$  para qualquer  $i$ , então a sequência  $\{g_{n_i}(q_{n_i})\}$  é limitada, portanto existe uma subsequência, a qual chamamos de  $\{g_{n_k}(q_{n_k})\}$ , convergente a  $q \in \tilde{\mathcal{M}}$ . Como o espaço das folhas é hausdorff,  $p$  e  $q$  estão na mesma folha  $F$ ; Com efeito, suponha que  $p \in F$  e  $q \in G$  onde  $F, G \in \tilde{\mathcal{F}}$  e sejam  $U$  e  $V$  vizinhanças quaisquer de  $p$  e  $q$  respectivamente. Então existe um  $i$  suficientemente grande tal que  $g_{n_k}(p_{n_k})$  está em  $U$  e  $g_{n_k}(q_{n_k})$  está em  $V$ , donde a folha  $g_{n_k}(F_{n_k})$  encontra-se com ambas as vizinhanças. Como  $U$  e  $V$  são arbitrárias, isto mostra que quaisquer duas vizinhanças de  $F$  e  $G$  se intersectam, implicando que  $\mathcal{H}$  é não hausdorff, contradição. Assim  $p$  e  $q$  pertencem à mesma folha  $F$  e a distância entre eles ao longo da folha é limitada. Segue-se que o limite da distância no longo das folhas entre  $p_i$  e  $q_i$  é  $d_F(p, q)$  e portanto é limitada, contradizendo a suposição.  $\square$

**Observação 3.3.** A função  $f$  pode ser escolhida de modo que ela seja crescente.

**Lema 3.3.** *Para  $\mathcal{F}$  uma folheação  $\mathbb{R}$ -coberta de  $\mathcal{M}$ , e  $\mathcal{H}$  o espaço das folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , para qualquer  $\lambda \in \mathcal{H}$  a órbita de  $\lambda$  pela ação de  $\pi_1(\mathcal{M})$  vai no infinito em ambas direções.*

*Demonstração.* Fixamos uma orientação em  $\mathcal{H}$ . Suponha que ela é limitada superiormente, assim existe uma menor cota superior  $\lambda'$  deste conjunto. Então  $\lambda'$  é invariante pela ação de  $\pi_1(\mathcal{M})$ . Com efeito, se existe um  $\beta \in \pi_1(\mathcal{M})$  tal que  $\beta(\lambda') \neq \lambda'$  temos  $\beta(\lambda') < \lambda'$ , primeiro caso, O fato de que  $\lambda'$  é o supremo deste conjunto e que  $\beta$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{H}$  em si mesmo, implica que existe um  $\alpha \in \pi_1(\mathcal{M})$  tal que  $\beta(\alpha(\lambda)) > \lambda'$  o que é uma contradição. O outro caso é similar só considerando  $\beta^{-1}$ .

**Afirmção 3.1.**  $\pi(\lambda')$  é fechada.

Com efeito, pegamos uma sequência  $\{z_i\}$  em  $\pi(\lambda')$  convergindo para  $z_0$ , com  $z_0 \notin \pi(\lambda')$ . Então pegamos uma vizinhança folheada  $V$  de  $z_0$  e pegamos  $\hat{z}_0$  um levantamento de  $z_0$  ao recobrimento universal. Assim, existe uma vizinhança  $U$  de  $\hat{z}_0$  tal que  $\pi|_U: U \rightarrow V$  é um difeomorfismo. Como  $z_0 \notin \pi(\lambda')$ , os  $z_i$ 's para  $i$  suficientemente grande estão em  $V$  e seus levantamentos em  $U$  pertence a transladados da folha  $\lambda'$  arbitrariamente próximos de  $\hat{z}_0$ . Mas isto é um absurdo, visto que  $\lambda'$  é invariante. Vemos assim que  $\pi(\lambda')$  é fechada. Como  $\lambda' = \mathbb{R}^2$  segue que  $\lambda'/\pi_1(M)$  é um  $K(\pi_1, 1)$ , logo homotopicamente equivalente a  $M$ . Isto é um absurdo pois  $M$  é tridimensional.

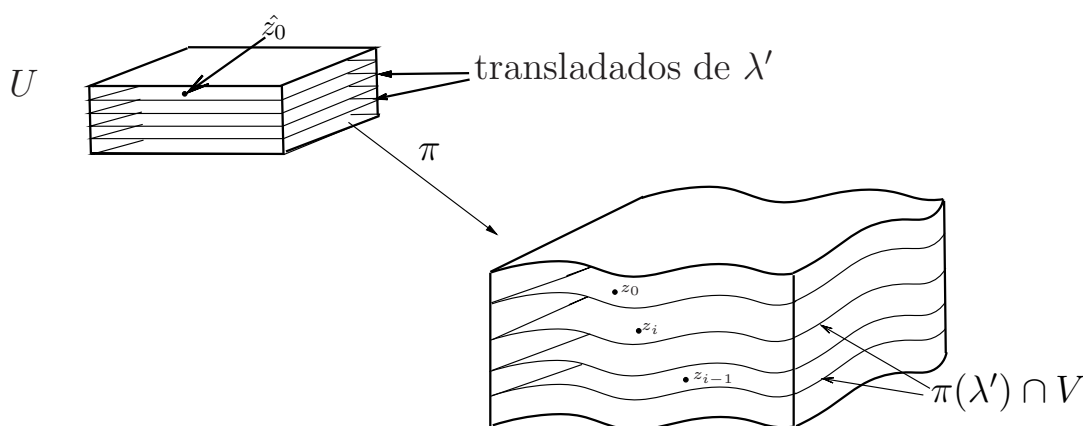


Figura 3.1: esboço da prova

□

**Definição 3.3.** Uma folheação  $\mathcal{F}$  é *uniforme* se dado duas folhas quaisquer  $E, F$  of  $\mathcal{F}$ , existe uma constante  $b$ , de modo que a distância hausdorff entre  $E, F$  é menor que  $b$ ; explicitamente, para qualquer ponto  $x \in E$  existe um ponto  $y \in F$  tal que  $d(x, y) < b$  (a distância é medida na variedade) e reciprocamente. Esta constante só depende das folhas  $E$  e  $F$ .

### 3 Círculo no infinito e sua topologia

Se  $E, F$  são folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , o conjunto  $(E, F)$  denota o conjunto das folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  separando  $E$  de  $F$ . Como  $\mathcal{H}$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ , então se  $E, F$  são distintos e o conjunto  $(E, F)$  é homeomorfo a um intervalo. Seja  $[E, F]$  a união de  $(E, F)$  com as folhas  $E, F$ .

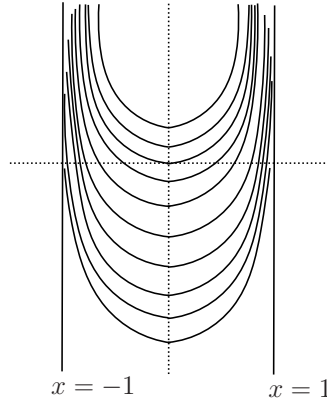


Figura 3.2: Uma folheação que não é uniforme

**Definição 3.4.** (Cilindro no infinito) Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação  $\mathbb{R}$ -coberta com folhas hiperbólicas. Seja

$$\mathcal{A} = \bigcup_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} S_{\infty}^1(F)$$

chamado de cilindro no infinito de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . A união de todos os círculos no infinito das folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Desde que  $\tilde{\mathcal{F}}$  é  $\mathbb{R}$ -coberta, então intuímos que  $\mathcal{A}$  é o cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ . O primer passo é definir uma topologia em  $\mathcal{A}$  de modo que este seja homeomorfo ao cilindro.

**Notação:** Dado  $x \in \tilde{\mathcal{M}}$ ,  $F(x)$  denota a folha de  $\tilde{\mathcal{F}}$  contendo  $x$ .

Cada raio geodésico em  $F(x)$  começando em  $x$  define um único ponto ideal em  $S_{\infty}^1(F(x))$  dando um homeomorfismo entre o fibrado tangente unitário de  $F(x)$  em  $x$  e  $S_{\infty}^1(F(x))$ . Seja  $T_1\tilde{\mathcal{F}}$  o fibrado tangente unitário de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Dado qualquer  $B \subseteq \tilde{\mathcal{M}}$ , seja  $\tilde{\mathcal{F}}_B$  a união de folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  que intersectam  $B$  e

$$\mathcal{A}_B = \bigcup_{\lambda \in \tilde{\mathcal{F}}_B} S_{\infty}^1(\lambda)$$

Isto é particularmente útil se  $B = \mu$  é uma transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Com esta notação denotamos por  $T_1\tilde{\mathcal{F}}|_{\mu}$  o fibrado tangente unitário a  $\tilde{\mathcal{F}}$  restrito à transversal  $\mu$ . Definimos agora de um jeito natural a seguinte aplicação

$$\pi_{\mu} : T_1\tilde{\mathcal{F}}|_{\mu} \rightarrow \mathcal{A}_{\mu}$$



como segue. Para  $v \in T_x \mathcal{F}$  com  $x \in F$ , existe um único raio geodésico  $\gamma_v$  em  $F$  partindo de  $x$  e em direção a  $v$ . Este raio define um único ponto  $\pi_\mu(v)$ . A restrição de  $\pi_\mu$  a  $T_x \mathcal{F}$  para qualquer  $x \in \mu$  é obviamente um homeomorfismo. Claramente  $\pi_\mu$  é uma bijeção, então definimos uma topologia em  $\mathcal{A}$  como sendo a requerida para fazer  $\pi_\mu$  um homeomorfismo para cada transversal  $\mu$ .

**Proposição 3.1.** *A topologia sobre  $\mathcal{A}$  definida pelas aplicações  $\pi_\mu$  é bem definida. Com respeito a esta topologia,  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$ . A união  $\widetilde{\mathcal{M}} \cup \mathcal{A}$  tem uma topologia natural fazendo-a homeomorfo a  $D^2 \times \mathbb{R}$ , onde  $D^2$  é o disco fechado unitário e  $D^2 \times \{t\}$  corresponde à união  $F \cup S_\infty^1(F)$  para  $F$  uma folha de  $\widetilde{\mathcal{F}}$ .*

*Demonstração.* Temos que provar a boa definição desta topologia em  $\mathcal{A}_\mu$ , isto é temos que mostrar: dado outra transversal  $\lambda$  a  $\widetilde{\mathcal{F}}$  tal que sua projeção em  $\mathcal{H}$  é a mesma que  $\mu$ , então a coleção de abertos definidas em  $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\lambda$  é a mesma. Agora como ambas as topológicas são 1-enumeráveis então basta considerar o comportamento das sequências. Consideremos a sequência  $y_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  convergindo a  $y_0$  na topologia  $\mathfrak{T}_\mu$ . Então  $y_i$ 's estão em  $S_\infty^1(F_i)$ , para folhas  $F_i$ 's unicamente definidas que estão em  $\widetilde{\mathcal{F}}_\mu$  (igual a  $\widetilde{\mathcal{F}}_\lambda$ ). Sejam

$$x_i = F_i \cap \mu, \quad z_i = F_i \cap \lambda$$

Então a sequência  $F_i$  converge a  $F_0$  in  $\mathcal{H}$ ,  $F_0$  uma folha de  $\widetilde{\mathcal{F}}_\mu$ . Também

$$x_i \rightarrow x_0 \quad \text{em } \mu, \quad \text{com } x_0 \text{ em } F_0 \quad \text{e} \quad z_i \rightarrow z_0 \quad \text{em } \lambda$$

Para cada  $i$  seja  $l_i$ ,  $s_i$  raios geodésicos em  $F_i$  partindo de  $x_i$ ,  $z_i$  respectivamente com ponto ideal  $y_i$  em  $S_\infty^1(F_i)$ . Isto vem da identificação dos fibrados tangente unitários a  $\widetilde{\mathcal{F}}$  em  $x_i$ ,  $z_i$  com  $S_\infty^1(F_i)$  respectivamente. Desde que a sequência  $y_i$  converge a  $y_0$  em  $\mathfrak{T}_\mu$  então as direções de  $l_i$  em  $x_i$  convergem à direção de  $l_0$  em  $x_0$ .

Note que  $y_i$  converge para  $y_0$  em  $\mathfrak{T}_\lambda$  se e somente se as direções de  $s_i$  em  $F_i$  convergem à direção de  $s_0$  em  $F_0$ . Desde que  $x_i$  converge para  $x_0$  e  $z_i$  converge para  $z_0$  então a distância de  $x_i$  e  $z_i$  é limitada na variedade, para todo  $i$ , logo pelo lema 3.2 temos que  $d_{F_i}(x_i, z_i)$  é limitada por cima para todo  $i$ . Em adição temos que os raios  $l_i$ ,  $s_i$  para  $i \geq 1$  definem o mesmo ponto ideal  $y_i$  em  $S_\infty^1(F_i)$ . Assim,  $l_i$  e  $s_i$  são assintóticas em  $F_i$ . Estes fatos implicam que dado qualquer  $\epsilon > 0$  existe um positivo  $\alpha_i(\epsilon)$  de modo que salvo um comprimento inicial de  $\alpha_i(\epsilon)$  o restante dos raios  $l_i$ ,  $s_i$  estão em uma  $\epsilon$ -vizinhança um da outra, em  $F_i$ . O fato de que  $d_{F_i}(x_i, z_i)$  é limitada implica

que os  $\alpha_i(\epsilon)$  são limitados. Com efeito, suponha o contrário, isto é, que os  $\alpha_i(\epsilon) \rightarrow \infty$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Agora pegamos  $\hat{x}_i$  em  $l_i$ , com  $d_{F_i}(x_i, \hat{x}_i) \geq \alpha_i(\epsilon)$  logo passando a subsequência pode-se supor que  $\hat{x}_i$  converge e pelo fato que os  $l_i$  convergem a  $l_0$  temos que o limite  $\hat{x}_0$  desta sequência fica em  $l_0$  logo

$$d(x_i, \hat{x}_i) \leq d(x_i, x_0) + d(x_0, \hat{x}_0) + d(\hat{x}_0, \hat{x}_i),$$

donde temos que  $d(x_i, \hat{x}_i)$  é limitada superiormente e pelo lema 3.2 é limitada na folha, o que contradiz a hipótese.

Portanto podemos pegar uma cota superior  $\alpha(\epsilon)$  dos  $\{\alpha_i(\epsilon)\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Então exceto um segmento de comprimento  $\alpha(\epsilon)$  o restante dos raios  $l_i$ ,  $s_i$  estão em uma  $\epsilon$ -vizinhança um da outra, para qualquer  $i$ .

Considere qualquer subsequência  $s_{i_k}$  de modo que  $s_{i_k}$  converge no raio  $\nu_0$  em  $F_0$  ou equivalentemente que as direções de  $s_{i_k}$  em  $z_{i_k}$  converge à direção  $\nu_0$  em  $z_0$ . Para simplificar a notação assuma que é a sequência original  $s_i$ . A propriedade acima e o fato de que  $l_i$ ,  $s_i$  convergem a  $l_0$  e  $\nu_0$  respectivamente implica a seguinte afirmação

**Afirmção 3.2.** Salvo um segmento inicial de comprimento  $\alpha(\epsilon)$ , o restante dos raios  $l_0$  e  $s_0$  estão em uma  $\epsilon$ -vizinhança um do outro em  $F_0$ .

Precisamente, se  $w$  é um ponto de  $l_0$  tal que  $d_{F_0}(x_0, w)$  é maior que  $\alpha(\epsilon)$ , então

$$w = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i \quad \text{com} \quad w_i \in l_i \quad \text{e} \quad d_{F_i}(x_i, w_i) > \alpha(\epsilon),$$

e pelo lema 3.2 temos que  $d_{F_i}(x_i, w_i)$  é limitada superiormente. Pela propriedade acima existem  $u_i$  em  $s_i$  com  $d_{F_i}(w_i, u_i)$  menor que  $\epsilon$ . Agora temos que conseguir um  $u \in \nu_0$  tal que  $d_{F_0}(w, u)$  seja menor ou igual a  $\epsilon$  e salvo subsequência podemos supor que os  $u_i$  convergem. Como  $u_i$  e  $z_i$  são sequências convergentes  $d(u_i, z_i)$  é limitada superiormente na variedade então pelo lema 3.2 tem-se que a  $d_{F_i}(u_i, z_i)$  é limitada superiormente. Por conseguinte o limite dos comprimentos dos segmentos de geodésicas unindo  $z_i$  e  $u_i$  é limitado assim os  $u_i$  convergem a um ponto  $u$  em  $\nu_0$ . Logo  $d_{F_0}(w, u)$  é limitada superiormente por  $\epsilon$  e reciprocamente. Isto implica que  $l_0$  e  $\nu_0$  tem sub-rios que estão em uma  $\epsilon$ -vizinhança um do outro, segue-se da geometria hiperbólica, que eles são assintóticos em  $F_0$ . Isto significa que  $\nu_0$  define o ponto ideal  $y_0$  em  $S^1_\infty(F_0)$  portanto os raios  $\nu_0$  e  $s_0$  são iguais. Isto equivale a dizer que as direções de  $s_i$  convergem à direção de  $s_0$ . Mas este fato só é verdade para uma subsequência da sequência original. Isto prova que qualquer sequência convergente  $y_i$  convergindo a  $y_0$  em  $\mathfrak{T}_\mu$  tem uma subsequência a qual converge a  $y_0$  em  $\mathfrak{T}_\lambda$  como queríamos provar. Assim

provamos que a topologia em  $\mathcal{A}_\mu$  é bem definida. Agora podemos olhar  $\mathcal{A}$  como

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\mu_i}$$

com  $\mu_i$  intersectando mais e mais o espaço das folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . A topologia definida em  $\mathcal{A}_{\mu_i}$  a faz homeomorfo no  $T_1 \tilde{\mathcal{F}}|_{\mu_i}$  que é homeomorfo a  $S^1 \times (0, 1)$ , assim cada  $\mathcal{A}_{\mu_i}$  é homeomorfo no cilindro e assim  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Similarmente pode-se definir uma topologia só

$$\bigcup_{x \in \mu} (F(x) \cup S_\infty^1(F(x))),$$

que o torna homeomorfo a  $D^2 \times (0, 1)$ , onde cada folha com seu círculo no infinito corresponde a  $D^2 \times \{t\}$ . Segue que  $\tilde{\mathcal{M}} \cup \mathcal{A}$  é naturalmente homeomorfo a  $D^2 \times \mathbb{R}$ .  $\square$

Se  $g$  é uma translação de recobrimento de  $\tilde{\mathcal{M}}$  e  $L$  é uma folha de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , então  $g$  leva  $L$  em  $g(L)$  por uma isometria, logo ela manda geodésicas em geodésicas, assim mesmo ela transporta o fibrado tangente unitário a um ponto  $x \in L$  em outro fibrado tangente unitário no ponto  $g(x) \in g(L)$  que permite estender  $g$  a um homeomorfismo  $g_\infty$  entre os círculos no infinito. Isto produz uma bijeção de  $\mathcal{A}$  em si mesmo. A topologia definida em  $\mathcal{A}$ , faz desta extensão um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$ , que é chamado homeomorfismo de recobrimento. Em certas situações fazemos um abuso da notação e escrevemos  $g$  em lugar de  $g_\infty$ . Com isto obtemos que  $\pi_1(M)$  atua no círculo no infinito.

Claramente  $\mathcal{A} \cong S^1 \times \mathbb{R}$  tem uma folheação por círculos, que são os círculos no infinito das folhas. Isto é o que chamamos de folheação "horizontal" de  $\mathcal{A}$ . Naturalmente temos que a folheação horizontal é invariante pela ação de  $\pi_1(M)$ . Em geral a ação de  $\pi_1(M)$  sobre  $\mathcal{A} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ , não respeita a folheação vertical dada por  $\{x\} \times \mathbb{R}$ . O principal objetivo do capítulo é produzir uma folheação vertical de  $\mathcal{A}$  que é associada à geometria da folheação e que seja invariante pela ação de  $\pi_1(M)$ .

#### 4 Construção da folheação vertical-caso uniforme

**Proposição 3.2.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação  $\mathbb{R}$ -coberta uniforme com folhas hiperbólicas. Então quaisquer duas folhas  $E, F$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  são quasi-isométricas.*

*Demonstração.* Com efeito, fixamos  $E, F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $b_1 > 0$  de modo que a distância hausdorff entre  $E$  e  $F$  seja menor que  $b_1$ . Definamos uma aplicação  $\varphi : E \rightarrow F$  :

$$\varphi(x) = y \quad \text{para algum } y \text{ em } F \text{ com } d(x, y) < b_1$$

A aplicação  $\varphi$  não está bem definida, mas está *amplamente definida*; pelo lema 3.2 existe  $b_2$  de modo que se  $x \in E$  e  $y, z$  em  $F$  com

$$d(x, y) < b_1, \quad d(x, z) < b_1, \quad \text{então } d_F(y, z) < b_2 = f(2b_1)$$

Conclui-se que  $\varphi$  está bem definida módulo um conjunto de diâmetro  $b_2$  em  $F$ . Este é o significado *amplamente definida*. Agora queremos mostrar que  $\varphi$  é uma quasi-isometria de  $E$  em  $F$ .

Para quaisquer  $x, y \in E$  escolhemos um arco geodésico mínimo  $\gamma$  de  $x$  a  $y$  em  $E$  tendo comprimento  $a_1$  e seja  $n$  o inteiro  $\lfloor a_1 \rfloor$  onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota a função máximo inteiro. Então  $d_E(x, y)$  é um número no intervalo  $[n, n+1)$ . Divida  $\gamma$  por pontos  $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n+1} = y$ , com  $d_E(x_{i-1}, x_i)$  igual a 1 para qualquer  $i$  menor que  $n$  e  $d_E(x_n, x_{n+1})$  menor que 1. Então

$$\begin{aligned} d(\varphi(x_{i-1}), \varphi(x_i)) &\leq d(\varphi(x_{i-1}), x_{i-1}) + d(x_{i-1}, x_i) + d(x_i, \varphi(x_{i-1})) \\ &\leq b_1 + 1 + b_1 = (2b_1 + 1). \end{aligned}$$

Seja  $b_3 = f(2b_1 + 1)$  assim se  $w, z$  estão na folha  $F$  e  $d(w, z)$  é menor que  $2b_1 + 1$  então  $d_{F(z)}(z, w)$  é menor que  $b_3$ . Segue que

$$\begin{aligned} d_F(\varphi(x), \varphi(y)) &\leq \sum_{i=1}^{n+1} d_F(\varphi(x_i), \varphi(x_{i-1})) \\ &\leq (n+1)b_3 \\ &< (d_E(x, y) + 1)b_3 = d_E(x, y)b_3 + b_3 \end{aligned}$$

Isto mostra um lado da desigualdade requerida para a quasi-isometria. Do mesmo jeito existe uma aplicação  $\xi$ , de  $F$  em  $E$  com  $d(w, \xi(w))$  menor que  $b_1$  para todo  $w$  em  $F$ . Assim,

$$d(w, \varphi\xi(w)) \leq d(w, \xi(w)) + d(\xi(w), \varphi\xi(w)) \leq 2b_1$$

e portanto

$$d_F(w, \varphi\xi(w)) \leq b_2 = f(2b_1)$$

para todo  $w \in F$ . De forma similar pode-se mostrar que  $d_E(x, \xi\varphi(x))$  é menor que  $b_4$  para todo  $x$  em  $E$ . Dado  $x, y$  em  $E$ , seja  $z = \varphi(x)$  e  $w = \varphi(y)$ . Os argumentos acima implicam que

$$d_E(\xi(z), \xi(w)) \leq b_3 d_F(z, w) + b_3.$$

Também

$$\begin{aligned} d_E(x, y) &\leq d_E(x, \xi\varphi(x)) + d_E(\xi\varphi(x), \xi\varphi(y)) + d_E(\xi\varphi(y), y) \\ &\leq 2b_2 + b_3 d_F(\varphi(x), \varphi(y)) + b_3, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{b_3} d_E(x, y) - \left( \frac{2b_2}{b_3} + 1 \right) \leq d_F(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Pela observação 3.3 temos que  $b_2 = f(2b_1) \leq f(2b_1 + 1) = b_3$  assim

$$\frac{2b_2}{b_3} + 1 \leq 3$$

logo pegamos  $k = \max\{3, b_3\}$ , assim  $\varphi$  é uma  $k$ -quasi-isométrica.  $\square$

**Teorema 3.2.** (*folheação vertical-caso uniforme*) *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação  $\mathbb{R}$ -coberta, uniforme com folhas hiperbólicas. Então dado quaisquer duas folhas  $E, F$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , existe um homeomorfismo canônico entre  $S_\infty^1(E)$  e  $S_\infty^1(F)$ . Isto nos dá um círculo universal que é naturalmente homeomorfo a qualquer círculo no infinito. Existe uma folheação vertical em  $\mathcal{A}$  que é transversal à folheação horizontal e é invariante pela ação de  $\pi_1(M)$ .*

*Demonstração.* Existe uma breve demonstração deste resultado em [Th3]. Pela proposição anterior temos que para quaisquer duas folhas  $E, F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  existe uma  $k$ -quasi-isometria  $\varphi_E^F: E \rightarrow F$  e tem-se mostrado que ela se estende a um homeomorfismo  $\phi_E^F: S_\infty^1(E) \rightarrow S_\infty^1(F)$ .

Agora produzimos uma folheação vertical em  $\mathcal{A}$ . Fixemos  $E$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Para qualquer  $y$  em  $S_\infty^1(E)$  e qualquer  $F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$ , então  $\phi_E^F(y)$  é um ponto em  $S_\infty^1(F)$ . Seja

$$\alpha_y = \bigcup_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \phi_E^F(y).$$

Pelo que vimos acima  $\alpha_y$  intersecta qualquer círculo  $S_\infty^1(F)$  em um só ponto. Agora mostremos que  $\alpha_y$  é uma curva contínua em  $\mathcal{A}$ . Seja  $\mu$  uma transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $x_i$  uma sequência em  $\mu$  convergindo a  $x_0$ . Seja  $F_i = F(x_i)$  para todo  $i \geq 0$ . Buscaremos mostrar que  $y_i = \phi_E^{F_i}(y)$  produz uma sequência

convergindo a  $y_0 = \phi_E^{F_0}(y)$  e isso bastará para mostrar que  $\alpha_y$  é contínua. Considere  $l_i$  o raio geodésico em  $F_i$  iniciando em  $x_i$  e com ponto ideal  $y_i$ . Por simplicidade assumimos que todos os  $F_i$ , com  $i$  maior que 1 estão no intervalo  $(F_0, F_1)$ . Tal  $F_i$  separa  $F_0$  de  $F_1$  em  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . A distância de hausdorff é monótona crescente: se  $[F, G]$  é um subconjunto de  $[L, H]$  em  $\mathcal{H}$ , então  $d_H(F, G)$  é menor ou igual que  $d_H(L, H)$ . Portanto

$$d_H(F_0, F_i) \text{ é limitado superiormente por } d_H(F_0, F_1)$$

para todo  $i \geq 0$ . Agora, para cada  $i$  temos que  $\phi_{F_0}^{F_i}$  é uma  $k_i$ -quasi-isometria; lembrando a demonstração da proposição anterior, a constante  $k_i$  só dependia da distância de Hausdorff e além disso pela observação 3.3 tem-se que  $k_i \leq k_1$ , assim todas as  $\phi_{F_0}^{F_i}$  são quasi-isometrias uniformes: elas são todas  $k$ -quasi-isometrias para um  $k$  fixo. As imagens  $\phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$  são quasi-geodésicas em  $F_i$  com ponto ideal  $y_i$ .

**Afirmção 3.3.** As imagens  $\phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$  estão a uma distância uniformemente limitada de  $l_i$  em  $F_i$ .

Note primeiramente que pelo lema 2.7 existe uma geodésica  $\alpha_i$  partindo de  $z_i = \phi_{F_0}^{F_i}(x_0)$  e com ponto ideal  $y_i$  e uma função  $\tau(k)$  tal que

$$d_H(\phi_{F_0}^{F_i}(l_0), \alpha_i) < \tau(k) + 1 \quad (1)$$

por outro lado temos que,  $x_i$  converge a  $x_0$ , assim a  $d(x_i, x_0)$  é limitada superiormente e portanto

$$\begin{aligned} d(x_i, z_i) &\leq d(x_i, x_0) + d(x_0, z_i) \\ &= d(x_i, x_0) + d(x_0, \phi_{F_0}^{F_i}(x_0)) \\ &\leq d(x_i, x_0) + d_H(F_0, F_1), \end{aligned}$$

o que implica, pelo lema 3.2 que  $d_{F_i}(x_i, z_i)$  é limitada superiormente por  $k'$ , para qualquer  $i \geq 1$ . Este fato implica que os  $l_i$  estão a uma distância uniforme de  $\phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$  em  $F_i$ , isto é  $d_H(\phi_{F_0}^{F_i}(l_0), l_i)$  é uniformemente limitada. Com efeito, pegamos um  $w \in l_i$ , o nosso objetivo é encontrar um  $q_0 \in \phi_{F_0}^{F_i}(l_0)$  que esteja a uma distância limitada (não dependente de  $i$ ) de  $w$ . Seja,  $\text{proj}_{\alpha_i}: F_i \rightarrow \alpha_i$ , denota a função projeção no ponto mais próximo de  $\alpha_i$ , então temos que

$$d_{F_i}(w, \text{proj}_{\alpha_i}(w)) \leq d_{F_i}(x_i, z_i)$$

Agora como  $\text{proj}_{\alpha_i}(w) \in \alpha_i$  então por (1), existe um  $q \in l_0$ , tal que  $d(\phi_{F_0}^{F_i}(q), \text{proj}_{\alpha_i}(w)) \leq \tau(k) + 1$ , logo pelo lema 3.2 temos que

$$d_{F_i}(\phi_{F_0}^{F_i}(q), \text{proj}_{l_i}(w)) \leq f(\tau(k) + 1)$$

portanto

$$\begin{aligned} d_{F_i}(w, \varphi_{F_0}^{F_i}(q)) &\leq d_{F_i}(w, \text{proj}_{l_i}(w)) + d_{F_i}(\text{proj}_{l_i}(w), \varphi_{F_0}^{F_i}(q)) \\ &\leq f(\tau(k) + 1) + d_{F_i}(x_i, z_i) \\ &\leq f(\tau(k) + 1) + k' = b_1. \end{aligned}$$

Agora se pegamos  $w' \in \varphi_{F_0}^{F_i}(l_0)$  a prova de que existe um  $\hat{w} \in l_i$  tal que  $d_{F_i}(w', \hat{w})$  é limitada superiormente e esta cota não depende de  $i$ , é a mesma. Assim, temos provada a afirmação.

Queremos mostrar que a menos de passo a uma subsequência que a sequência  $l_i$  converge a  $l_0$ . Suponha que não, isto é  $l_i \rightarrow v_0 \neq l_0$ .

**Afirmção 3.4.**  $d_H(l_i, l_0)$  é limitado superiormente por  $\alpha_0$  para alguma constante globalmente definida  $\alpha_0$ .

Com efeito, temos que a distância de Hausdorff é calculada em  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . Agora pegamos um  $w \in l_i$ . Pela afirmação 3.3 temos que existe um  $w_1 \in \varphi_{F_0}^{F_i}(l_0)$  tal que  $d(w, w_1) < d_{F_i}(w, w_1) < b_1$ , como  $w_1$  pertencem a  $\varphi_{F_0}^{F_i}(l_0)$  existe um  $w_2 \in l_0$  tal que  $\varphi_{F_0}^{F_i}(w_2) = w_1$  assim temos que

$$\begin{aligned} d(w, w_2) &\leq d(w, \varphi_{F_0}^{F_i}(w_2)) + d(\varphi_{F_0}^{F_i}(w_2), w_2) \\ &\leq d(w, w_1) + d_H(F_0, F_1) \\ &\leq b_1 + d_H(F_0, F_1) = \alpha_0. \end{aligned}$$

Note que esta desigualdade não depende de  $i$ , o outro sentido da definição (distância de Hausdorff) também é verdade assim temos a prova da afirmação. Assim, temos que  $d_H(v_0, l_0)$  é limitada superiormente por  $\alpha_0$  e pelo lema 3.2 temos que  $d_{F_0}(v_0, l_0)$  é limitada, contradizendo o fato de que, ao serem distintas com o mesmo ponto inicial, elas divergem exponencialmente em  $F_0$ . Portanto  $l_i$  converge a  $l_0$ .

Assim,  $\alpha_y$  é uma curva contínua em  $\mathcal{A}$ . Considere a coleção de  $\{\alpha_y\}$  donde  $y$  é qualquer em  $S_\infty^1(E)$ . Para qualquer ponto  $z$  de  $\mathcal{A}$ ,  $z$  está em  $S_\infty^1(F)$  para algum  $F$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $z = \phi_E^F(y)$  para um único  $y$  em  $S_\infty^1(E)$ . Equivalentemente

$$z = \alpha_y \cap S_\infty^1(F(z)) \quad \text{e assim} \quad \mathcal{A} = \bigcup_{y \in S_\infty^1(E)} \alpha_y.$$

Além disso, o conjunto  $\{\alpha_y\}$  com  $y$  em  $S_\infty^1(E)$  são disjuntos para distintos  $y$ . Desde que elas são curvas contínuas elas produzem uma trivialização de  $\mathcal{A} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ . Desde que as translações de recobrimento preservam distâncias e relações entre distâncias isto implica que está folheação de  $\mathcal{A}$  é invariante por translações de recobrimento, produzindo uma folheação vertical em  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## Direções de Contração

**Definição 4.1.** Seja  $x$  um ponto da folha  $L$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  e seja  $\{\gamma(t), t \in [0, +\infty)\}$  um raio geodésico em  $L$  começando no ponto  $x$  e com vetor tangente  $v$  em  $x$ . Seja  $p$  em  $S_\infty^1(L)$  o ponto ideal de  $\gamma$ . Então  $\gamma$  (ou  $v$ ) é uma *direção de contração* se acontece o seguinte: existe uma transversal  $\mu$  a  $\tilde{\mathcal{F}}$  contendo  $x$  (pode ser como um ponto final ou como um ponto interior) de modo que qualquer folha  $E$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  que intersecta  $\mu$  a distância  $d(E, \gamma(t))$  converge a  $0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em outras palavras a holonomia no longo de  $\gamma$  (ou na direção de  $v$ ) contrai uma vizinhança de folhas perto de  $L$ . Similarmente pode-se definir direção de contração em  $\mathcal{F}$ .

**Observação 4.1.** A direção de contração é uma propriedade do ponto  $p$  em  $S_\infty^1(L)$  e é independente do ponto inicial e do raio geodésico definindo em  $p$ . Isto acontece pois todo tais raios são assintóticos, assim um pacote de folhas é contraído ao mesmo tempo independente do ponto inicial ou raio.

**Lema 4.1.** *Seja  $x$  em  $L$  com uma direção de contração dada por um raio geodésico  $\{\gamma(t)\}$  e  $\mu$  a transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$  contraída na direção de  $\gamma$ . Para qualquer  $E$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  intersectando  $\mu$ , a direção de contração  $\gamma$  define um ponto ideal  $\zeta(E)$  de  $E$  e qualquer raio geodésico de  $E$  com ponto ideal  $\zeta(E)$  é contraída a  $L$ . Em adição para qualquer  $F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  existe no máximo uma direção em  $F$  que contrai-se na direção de  $\gamma$ .*

*Demonstração.* Fixemos um campo de linhas em  $\mathcal{F}$  e levantemos a  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Seja  $E$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  intersectando  $\mu$ . Para qualquer positivo  $\alpha_0$  existe um positivo  $t_0$  de modo que  $d(\gamma(t), E)$  é menor de que  $\alpha_0$  para  $t$  muito maior que  $t_0$ . Se  $\alpha_0$  é pequeno, o transladado de  $\gamma(t)$  para  $t$  muito maior que  $t_0$  para  $E$  no longo da folheação transversal é definido para todo tempo (pois elas estão



muito perto) e é uma curva com curvatura geodésica muito pequena em  $E$ . Assim, o transladado é uma quasi-geodésica em  $E$  [Th3] e então ela define um ponto ideal em  $S_\infty^1(E)$  que é denotado por  $\zeta(E)$ . Também para  $\alpha_0$  cada vez menor os transladados tem curvatura geodésica cada vez menor e assim ela se aproxima mais de mais de uma geodésica. Assim o raio geodésico em  $E$  com ponto ideal  $\zeta(E)$  é assintótico com o raio inicial  $\gamma$  em  $L$ .

Finalmente suponha se existe  $F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com duas direções contraindo-se para  $\gamma$ , então existem raios geodésicos  $r_1, r_2$  em  $F$  que são assintóticos a  $\gamma$ . Portanto eles são assintóticos um ao outro. Mas como  $\mathcal{F}$  é sem componente de Reeb, não existe uma transversal fechada em  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Isto implica que quando  $r_1$  e  $r_2$  são próximas em  $\tilde{\mathcal{M}}$  eles tem que estar na mesma carta local de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Isto implica que  $r_1, r_2$  são assintóticas em  $F$ . Portanto elas definem a mesma direção em  $F$ .  $\square$

Direções de contração em  $\tilde{\mathcal{F}}$  definem marcadores no cilindro no infinito:

**Definição 4.2.** Seja  $L$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com uma direção de contração dada pelo raio geodésico  $\gamma$  que contrai um segmento transversal  $\mu$ . Para qualquer  $E$  intersectando  $\mu$  seja  $\zeta(E)$  o único ponto ideal definido no lema prévio. O conjunto de  $\{\zeta(E)\}$  com  $E$  intersectando  $\mu$  é um subconjunto de  $\mathcal{A}$  que define um *marcador* em  $\mathcal{A}$  associado ao par  $(\gamma, \mu)$ . Para qualquer  $E$  intersectando  $\mu$  dizemos que existe um marcador entre  $S_\infty^1(L)$  e  $S_\infty^1(E)$  ou equivalentemente uma direção de contração entre  $L$  e  $E$ . Algumas vezes abusamos da notação e dizemos que isto produz um marcador entre  $L$  e  $E$ . Denotamos por  $\zeta$  marcador.

**Observação 4.2.** Se  $\mathcal{F}$  não é uma folheação  $\mathbb{R}$ -coberta com folhas hiperbólicas não existe um cilindro global no infinito. Entretanto a união dos círculos no infinito associados a uma transversal a  $\tilde{\mathcal{F}}$  ainda é um cilindro e pode-se definir marcadores associados à intervalos de folhas no espaço das folhas.

Agora damos algumas propriedades necessárias dos marcadores. Se  $\zeta$  é um marcador e  $E$  um folha em  $\tilde{\mathcal{F}}$ , seja  $\zeta(E)$  a intersecção de  $\zeta$  e  $S_\infty^1(E)$  que é no máximo um ponto.

**Lema 4.2.** Se  $\alpha, \beta$  são marcadores em  $\mathcal{A}$  que se intersectam, então a intersecção não é transversal. Isto é: Para qualquer  $E$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $\alpha(E), \beta(E)$  não vazio, então  $\alpha(E) = \beta(E)$ .

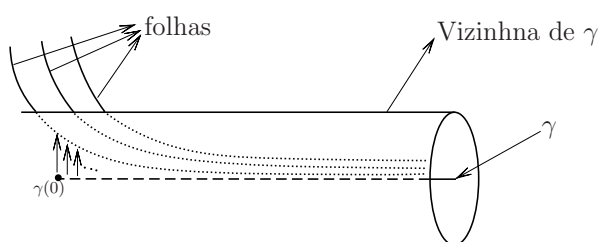
*Demonstração.* Sejam  $\alpha, \beta$  marcadores que se intersectam em um ponto  $p$  e seja  $E$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $\alpha(E), \beta(E)$  ambos não vazios. Existe  $L$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $p$  igual

a  $\alpha(L)$  e  $\beta(L)$ . Seja  $r$  um raio geodésico em  $L$  com ponto ideal  $p$ . Sejam  $r_1, r_2$  raios geodésicos em  $E$  com ponto ideal  $\alpha(E), \beta(E)$  respectivamente.

Como  $p, \alpha(E)$  estão em  $\alpha$  então  $r$  e  $r_1$  são assintóticos (em  $\widetilde{\mathcal{M}}$ ). Similarmenete  $r$  e  $r_2$  são assintóticos, assim  $r_1$  e  $r_2$  são assintóticos. Pelo lema 4.1 isto implica que  $r_1$  e  $r_2$  são assintóticos em  $E$ . Em outras palavras  $\alpha(E), \beta(E)$  são iguais.  $\square$

**Lema 4.3.** *Os marcadores são curvas contínuas em  $\mathcal{A}$ .*

*Demonstração.* Considere uma direção de contração em uma folha  $F$  de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  definida por um raio geodésico  $\gamma = \{\gamma(t), t \text{ em } [0, \infty)\}$  e ponto ideal  $p$  em  $S_\infty^1(F)$ . Existe um pacote de folhas próximas a  $F$  que se contrai para  $F$  na direção de  $\gamma$ . Para qualquer positivo  $\epsilon$  o pacote todo está  $\epsilon$  próximo de  $\gamma(t)$  para qualquer  $t$  maior que  $t_0$  para algum  $t_0 > 0$ , dependendo só de  $\epsilon$ . Desde que o restante é um segmento inicial compacto  $\gamma([0, t_0])$ , se o pacote é reduzido, o raio todo está  $\epsilon$  próximo de qualquer folha no pacote.



Assim pode-se mover a curva toda  $\gamma$  em folhas próximas usando a folheação transversal. Estas curvas tem curvatura geodésica arbitrariamente pequena, a qual converge a 0 quando  $\epsilon$  vai para 0. Assim a curva fica mais e mais proxima de uma verdadeira geodésica e seus pontos ideais estão mais e mais determinados pelas direções iniciais. Mas as direções iniciais do segmento inicial convergem à direção de  $\gamma$  em  $\gamma(0)$  e de modo que os pontos ideais das curvas levantadas nas folhas próximas convergem ao ponto ideal  $p$  e como  $p$  é arbitrário isto completa a prova.

A prova mostra que os marcadores definidos por um arco transversal é uma imagem homeomorfa de  $\mu$  em  $\mathcal{A}$  que é transversal à folheação horizontal em  $\mathcal{A}$ .  $\square$

# Folheação Não-Uniforme

## 1 Introdução

Agora consideraremos o caso das folheações  $\mathbb{R}$ -cobertas não-uniformes. Temos um resultado, que no caso de folheações  $\mathbb{R}$ -cobertas, a existência de uma folha compacta implica que a folheação é uniforme:

**Lema 5.1.** *(folha compacta) Se  $\mathcal{F}$  é uma  $\mathbb{R}$ -coberta folheação em  $M^3$ , fechada e não finitamente recoberta por  $S^2 \times S^1$ , então  $\mathcal{F}$  é taut. Ademais se  $\mathcal{F}$  tem uma folha compacta  $R$ , então  $\mathcal{F}$  é uniforme.*

A hipótese de  $M^3$  não ser finitamente recoberta por  $S^2 \times S^1$  é necessário: cole duas componentes de Reeb pelo bordo de maneira a obter  $S^2 \times S^1$  com uma folheação  $\mathbb{R}$ -coberta mais não taut. Quando não existem folhas compactas pode-se reduzir ao caso minimal:

**Proposição 5.1.** *(caso minimal) Suponha que  $\mathcal{F}$  é  $\mathbb{R}$ -coberta, não tem folha compacta e não é minimal. Então pode-se colapsar  $\mathcal{F}$  a uma folheação minimal: Existe uma folheação  $\mathcal{F}'$  que é minimal o qual é obtida de  $\mathcal{F}$  colapsando de no máximo uma quantidade enumerável de I-bundles de  $\mathcal{F}$  a simples folha.*

Uma prova destes fatos pode ser encontrada em [Fe]. Uma vez mais, o nosso objetivo é produzir uma folheação vertical em  $\mathcal{A}$ . O lema 5.1 mostra que  $\mathcal{F}$  não tem folha compacta e pela proposição 5.1 pode-se supor que  $\mathcal{F}$  é minimal. Assim:

**As hipóteses para o resto da seção.**  $\mathcal{F}$  é uma folheação minimal,  $\mathbb{R}$ -coberta, não-uniforme com folhas hiperbólicas.

As primeiras consequências das hipóteses são os seguintes lemas:

**Lema 5.2.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação minimal de codimensão um e classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) de uma variedade de dimensão 3. Para qualquer  $\lambda \in \tilde{\mathcal{F}}$  o conjunto  $\{\alpha(\lambda) / \alpha \in \pi_1(M)\}$  é denso em  $\mathcal{H}$ .*

*Demonstração.* Seja  $U \subset \mathcal{H}$  uma aberto, então existem folhas  $E, F \in \tilde{\mathcal{F}}$  tal que  $(E, F) \subseteq U$  e pegamos  $z \in \tilde{M}$  entre de  $E$  e  $F$  então existem vizinhanças folheadas  $U, V$  de  $z$  e  $\pi(z)$  respectivamente tal que  $\pi|_U: U \rightarrow V$  é um difeomorfismo. Agora reduzindo a vizinhanças pode-se supor que  $U$  está entre  $E$  e  $F$ , logo desde que  $\mathcal{F}$  é minimal temos que  $\pi(\lambda) \cap V \neq \emptyset$ , assim no recobrimento universal temos que existe  $g \in \pi_1(M)$  tal que  $g(\lambda) \cap U \neq \emptyset$ , portanto temos que  $g(\lambda) \in U$  o que mostra o lema.  $\square$

**Definição 5.1.** Dado um espaço métrico  $(X, d)$ , e um subconjunto  $Y$  de  $X$ , dizemos que  $Y$  é  $\epsilon$ -net para  $X$ , se para qualquer  $x \in X$  existe um  $y \in Y$  tal que  $d(x, y) < \epsilon$ .

**Lema 5.3.** *Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação taut de  $M$  tal que qualquer folha é densa, então para qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $R > 0$  tal que para qualquer  $p \in M$  e folha  $\lambda$  contendo  $p$ , o disco de raio  $R$  em  $\lambda$  com centro em  $p$  é  $\epsilon$ -net para  $M$ .*

*Demonstração.* O fato de que qualquer folha de  $\mathcal{F}$  é densa implica que um tal  $R(p)$  existe para qualquer  $p \in M$ . Seja  $\epsilon > 0$  e  $R_1 = \max\{R(p), f(3\epsilon + R(p))\}$  donde  $f$  é definida como no lema 3.2. Considere a bola  $B$  com centro em  $p$  e raio  $\epsilon$  em  $M$

**Afirmção 5.1.** Para qualquer  $q \in B$  a bola com centro em  $q$  e raio  $R_1$  em  $F(q)$  é  $\epsilon$ -net para  $M$ .

Com efeito, pegamos um  $q \in B$  e um  $x \in M$  quaisquer, então existe  $z$  na bola centrada em  $p$  e raio  $R(p)$ , na folha  $F(p)$  tal que

$$d(z, x) < \epsilon \quad \text{e} \quad d(z, p) \leq d_{F(p)}(z, p) \leq R(p).$$

Agora existe  $z'$  em  $F(q)$  tal que  $d(z', x) < \epsilon$  logo

$$\begin{aligned} d(z', q) &\leq d(z', x) + d(x, z) + d(z, p) + d(p, q) \\ &< 3\epsilon + R(p). \end{aligned}$$

Assim, pelo lema 3.2 temos que

$$d_{F(q)}(z', q) < f(3\epsilon + R(p))$$

o que conclui a afirmação. Agora como a variedade é compacta pode-se encontrar um  $R$  suficientemente grande tal que a propriedade se verifica para qualquer  $p \in M$ .  $\square$

**Observação 5.1.** Com as hipóteses acima, pode-se mostrar do mesmo jeito o seguinte fato, dada uma transversal  $\mu$  em  $\mathcal{M}$ , existe um  $R$  tal que para qualquer ponto  $p \in \mathcal{M}$  e folha  $\lambda$  contendo  $p$ , o disco de raio  $R$  em  $\lambda$  com centro em  $p$  contém pontos na transversal, que estão a uma distância menor que  $\epsilon$  do ponto médio da transversal.

## 2 Propriedades das folheações não-uniformes

Fixemos uma orientação em  $\mathcal{H}$ .

**Lema 5.4.** *Qualquer duas folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  não estão a uma distância limitada uma da outra.*

*Demonstração.* Suponha que existem folhas  $E, F$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  que estão a uma distância limitada uma da outra. Seja  $\mathcal{J}$  é o intervalo  $[E, F]$  de  $\mathcal{H}$  e considere a união de  $\mathcal{J}$  com todos seus transladados pelas translações de recobrimento. Pegamos a componente  $\mathcal{C}$  contendo  $\mathcal{J}$ . Suponhamos primeiro que  $\mathcal{C}$  é um intervalo limitado em  $\mathcal{H}$ . Então o transladado de  $\mathcal{C}$  é ou  $\mathcal{C}$  mesmo ou disjuncto de  $\mathcal{C}$ . Segue-se que o fecho  $\widehat{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{H}$  é invariante. Mais então as folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  correspondentes aos transladados de  $\partial\mathcal{C}$  projetam-se num conjunto fechado não trivial de  $\mathcal{F}$  em  $\mathcal{M}$ . Isto não é possível pelas hipóteses. Se  $\mathcal{C}$  não é limitada inferiormente em  $\mathcal{H}$ , ele tem que ser invariante pela ação de  $\pi_1(\mathcal{M})$  e assim ele também não é, digamos limitado superiormente, logo  $\mathcal{C}$  é igual a  $\mathcal{H}$ , mas como a distância de Hausdorff é monótona crescente, isto implica que quaisquer duas folhas estão a uma distância limitada uma da outra, ou seja que  $\tilde{\mathcal{F}}$  é uniforme contradizendo o suposto. Isto termina a prova.  $\square$

**Proposição 5.2.** *(Compressão do recobrimento universal e direções de contração) Dadas folhas arbitrárias distintas  $E, F$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $B$  um conjunto limitado, existe uma translação de recobrimento de  $B$  contida entre  $E$  e  $F$ . Como consequência existe pelo menos uma direção de contração em  $E$  e  $F$ .*

*Demonstração.* Por hipótese  $d_{\mathcal{H}}(E, F)$  é infinito. Pode-se assumir sem perda de generalidade que  $\mathcal{F}$  é transversalmente orientável,  $F$  está na frente de  $E$  e escolhamos

$$p_i \in E \quad \text{com } d(p_i, F) \text{ convergindo no infinito.}$$

Seja  $B$  um conjunto limitado em  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Procuramos um transladado  $h(B)$  de  $B$  de modo que  $h(B)$  esteja na frente de  $E$  e atrás de  $F$ , isto é entre  $E$  e  $F$ . Escolhamos translações de recobrimento  $g_i$ , com  $g_i(p_i)$  convergindo a  $p_0$ ,

isto é possível pela observação 3.2, e assim  $g_i(E)$  convergindo a  $E_0$  contendo  $p_0$ . Seja  $L$  folha de  $\tilde{\mathcal{F}}$  muito próxima de  $E_0$ .

Afirmamos que pode-se encontrar uma translação de recobrimento  $h(B)$  contida na frente de  $L$ . Com efeito, suponha que todo translado de  $B$  intersecta  $L$ , isto implica que todo translado de  $L$  intersecta  $B$  o que contradiz o lema 5.2. Agora, se algum translado  $h(B)$  está atrás de  $L$ , então como  $B$  é limitado sua projeção em  $H$  é limitada assim pelo lema 3.3 temos que existe um translado  $\beta(L)$ , tal que  $h(B)$  está na frente de  $\beta(L)$ , assim  $\beta^{-1}(h(B))$  está no frente de  $L$ , o que prova a afirmação.

Como os  $g_i(E)$  convergem a  $E_0$ , então para  $i$  suficientemente grande,  $L$  está na frente de  $g_i(E)$  e assim também  $h(B)$ . Então

$$d(g_i(p_i), g_i(F)) \rightarrow \infty, \quad \text{mas } d(g_i(p_i), h(B)) \text{ é limitada.}$$

Segue que  $g_i(F)$  não intersecta  $h(B)$  e não separa  $h(B)$  de  $g_i(E)$  para  $i$  suficientemente grande. Desde que  $\mathcal{F}$  é  $\mathbb{R}$ -coberta isto implica que  $h(B)$  está no frente de  $g_i(E)$  e atrás de  $g_i(F)$ , isto é entre  $g_i(F)$  e  $g_i(E)$ . Assim,  $g_i^{-1}h(B)$  está entre  $E$  e  $F$ . Isto mostra a primeira parte da proposição, a compressão do recobrimento universal. Pegamos  $B$  intersectando  $E$ ,  $F$  e escolhemos  $g(B)$

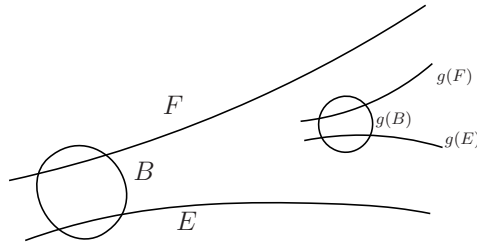


Figura 5.1: Contração no recobrimento universal.

entre  $E$  e  $F$ , como no desenho. Isto implica que  $g(E)$ ,  $g(F)$  estão entre  $E$  e  $F$  e assim

$$g([E, F]) \subset (E, F)$$

observe que  $g: [E, F] \rightarrow [E, F]$  é um homeomorfismo que é uma contração assim existe um  $F_0$  em  $(E, F)$  ponto fixo de  $g$ , isto é  $g(F_0)$  é igual a  $F_0$  e também  $g^i(F)$  convergindo a  $F_0$  quando  $i$  converge no infinito. Assim existe uma geodésica  $\gamma$  em  $F_0$  com  $g(\gamma) = \gamma$  que tem holonomia contrátil em um lado, isto é  $g$  contrai o intervalo  $[F_0, F]$  a  $F_0$ , quando  $i$  converge no infinito. Agora pegamos duas folhas  $U, V$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  e um conjunto  $D$  limitado que

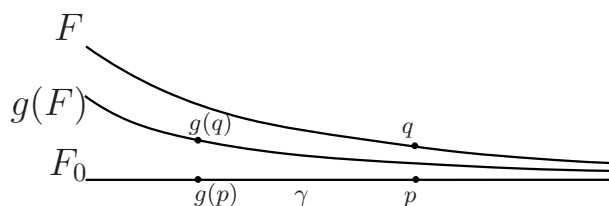


Figura 5.2: Produz uma direção de contração na folha.

intersecta as folhas  $U, V, F$  e  $F_0$  logo pelo feito acima existe um  $\alpha \in \pi_1(M)$  tal que  $\alpha(D)$  está entre  $F$  e  $F_0$ , assim  $\alpha$  aplicará o intervalo  $[U, V]$  de  $\mathcal{H}$  no interior de  $[F_0, F]$ . Desde que  $F_0$  tem uma direção de contração isto produz uma direção de contração entre quaisquer duas folhas em  $[F_0, F]$ . Voltando pelo transladado inverso, isto produz uma direção de contração entre  $U$  e  $V$ . Isto termina a prova da proposição.  $\square$

**Lema 5.5.** *Existe pelo menos duas direções de contração entre quaisquer duas folhas  $E, F \in \mathcal{F}$ .*

*Demonstração.* Suponha que existam folhas  $E_0, F_0$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com só uma direção de contração entre elas. Para quaisquer  $E, F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  pela proposição anterior, pode-se aplicar  $[E_0, F_0]$  no interior de  $[E, F]$ , assim só existe uma direção de contração entre  $[E, F]$ . Escolhamos  $E_i, F_i$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $E_i, F_i$  escapando para os infinitos opostos de  $\mathcal{H}$  e os pacote  $[E_i, F_i]$  crescente. Segue-se que existe uma curva vertical  $\alpha$  em  $\mathcal{A}$  que contém todos os marcadores. Para qualquer folha  $F$  seja  $\alpha_F$  a intersecção de  $\alpha$  e  $F$ . Lembrando que as translações de recobrimento preservam os marcadores, então  $\alpha$  é invariante pela ação de  $\pi_1(M)$ , isto é as translações de recobrimento enviam  $\alpha$  em si mesmo.

Dado uma translação de recobrimento  $g$  que não age livremente em  $\mathcal{H}$ , isto é existe uma folha  $F$  com  $g(F) = F$ , então existe uma geodésica axial  $l$  em  $F$  invariante por  $g$ . Como  $g(\alpha_F) = \alpha_F$ , então  $\alpha_F$  é um ponto fixo de  $g$  e portanto um dos pontos ideais de  $l$ . Seja agora  $f$  qualquer outra translação de recobrimento, com  $f(F)$  distinto de  $F$ . Então

$$(fgf^{-1})(f(F)) = f(F) \quad \text{e} \quad (fgf^{-1})(f(l)) = f(l)$$

assim  $f(l)$  tem ponto ideal  $\alpha_{f(F)}$ . Isto implica que  $l$  e  $f(l)$  são assintóticas em  $\tilde{\mathcal{M}}$ , agora como  $g(l) = l$  então ela projeta-se em uma curva fechada em  $\mathcal{M}$  e assim existe uma distância mínima entre  $l$  e  $f(l)$ , que é uma contradição com

o fato que elas são assintóticas. Assim conclui-se que existem pelo menos duas marcadores entre quaisquer duas folhas.  $\square$

**Proposição 5.3.** *Dado  $F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$ ,  $Y$  um conjunto aberto em  $S_\infty^1(F)$ , e  $A$  qualquer componente conexa de  $\mathcal{A} - S_\infty^1(F)$ , existe um marcador com um ponto final em  $Y$  e contido no fecho de  $A$ .*

*Demonstração.* Isto mostra que existem marcadores em ambos os lados de  $Y$  em  $\mathcal{A}$ . Suponha que o resultado não é verdade. Sejam

- $F$  uma folha de  $\tilde{\mathcal{F}}$ ,  $Y$  um subconjunto em  $S_\infty^1(F)$ ;
- $A$  uma componente de  $\mathcal{A} - S_\infty^1(F)$ , de modo que não existe um marcador em  $\mathcal{A}$  com ponto final em  $Y$  e contida no fecho de  $A$ .

Escolhemos pontos  $p_i$  em  $F$  convergindo a  $p$  em  $Y$ . Fixamos uma pequena transversal  $\mu$  a  $\tilde{\mathcal{F}}$ , sejam  $E, L$  folhas passando pelos pontos finais de  $\mu$ . Desde que  $\mathcal{F}$  é minimal e pela observação 5.1, existe uma constante positiva  $\alpha_0$  de modo que qualquer ponto em uma folha de  $\mathcal{F}$  está  $\alpha_0$ -próximo (nesta folha) de um outro ponto muito próximo do centro de  $\pi(\mu)$ . Agora levantado a  $\tilde{\mathcal{M}}$ , existem  $q_i$  em  $F$  com  $d_F(p_i, q_i)$  menor que  $\alpha_0$  e transformações de recobrimento  $g_i$  tais que  $g_i(q_i) \in \mu$  e que estão próximos do centro de  $\mu$ . Agora salvo passar a uma subsequência,

$$g_i(q_i) \text{ converge a } q_0 \in \mu, \quad q_0 \in F_0 \in \tilde{\mathcal{F}}.$$

Note que em  $F \cup S_\infty^1(F)$ , os  $q_i$  também convergem a  $p \in Y$ , assim a medida visual de  $Y$  (em  $S_\infty^1(F)$ ) medida desde  $q_i$  é  $\theta_i$ , com  $\theta_i$  convergindo a  $2\pi$ . Portanto, a medida visual de  $g_i(Y)$  medida desde  $g_i(q_i)$  em  $S_\infty^1(g_i(F))$  é  $\theta_i$  também, isto pois a restrição de  $g_i$  à folha  $F$ , é uma isometria e portanto ela é conforme.

Pelo lema 5.5 existem pelo menos duas marcadores

$$\zeta_1, \zeta_2 \text{ de } S_\infty^1(E) \text{ a } S_\infty^1(L).$$

Use a parametrização dos círculos no infinito entre  $E$  e  $L$  dada por  $T_1\tilde{\mathcal{F}}|_\mu$ . Os marcadores  $\zeta_1, \zeta_2$  intersectam  $S_\infty^1(F_0)$  em ângulos  $\delta_1$  e  $\delta_2$  medidos por esta identificação.

Desde que os marcadores são curvas disjuntas e contínuas, existe uma constante positiva  $\alpha_1$  de modo que qualquer  $G$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  intersectando  $\mu$  os marcadores  $\zeta_1, \zeta_2$  definem direções em  $G$  que estão separados de pelo menos um ângulo  $\alpha_1$ , como medidas em  $T_1\tilde{\mathcal{F}}|_{(G \cap \mu)}$ . Mas  $g_i(F)$  converge a  $F_0$



quando  $i$  converge no infinito e os marcadores em um lado de  $S_\infty^1(g_i(F))$  estão obrigados (por hipóteses) a ter um ponto final em  $S_\infty^1(g_i(F)) - g_i(Y)$ . Este conjunto tem medida visual menor que  $2\pi - \theta_i$  que converge a zero com  $i$ . Assim,

$$0 < \alpha_1 \leq 2\pi - \theta_i$$

quando  $i$  converge no infinito, isto nos dá uma contradição. Isto mostra a densidade local dos marcadores.  $\square$

Os marcadores são introduzidos por Thurston em [Th7]: Ele mostrou que os marcadores são (localmente) densos em  $\mathcal{A}$  (Também no caso não- $\mathbb{R}$ -coberta). Vamos mostrar um fato mais forte em nosso meio: Existe um conjunto denso de direções de contração entre *quaisquer duas folhas* de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Os marcadores serão o esqueleto da folheação vertical em  $\mathcal{A}$ . É fundamental para toda a análise que os marcadores sejam curvas contínuas em  $\mathcal{A}$ .

**Lema 5.6.** *Seja  $L$  uma folha de  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $Z$  um subconjunto fechado de  $S_\infty^1(L)$ . Para qualquer vizinhança aberta  $N$  de  $Z$  em  $\mathcal{A}$ , existem vizinhanças  $V$  de  $L$  em  $\mathcal{H}$  definidos por uma transversal  $\mu$  a  $\tilde{\mathcal{F}}$  ( $\tilde{\mathcal{F}}_\mu = V$ ) e  $W$  de  $Z$  em  $\mathcal{A}$ , de modo que qualquer marcador  $\zeta$  que intersecta  $W$  então sua interseção com  $\mathcal{A}_\mu$  está contida em  $N$ .*

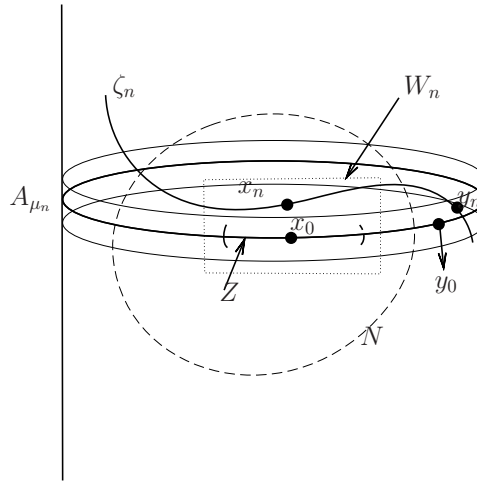
*Demonstração.* Se o lema não é verdade, existe

1. Uma folha  $L$  em  $\mathcal{F}$ ;
2. um subconjunto fechado  $Z$  de  $S_\infty^1(L)$ , e
3. uma vizinhança aberta  $N$  de  $Z$  em  $\mathcal{A}$  satisfazendo : existem vizinhanças decrescentes  $V_i$  de  $L$  em  $\mathcal{H}$  (isto é  $\bigcap V_i = L$ ) definidas por transversais  $\mu_i$  ( $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu_i} = V_i$ ), existem vizinhanças abertas decrescentes  $W_i$  de  $Z$  em  $\mathcal{A}$  (isto é  $\bigcap W_i = Z$ ) e marcadores  $\zeta_i$  com

$$\zeta_i \cap W_i \neq \emptyset \quad \text{mas} \quad \zeta_i \cap \mathcal{A}_{\mu_i} \not\subseteq N.$$

Observe que ao supor o lema falso, 1, 2, e 3 nos diz que pode acontecer de uma sequência de marcadores  $\zeta_i$ 's se aproximarem de arcos horizontais. Assim, o que o lema mostra é exatamente que tal situação não acontece. Escolhamos pontos  $x_i$  na interseção de  $W_i$  e  $\zeta_i$ . Como os  $W_i$  decrescem a  $Z$  pode-se supor, salvo passara uma subsequência, que os  $x_i$  convergem a  $x_0$  em  $Z$ . Existem

$$y_i \in \zeta_i \quad \text{com} \quad y_i \in \mathcal{A}_{\mu_i} \quad \text{mas eles não pertencem a } N.$$



Desde que os  $\mathcal{A}_{\mu_i}$  decrescem a  $S_\infty^1(L)$ , pode-se escolher uma outra subseqüência de modo que  $y_i$  converge a  $y_0$ , um ponto em  $S_\infty^1(L)$ . Mais  $y_i$  não está em  $N$ , isto pois  $N$  é um conjunto aberto, assim  $y_0$  não está em  $Z$  assim  $x_0$  e  $y_0$  são distintos. Por simplicidade assumamos que  $y_i$  são pontos em  $S_\infty^1(F_i)$ , com  $F_i$  acima de  $L$  e só consideramos a parte dos marcadores sobre o correspondente lado de  $S_\infty^1(L)$  em  $\mathcal{A}$ .

Desde que os marcadores são curvas contínuas em  $\mathcal{A}$ , então salvo outra subseqüência os marcadores tem um limite em no menos um dos segmentos definidos por  $x_0$  e  $y_0$ . Seja  $B$  este segmento. Se  $B$  tem um marcador  $\zeta$  sobre este lado de  $S_\infty^1(L)$  em  $\mathcal{A}$ , então como os  $\zeta_i$  convergem sobre  $B$ , segue-se que  $\zeta_i$  tem que intersecta-se com  $\zeta$  para  $i$  suficientemente grande, agora pelo lema 4.2 tem-se que cada um dos  $i$ ,  $\zeta_i$  e  $\zeta$  são parte de um possivelmente maior marcador  $\zeta'$ . Assim, para  $i$  suficientemente grande temos que  $x_i$  está em  $\zeta'$  e portanto

$$\{x_0\} = \zeta' \cap S_\infty^1(L) \subseteq N,$$

assim também para estes  $i$ 's, tem-se que a intersecção de  $\zeta'$  e  $\mathcal{A}_{\mu_i}$  é igual à intersecção de  $\zeta_i$  e  $\mathcal{A}_{\mu_i}$ . Agora o marcador  $\zeta'$  é uma curva contínua em  $\mathcal{A}$ , transversal à folheação horizontal, assim para  $i$  suficientemente grande,

$$\zeta' \cap \mathcal{A}_{\mu_i} \subset N \quad \text{que implica} \quad \zeta_i \cap \mathcal{A}_{\mu_i} \subseteq N$$

que contradiz a hipótese. Agora, a outra opção de que não existe nenhum marcador naquele lado de  $S_\infty^1(L)$  com ponto final em  $B$ , é descartado pela lema prévio.  $\square$

O seguinte lema diz que se uma sequência de marcadores convergem a um ponto em um marcador  $\zeta$ , então os marcadores todo convergem a  $\zeta$ . Este fato será necessário para o análise da densidade global dos marcadores.

**Lema 5.7.** *Seja  $S, S'$  folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\zeta_i$  com  $i \geq 0$  uma sequência de marcadores de  $S_\infty^1(S)$  a  $S_\infty^1(S')$ . Se a interseção  $a_i$  de  $\zeta_i$  e  $S_\infty^1(S)$  converge a  $a_0$  com  $i$ , então os  $\zeta_i$  convergem a  $\zeta_0$  em  $\mathcal{A}$ , isto é, para qualquer  $Z$  em  $[S, S']$ , a interseção  $b_i$  de  $\zeta_i$  e  $S_\infty^1(Z)$  converge a  $b_0$ , a interseção de  $\zeta_0$  e  $S_\infty^1(Z)$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista  $Z$  como acima de modo que  $b_i$  não converja a  $b_0$ . Por simplicidade suponha que a sequência  $a_i$  para  $i$  maior que 0 esteja aninhada (com  $i$ ) em  $S_\infty^1(S)$ . A intersecção não transversal dos marcadores implica que os  $b_i$  estão aninhados em  $S_\infty^1(Z)$ . Seja  $r$  um raio geodésico em  $S$  com ponto ideal  $a_0$  e seja  $\nu$  um raio geodésico em  $Z$  com ponto ideal  $b_0$ . Seja  $p_j$  uma sequência em  $r$  convergindo a  $a_0$ . Lembrando que  $a_0$  e  $b_0$  pertencem a  $\zeta_0$ , então existem  $q_j \in \nu$  com  $d(p_j, q_j)$  convergindo a zero, desde que  $a_0$  define uma direção contrátil de  $S$  a  $Z$ . Para cada positivo  $j$  seja  $r_{j,i}$  (respectivamente  $\nu_{j,i}$ ) o raio em  $S$  começando em  $p_j$  e com ponto ideal  $a_i$  (respectivamente em  $Z$  começando em  $q_j$  e com ponto ideal  $b_j$ ). Para cada  $j$  tem-se a identificação de  $S_\infty^1(S)$  com o fibrado tangente unitário em  $p_j$ , assim desde que os  $a_i$  convergem para  $a_0$ , eles têm suas respectivas direções no fibrado tangente unitário convergindo para a direção definida pelo ponto ideal  $a_0$ , logo pode-se escolher um  $i(j)$  suficientemente grande de modo que o ângulo orientado em  $S$  em  $p_j$  de  $r$  a  $r_{j,i(j)}$ , é  $\theta_j$  e  $\theta_j$  converge para zero. Orientado significa ser medido de  $r$  a  $r_{j,i(j)}$ , no lado onde os  $r_{j,i(j)}$  acumulam-se em  $r$  (quando  $i$  cresce). Por outro lado os  $b_{i(j)}$  não convergem a  $b_0$ , então visto de  $q_0$ , o ângulo visual ( $\alpha_j$ ) do segmento em  $S_\infty^1(Z)$ , de  $b_0$  a  $b_{i(j)}$ , não converge para zero. Segue-se que o ângulo orientado  $\beta_j$  em  $q_j$  entre os raios

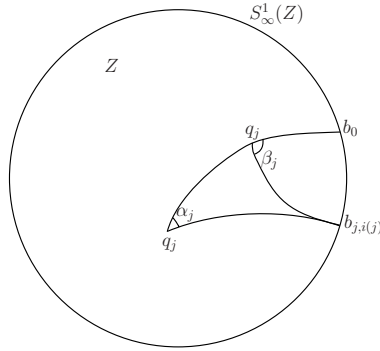
$$\nu \text{ e } \nu_{j,i(j)}$$

não converge a zero, isto pois a area definida pelo triângulo com vertices  $q_0$ ,  $b_0$  e  $b_{j,i(j)}$  é maior que a area do triângulo de vertices  $q_j$ ,  $b_0$  e  $b_{j,i(j)}$ , observe a figura. Agora, usando a formula de Gauss-Bonnet temos que

$$\pi - \alpha_j > \pi - \beta_j \quad \text{então} \quad \alpha_j < \beta_j$$

como  $\alpha_j$  não convergem para zero, assim também os  $\beta_j$  não vão para zero (de fato eles vão para  $\pi$ ). Agora escolhamos translações de recobrimento  $f_j$  de modo que  $f_j(p_j)$  convergem a um ponto  $p_0$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} d(f_j(q_j), p_0) &\leq d(f_j(q_j), f_j(p_j)) + d(f_j(p_j), p_0) \\ &= d(q_j, p_j) + d(f_j(p_j), p_0), \end{aligned}$$



assim  $f_j(q_j)$  convergem também para  $p_0$ . Em  $f_j(p_j)$  o ângulo entre

$$f_j(r) \text{ e } f_j(r_{j,i(j)})$$

converge a 0, mas em  $q_j$  o ângulo entre  $f_j(\nu)$  e  $f_j(\nu_{j,i(j)})$  não converge a zero. Isto mostra que no menos um dos marcadores  $f_j(\zeta_0)$  ou  $f_j(\zeta_{i(j)})$  move uma quantidade fixa em deslocamento vertical arbitrariamente pequeno. Para  $j$  suficientemente grande, isto contradiz o lema 5.6. Isto finaliza a prova.  $\square$

### 3 Curvas invariantes

**Definição 5.2.** Uma *curva invariante* em  $\mathcal{A}$  é uma curva mergulhada intersectando cada círculo no infinito exatamente uma vez e é invariante pela ação de  $\pi_1(M)$ . Uma curva invariante que é limite de marcadores cada vez maiores é chamada de curva limite invariante.

Estas curvas nos ajudarão a mostrar que o conjunto de direções de contração entre quaisquer duas folhas é denso. A idéia é supor que o conjunto de direções de contração entre duas folhas não é denso e então construir uma curva limite invariante  $\mathcal{L}$  em  $\mathcal{A}$ . Pode-se mostrar que as folhas são assintóticas fora da curva invariante - Isto é toda direção, com exceção de uma, são de contração. Assim, em qualquer caso tem-se um conjunto denso de direções de contração. A estratégia aqui é analisar primeiro as curvas limites invariante em detalhes nos seguintes lemas e proposição.

**Lema 5.8.** *Qualquer curva invariante limite  $\mathcal{L}$  não tem pontos associados a direções de contração de  $\mathcal{F}$ .*

*Demonstração.* Suponha que a curva limite invariante  $\mathcal{L}$  tem um ponto  $q$  associado a uma direção de contração. Então existe um marcador  $\zeta_0$  passando por  $q$ . Por hipótese existem marcadores  $\zeta_i$  que convergem ponto a

ponto a  $\mathcal{L}$ . Pelo lema 5.7 esses marcadores convergem ponto a ponto a  $\zeta_0$  nos círculos no infinito que  $\zeta_0$  intersecta. Isto mostra que  $\mathcal{L}$  contém o marcador  $\zeta_0$ , isto é  $\mathcal{L}$  coincide com  $\zeta_0$  localmente. Pode-se aplicar qualquer intervalo  $[U, U']$  de  $\mathcal{H}$  dentro de este pequeno segmento pela ação de algum  $g \in \pi_1(M)$  e pelo fato de que a curva é invariante pela ação de  $\pi_1(M)$ , temos que  $g([U, U'] \cap \mathcal{L}) \subset \mathcal{L} \cap \zeta_0$ . Assim, como  $g^{-1}$  preserva marcadores temos que  $[U, U'] \cap \mathcal{L}$  é um marcador, então a curva toda é um marcador. Assim isto é uma contradição pelo feito na demonstração do lema 5.5.  $\square$

Agora usamos a distância pelo fluxo transversal entre pontos e folhas: Fixamos uma campo de linhas transversal a  $\mathcal{F}$  gerando uma folheação  $\tau$  com levantamento  $\tilde{\tau}$  a  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Dado  $G$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $z$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$ , considero o fluxo transversal  $\tau_z$  passando por  $z$ . Como  $\mathcal{F}$  é sem componente de Reeb  $\tau_z$  pode intersectar  $G$  no máximo uma vez. Se ela não intersecta, seja  $d_\tau(z, G)$  infinito. Caso contrário,  $d_\tau(z, G)$  é o comprimento do segmento de  $\tau_z$ , de  $z$  à intersecção com  $G$ . Se  $\mathcal{L}$  é uma curva limite invariante em  $\mathcal{A}$  e  $L$  uma folha de  $\tilde{\mathcal{F}}$  seja  $\mathcal{L}_L$  a intersecção de  $S_\infty^1(L)$  e  $\mathcal{L}$ .

**Lema 5.9.** *Seja  $\mathcal{L}$  uma curva limite invariante. Dado  $L$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e um lado de  $L$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$ , existe  $G$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  nesse lado de modo que: Para qualquer semiplano  $H$  de  $L$  que não tem limite sobre  $\mathcal{L}_L$  (o infinito de  $H$  não intersecta  $\mathcal{L}_L$ ) e qualquer sequência de pontos  $z_i$  escapando em  $H$  tem o  $\limsup$  de  $d_\tau(z_i, G)$  limitado superiormente (dependendo somente de  $H$  e  $G$ ).*

*Demonstração.* Faremos a prova para  $G$  acima de  $L$ , a mesma prova aplica-se para  $G$  abaixo de  $L$ .

Aproximadamente o idéia da prova é a seguinte: se existe  $u$  em  $S_\infty^1(L)$  distinto de  $\mathcal{L}_L$  de modo que  $d_\tau$  explode próximo de  $u$ , então se pode aplicar qualquer segmento transversal a um segmento "próximo de  $u$ ". Isto produz translações de recobrimento com folhas invariantes em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e pontos fixos contráteis em  $\mathcal{L}$ - contradizendo o lema prévio.

Suponha que o lema é falso. Seja  $G_i$  uma sequência em  $\tilde{\mathcal{F}}$  convergindo a  $L$ . Existe um semi-plano  $H$  em  $L$  tal que dado  $i$  existe uma sequência  $z_{i,j}$  em  $H$  com  $d_\tau(z_{i,j}, G_i)$  maior que  $j$  e  $z_{i,j}$  escapa em  $H$  (com  $j$  crescente). Usando subsequências achamos

$$z_i \in H \quad \text{com} \quad d_\tau(z_i, G_i) > i \quad \text{e} \quad z_i \rightarrow u \in S_\infty^1(L), \quad u \quad \text{distinto de} \quad \mathcal{L}_L.$$

Fixemos  $v$  em  $L$ . Denote  $\tau_v$  por  $\alpha$  e  $\alpha_i$  os subsegmentos de  $\alpha$  entre  $L$  e  $G_i$ , cujo comprimento converge para zero.

Por outro lado temos os seguintes fatos:

**Fato 1:** Desde que  $\mathcal{F}$  é minimal qualquer folha é densa. Assim pela observação 5.1 dado um positivo  $\alpha_0$  existe um positivo  $\alpha_1$  de modo que se  $\beta$  é um segmento da folheação  $\tau$  de comprimento maior que  $\alpha_0$ ,  $w$  um ponto qualquer em  $\mathcal{M}$  e  $W$  a folha de  $\mathcal{F}$  contendo  $w$  então verifica-se que:  $W$  intersecta  $\beta$  em um ponto  $w'$  que está  $\alpha_0/4$ -próximo do ponto médio de  $\beta$  (no comprimento de  $\beta$  pelo fluxo) e  $w'$  está no máximo a uma distância  $\alpha_1$  de  $w$  medida como distância em  $W$ .

**Fato 2:** Também existe um  $\alpha_2$  suficientemente pequeno, de modo que para qualquer segmento  $\beta'$  de  $\tau$  de comprimento menor que  $\alpha_2$ , então se ele é movido pela holonomia de modo que seu ponto inicial é movido a uma distância menor que  $\alpha_1$  em sua folha (de  $\mathcal{F}$ ), então o segmento final de  $\tau$  tem comprimento limitado superiormente por  $\alpha_0/4$ . Com efeito, se pegamos  $\beta'$  um segmento transversal, seja  $E$  a folha que passa por um de seus pontos finais  $p$ , agora considere a bola fechada na folha com centro  $p$  e seja  $q$  um ponto qualquer desta bola. Fixamos um caminho ligando  $p$  à  $q$ . Fazendo uso do lema 2.3 temos que este caminho está contido em uma coleção finita de vizinhanças trivializantes, assim reduzindo a vizinhança que contem  $p$  pode-se obter um  $\alpha_2(q)$  (que só depende do ponto  $q$ ) suficientemente pequeno tal que o segmento  $\beta'$  é enviado pela holonomia em um segmento de  $\tau$  de comprimento menor que  $\alpha_0/4$  contido na vizinhança trivializante que contém  $q$ . Como a bola fechada em  $E$  com centro  $p$  é compacta, então temos que existe um  $\alpha_2(p) > 0$  suficientemente pequeno que serve para todo  $q$  nesta bola. Agora, pegamos uma vizinhança trivializante do segmento  $\beta'$  suficientemente pequena de modo que qualquer segmento de  $\tau$  contido nessa vizinhança seja levado pela holonomia à  $\beta'$  que por sua vez como acabamos de ver, é levado à um segmento de  $\tau$  de comprimento menor que  $\alpha_0/4$ . Conseguimos assim, para cada ponto  $p$  um número  $\alpha_2(p) > 0$  que satisfaz o afirmado numa vizinhança (em  $\mathcal{M}$ ) do ponto  $p$ . O resultado segue da compacidade de  $\mathcal{M}$ .

**Fato 3:** Assim, qualquer segmento de  $\tau$  de comprimento limitado por  $\alpha_2$  pode ser movido pela holonomia, com ponto inicial movido a uma distância menor que  $\alpha_1$  dentro de sua folha, para ter um ponto no segmento  $\beta$   $\alpha_0/4$ -próximo do ponto médio de  $\beta$ . Como o comprimento do transladado pela holonomia é menor que  $\alpha_0/4$ , o transladado final pela holonomia está inteiramente contida em  $\beta$ .

Tirando alguns termos, pode-se assumir que o comprimento de  $\alpha_i$ 's estão limitados superiormente por  $\alpha_2$ . Seja  $\beta_i$  o segmento na folha de  $\tilde{\tau}$  de comprimento  $\alpha_0$  com um ponto final em  $z_i$  e contido no lado positivo de  $L$ . A propriedade dos  $z_i$ 's implica que (pelo menos para  $i$  suficientemente grande)

todo  $\beta_i$  está na união de folhas  $S$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  contidas no intervalo

$$[L, G_i] \text{ de } \mathcal{H}.$$

Pelo fato 1 temos que para  $i$  suficientemente grande existe um  $w' \in \pi(L) \cap \pi(\beta_i)$  que está  $\alpha_0/4$ -próximo do ponto médio de  $\pi(\beta_i)$  (medida como distância em  $\tau$ ). Assim, no levantando a  $\tilde{\mathcal{M}}$  existem translações de recobrimento  $h_i$  de modo que  $h_i(v)$  está na folha  $h_i(L)$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $h_i(L)$  intersectando  $\beta_i$  num ponto  $c_i$  a uma distância (em  $\tau$ ) de  $\alpha_0/4$  de seu ponto médio e a distância na folha  $h_i(L)$  entre  $h_i(v)$  e  $c_i$  é menor do que  $\alpha_1$ . Pelo fato 3 a imagem de  $h_i(\alpha_i)$  é aplicada pela holonomia no interior de  $\beta_i$ . Os pontos finais de  $\alpha_i$  estão em  $L, G_i$  e os pontos finais de  $\beta_i$  estão em  $L$  e em outra folha entre  $L$  e  $G_i$ .

Isto implica que no nível do espaço das folhas  $h_i$  envia o intervalo  $[L, G_i]$  de  $\mathcal{H}$  em um subconjunto de seu interior  $(L, G_i)$  - assim  $h_i$  tem um ponto fixo em  $(L, G_i)$ . Então  $h_i^n(L)$  converge a uma folha  $L_i$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $n$  convergindo no infinito (para cada  $i$ !) e  $L_i$  é invariante por  $h_i$ . Note que  $L_i$  converge a  $L$  quando  $i$  converge no infinito, pois  $L_i$  está em  $(L, G_i)$  e  $G_i$  converge a  $L$  em  $\mathcal{H}$ .

Desde que  $h_i(L_i) = L_i$  então  $h_i$  age como uma isometria hiperbólica em  $L_i$  e tem dois pontos fixos em  $S_\infty^1(L_i)$ . Seja

$$h_i^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_i^n(x)$$

para qualquer ponto  $x$  de  $L_i$ . Seja  $h_i^-$  o outro ponto fixo de  $h_i$ . O fato importante que precisamos é o seguinte lema

**Lema 5.10.**  $h_i^+$  converge a  $u$  em  $\mathcal{A}$  quando  $i$  converge no infinito.

*Demonstração.* Seja  $N$  uma vizinhança de  $u \in \mathcal{A}$  no lado superior de  $S_\infty^1(L)$  ( $u$  definido como no início da prova do lema 5.9). Identificando  $N$  como um subconjunto de  $T_1\alpha$  usando o círculo ideais. Então  $N$  contém um segmento aberto  $T$  em  $S_\infty^1(L)$  com  $u$  em  $T$ . Como os marcadores são localmente densos em  $S_\infty^1(L)$ , existem marcadores

$$\zeta_1, \zeta_2 \text{ de } S_\infty^1(L) \text{ a } S_\infty^1(S_1)$$

com  $S_1$  acima de  $L$ , intersectando  $S_\infty^1(L)$  em  $\zeta_1(L), \zeta_2(L)$  respectivamente de modo que: As interseções com  $S_\infty^1(L)$  estão em  $T$  e definem um segmento menor em  $S_\infty^1(L)$  com  $u$  no interior. Sejam  $r, r_1$  e  $r_2$  os segmentos geodésicos em  $L$  com ponto inicial em  $v$  e com ponto ideal  $u, \zeta_1(L)$  e  $\zeta_2(L)$  respectivamente. Note que  $r_1, r_2$  são direções de contração entre  $L$  e  $S_1$ . Seja  $\alpha_3$

um positivo muito pequeno. Desde que  $r_1, r_2$  são direções de contração entre  $L$  e  $S_1$ , existe  $S_2$  em  $(L, S_1)$  de modo que qualquer ponto em  $r_1, r_2$  está a  $\alpha_3$ -próximo de  $S_2$  e assim está  $\alpha_3$ -próximo de qualquer  $S$  entre  $L$  e  $S_2$ . Para qualquer tal  $S$  nós podemos mover  $r_1$  e  $r_2$  a  $S$  usando o fluxo transversal- se  $\alpha_3$  for suficientemente pequeno. A curvatura geodésica das curvas puxadas em  $S$  é pequena, tendendo a zero quando  $\alpha_3$  tende a zero. Assim elas são quase-geodésicas em  $S$  e suas direções iniciais dão estimativas arbitrariamente próximas das direções definidas pelos levantamentos de  $r_1, r_2$  a  $S$  (ou seja as curvas em  $S$  cujas distâncias a  $r_1$  respectivamente  $r_2$ , vão para zero). Assim, essas direções estão em  $N$  e próximas à direção de  $r$  em  $T_1\alpha$  (se  $N$  é pequeno). Os marcadores  $\zeta_1, \zeta_2$  e os círculos  $S_\infty^1(L), S_\infty^1(S_2)$  definem uma pequena vizinhança  $N_1$  de  $u$  em  $\mathcal{A}$  nesse lado de  $S_\infty^1(L)$  em  $\mathcal{A}$ . Pode-se escolher  $N_1$ , como subconjunto de  $N$ .

Seja  $\nu_i$  é a intersecção de  $\alpha$  e  $L_i$ . Então para  $i$  grande  $z_i$  está na região de  $L$  definida por  $r_1$  e  $r_2$  cujo bordo no infinito é  $T$ , assim a intersecção  $b_i$  de  $\beta_i$  e  $L_i$  estão na região definida pelas imagens (pelo fluxo) de  $r_1, r_2$  em  $L_i$ . A direção do segmento geodésico em  $L_i$  de  $\nu_i$  a  $b_i$  está no interior desta região e define um ponto em  $N_1$  e assim, em  $N$ . Agora temos que

$$\begin{aligned} d(h_i(\nu_i), b_i) &\leq d(h_i(\nu_i), h_i(\nu)) + d(h_i(\nu), c_i) + d(c_i, b_i), \\ &\leq \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0. \end{aligned}$$

Assim pelo lema 3.2 temos que a  $d_{L_i}(h_i(\nu_i), b_i) \leq f(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) = \alpha_4$ , o que implica que  $h_i(\nu_i)$  e  $b_i$  estão limitadamente próximas em  $L_i$ , então a direção do segmento geodésico em  $L_i$  de  $\nu_i$  a  $h_i(\nu_i)$  também define um ponto em  $N$  para  $i$  suficientemente grande. Os pontos  $\nu_i$  estão na transversal fixa  $\alpha$  e próximos de  $\nu$ , assim eles estão em um subconjunto compacto de  $L_i$ . Como os pontos  $h_i(\nu_i)$  estão limitadamente próximos a  $\beta_i$  assim também de  $z_i$ . Por outro lado

$$\begin{aligned} d(\nu, z_i) &\leq d(\nu, \nu_i) + d(\nu_i, b_i) + d(b_i, z_i), \\ &\leq \alpha_2 + d_{L_i}(\nu_i, b_i) + \alpha_0. \end{aligned}$$

Pelo lema 3.2 temos que

$$d_L(\nu, z_i) \leq f(\alpha_2 + d_{L_i}(\nu_i, b_i) + \alpha_0).$$

Agora, como  $d_L(\nu, z_i)$  vai para infinito então  $d_{L_i}(\nu_i, b_i)$  também vai para infinito, isto segue do lema 3.2, além disso

$$\begin{aligned} d_{L_i}(\nu_i, b_i) &\leq d_{L_i}(\nu_i, h_i(\nu_i)) + d_{L_i}(h_i(\nu_i), b_i), \\ &\leq d_{L_i}(\nu_i, h_i(\nu_i)) + \alpha_4, \end{aligned}$$



então

$$d_{L_i}(\gamma_i, h_i(\gamma_i))$$

também vai para infinito. Desde que  $h_i$  é uma isometria hiperbólica em  $L_i$ , isto implica que  $h_i(\gamma_i)$  está próximo a  $h_i^+$  na compactificação  $L_i \cup S_\infty^1(L_i)$ . O argumento usado não dá informação de  $h_i^-$ . Isto mostra que a direção em  $L_i$  definida por  $h_i^+$  está em  $N$ . Como  $N$  é arbitrário isto mostra que  $h_i^+$  converge a  $u$ .  $\square$

**Observação 5.2.** temos os seguintes fatos:

1. Este argumento de fato mostra: Se existe um positivo  $c_0$  e existem  $z_i$  em  $L$  convergindo a  $u$ ,  $G_i$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  convergindo a  $L$  de modo que  $d_\tau(z_i, G_i)$  é maior que  $c_0$ , então obtemos  $h_i \in \pi_1(M)$  com pontos fixos  $h_i^+$  em  $\mathcal{A}$  convergindo a  $u$ .
2. De um jeito semelhante, se  $u$  em  $S_\infty^1(L)$  é uma direção de contração sobre o lado positivo (de  $\tilde{\mathcal{F}}$ ), trocando os papéis de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  consegue-se: Seja  $G_i$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  convergindo a  $L$  em todo o domínio da contração de holonomia na direção de  $u$ . Fixamos um raio geodésico  $r$  em  $L$  com ponto ideal  $u$ . Fixamos  $\tilde{i}$  e seja  $c_0$  o comprimento de  $\alpha_i$ . Como acima, existe um positivo muito pequeno  $c_1$  de modo que qualquer segmento de  $\tilde{\tau}$  de comprimento menor que  $c_1$  pode ser transportado por holonomia a uma distância limitada no interior de um transladado de recobrimento de  $\alpha_i$ . Como  $u$  é uma direção de contração escolhemos  $z_i$  em  $r$  com  $d_\tau(z_i, G_i)$  menor que  $c_1$ . Seja  $\beta_i$  definido como antes, agora com comprimento menor que  $c_1$ . Isto produz  $g_i \in \pi_1(M)$  com  $g_i(\beta_i)$  contida no interior do conjunto das folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  intersectado por  $\alpha_i$ . Os  $g_i^{-1}$  agem sobre  $\mathcal{A}$  tendo pontos fixos (positivos)  $c_i$ 's que convergem a  $u$  em  $\mathcal{A}$ . Isto mostra que arbitrariamente próximos de qualquer direção de contração existem pontos fixos de homeomorfismos de recobrimento.

### Conclusão da prova do lema 5.9

Seja  $\gamma_i$  a geodésica axial em  $L_i$  de  $h_i$ , assim  $h_i(\gamma_i) = \gamma_i$ . Os pontos ideais de  $\gamma_i$  são  $h_i^+$ ,  $h_i^-$ . Então

$$h_i \text{ translada } [L, L_i] \text{ sobre } (L, L_i]$$

e não tem outra folha invariante em  $(L, L_i]$ , isto pois  $L_i$  converge a  $L$ . Assim,  $h_i$  contrai o espaço das folhas próximos de  $L_i$  e portanto, as direções de  $\gamma_i$

associadas a  $h_i^+$  são uma direção de expansão de  $\tilde{\mathcal{F}}$ : folhas próximas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  divergem em  $L_i$  nessa direção.

Isto implica que as direções de  $\gamma_i$  associadas a  $h_i^-$  uma direção de contração (ou equivalentemente  $h_i^-$  expande o espaço das folhas próximos de  $L_i$ ). Mas  $h_i(\mathcal{L}) = (\mathcal{L})$ , assim os pontos ideais de  $\gamma_i$  estão em  $\mathcal{L}$ . Como  $h_i^+$  converge a  $u$  e este é distinto de  $\mathcal{L}_L$  então para  $i$  suficientemente grande  $h_i^-$  é  $\mathcal{L}_{L_i}$  mas isto implica que  $\mathcal{L}$  tem um ponto  $h_i^-$  associado a uma direção de contração. Isto contradiz o lema 5.8 e finaliza a prova.  $\square$

Com um pouco mais de trabalho pode-se mostrar que  $d_\tau(z_i, G)$  converge a zero:

**Lema 5.11.** *Suponha que existe uma curva limite invariante  $\mathcal{L}$ . Para qualquer  $L$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e um lado de  $L$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$  existe  $G$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  nesse lado de modo que: para qualquer  $u$  em  $S_\infty^1(L)$  distinto de  $\mathcal{L}_L$  e qualquer sequência  $z_i$  em  $L$  convergindo a  $u$  então  $d_\tau(z_i, G)$  converge a zero. Em particular  $u$  é uma direção de contração entre  $L$  e  $G$ .*

*Demonstração.* Dado  $L$  e um lado dela, escolhamos uma  $G$  dada pelo lema 5.9. Suponha que o lema não é verdade. Então existe um  $u \in S_\infty^1(L)$  distinto de  $\mathcal{L}_L$  e uma sequência  $z_i$  com  $d_\tau(z_i, G)$  não convergindo para zero. Pelo lema 5.9 o  $\limsup$  de  $d_\tau(z_i, G)$  é limitado superiormente por uma constante  $\alpha_4$  a qual só depende de  $L$ ,  $G$  e  $u$ . Desde que  $d_\tau(z_i, G)$  não converge à zero, salvo sub-sequência pode-se supor que  $d_\tau(z_i, G)$  converge para um positivo  $\alpha_5$ . Salvo uma outra sub-sequência, escolhamos  $f_i$  em  $\pi_1(M)$  com  $f_i(z_i)$  convergindo a  $z_0$ , isto pela observação 3.2. Então  $f_i(L)$  converge a  $L_0$  contendo  $z_0$  e  $f_i(G)$  converge a uma folha  $G_0$  pois a  $d_\tau(z_i, G)$  converge a  $\alpha_5$ . Assim  $G_0, L_0$  são folhas distintas, pois  $\alpha_5 > 0$ . Para qualquer  $w \in L_0$ ,  $d_{L_0}(w, z_0)$  é finita, assim  $w$  é o limite de  $w_i$ , com  $w_i$  em  $f_i(L)$  e  $d_{f_i(L)}(w_i, f_i(z_i))$  é limitada, isto pelo lema 3.2(a cota só depende de  $d_{L_0}(w, z_0)$ ). Os pontos  $f_i^{-1}(w_i)$  de  $L$  estão a uma distância limitada de  $z_i$  e em particular

$$f_i^{-1}(w_i) \rightarrow u \in S_\infty^1(L) \quad \text{quando } i \rightarrow +\infty.$$

Portanto o  $\limsup$  de  $d_\tau(f_i^{-1}(w_i), G)$  é menor que  $\alpha_4$ . Salvo uma sub-sequência  $d_\tau(f_i^{-1}(w_i), G)$  converge para  $\alpha_6$ , que é distinto de zero pois  $d(f_i^{-1}(w_i), z_i)$  é limitada superiormente e  $d_\tau(z_i, G)$  é limitada inferiormente por uma constante positiva. Existem  $y_i$  em  $G$  com  $y_i, f_i^{-1}(w_i)$  na mesma folha de  $\tilde{\tau}$  e  $d_\tau(y_i, f_i^{-1}(w_i))$  convergindo para  $\alpha_6$ . Então  $f_i(y_i)$  converge a um ponto  $y$  em  $\tau_w$  e  $d_\tau(w, y)$  é igual a  $\alpha_6$ . Mas  $f_i(y_i)$  está em  $f_i(G)$  e  $f_i(G)$  converge a  $G_0$ , assim  $y$  está em  $G_0$ . Isto produz uma aplicação de  $L_0$  para  $G_0$  dada por

$\varphi(w) = y$ . Note que para qualquer  $w$  em  $L_0$ , os  $w$ ,  $\varphi(w)$  estão na mesma folha de  $\tilde{\tau}$  e  $d_\tau(w, \varphi(w))$  é menor que  $\alpha_4$ .

A aplicação  $\varphi$  de  $L_0$  a  $G_0$  é injetiva, pois  $\mathcal{F}$  é sem componente de Reeb ( $\tau_y = \tau_w$  não pode intersectar duas vezes a folha  $L_0$ ). Ela é contínua, de fato, seja  $c$  um ponto qualquer de  $L_0$  e  $c_i$  uma sequência em  $f_i(L)$  convergindo para  $c$ , agora existem únicos  $e_i$  em  $G_0$  tal que  $\varphi(c_i) = e_i$ . Temos que  $c$  define um único ponto  $e$  em  $G_0$ , tem-se que mostrar que  $e_i$  converge para  $e$ . Pegamos uma vizinhança  $V$  de  $e$  em  $G_0$  agora pelo fato de que  $c$  e  $e$  estão na mesma folha de  $\tilde{\tau}$  eles definem um segmento compacto, assim pelo teorema do fluxo tubular pode-se obter uma vizinhança  $U$  onde o fluxo é trivializado e reduzindo ela pode-se supor que  $U \cap G_0$  está contida em  $V$ . Agora, como  $c_i$  converge para  $c$ , para  $i$  suficientemente grande os  $c_i$  ficam em  $U$  e portanto os  $e_i$  ficam em  $U \cap G_0$  e portanto em  $V$ , isto mostra a continuidade; do mesmo jeito pode-se mostrar que  $\varphi^{-1}|_{\varphi(L_0)}$  é contínua. Assim  $\varphi$  é uma homeomorfismo sobre sua imagem. Se  $\varphi(L_0)$  não é todo  $L_0$  então existe  $b$  em  $G_0$  com  $b$  no bordo de  $\varphi(L_0)$  (como subconjunto de  $G_0$ ). Escolhamos  $s_j$  em  $\varphi(L_0)$  convergindo a  $b$ . Seja  $x_j$  em  $L_0$  com  $\varphi(x_j) = s_j$ . Então

$$d(x_j, s_j) \leq d_\tau(x_j, s_j) \leq \alpha_4$$

e como  $s_i$  converge a  $b$  temos que  $d(x_j, b)$  é limitada e assim também  $d(x_j, x_1)$ , agora pelo lema 3.2 temos que  $d_{L_0}(x_j, x_1)$  é limitada (isto é o fato importante). Salvo subsequência suponha que  $x_j$  converge a  $x_0$ . Então  $s_j = \varphi(x_j)$  converge a  $\varphi(x_0)$  - um ponto em  $G_0$ . Mas  $b$  é igual a  $\varphi(x_0)$  e está em  $\varphi(L_0)$  contradizendo a hipóteses.

Conclui-se que  $\varphi$  é sobrejetiva e de fato, para qualquer ponto  $s$  em  $G_0$ ,  $d_\tau(s, L_0)$  é menor que  $\alpha_4$ . Usando o fato que  $\mathcal{F}$  é minimal isto mostra que quaisquer duas folhas de  $\tilde{\mathcal{F}}$  estão a uma distância limitada uma da outra, contradizendo a hipóteses de não-uniformidade. Isto finaliza a prova do lema.  $\square$

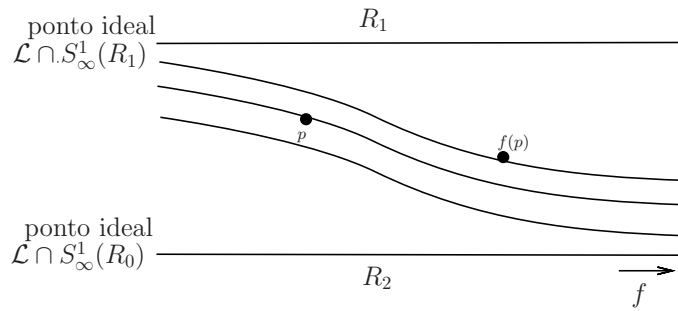
Desde que  $\mathcal{L}$  em  $\mathcal{H}$  e  $u$  em  $S_\infty^1(L) - \mathcal{L}_L$  são arbitrários, o lema 5.11 mostra que qualquer ponto  $u$  de  $\mathcal{A} - \mathcal{L}$  está no interior de uma marcador  $\zeta$  em  $\mathcal{A}$ . Se dois marcadores se intersectam sua união é um marcador. Isto produz uma folheação 1-dimensional  $\mathcal{N}$  em  $\mathcal{A} - \mathcal{L}$  consistindo da coleção de todos os marcadores. O objetivo é mostrar que qualquer folha de  $\mathcal{N}$  intersecta todo os círculos no infinito.

**Proposição 5.4.** *Suponha que exista uma curva limite invariante  $\mathcal{L}$ . Para quaisquer  $E, F$  in  $\tilde{\mathcal{F}}$  e qualquer  $v$  em  $S_\infty^1(E)$  distinto de  $\mathcal{L}_E$ ,  $v$  é uma direção de contração com  $F$  - isto é, qualquer direção salvo a de  $\mathcal{L}$  é uma direção de contração entre folhas arbitrárias.*

*Demonstração.* Seja  $v$  em  $\mathcal{A} - \mathcal{L}$  um ponto fixo de um homeomorfismo de recobrimento  $f$ ,  $\zeta$  a folha de  $\mathcal{N}$  passando por  $v$  e  $R_0$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $v$  em  $S_\infty^1(R_0)$ . Por simplicidade assumamos que  $\zeta$  não encontra algum  $S_\infty^1(R)$  com  $R$  acima de  $R_0$ . Seja  $R_1$  acima de  $R_0$  o menor dos  $R$ 's que não encontra  $\zeta$ . O conjunto dos  $R$  tal que  $\zeta$  intersecta  $S_\infty^1(R)$  é uma conjunto aberto em  $\mathcal{H}$  pois qualquer ponto em  $\mathcal{A} - \mathcal{L}$  está no interior de um marcador. Então,

$$f(\zeta) = \zeta \quad \text{implica} \quad f(R_1) = R_1$$

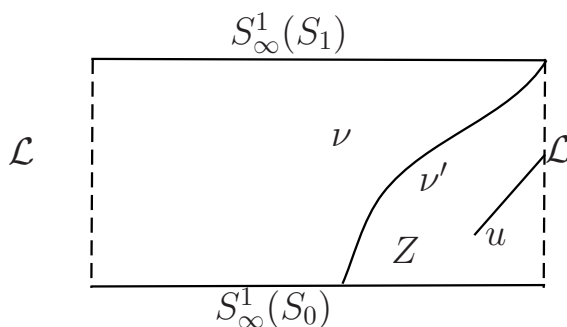
pois  $\mathcal{F}$  é  $\mathbb{R}$ -coberta. Também para qualquer  $R$  no intervalo  $(R_0, R_1)$  de  $\mathcal{H}$  tem-se que  $f(R)$  e  $R$  são distintos, pois todo tal  $R$  é assintótico a  $R_0$  na direção de  $v$  e não pode ser deixado invariante por translações de recobrimento associado a esta direção. Se necessário trocamos  $f, f^{-1}$  de modo que  $v$  é uma ponto fixo atrator de  $f$  em  $S_\infty^1(R_0)$ . Então  $R_0$  é um ponto de expansão para a ação de  $f$  em  $[R_0, R_1]$ . A ação de  $f$  sobre o intervalo fechado



$$B = \mathcal{L} \cap \left( \bigcup_{R \in [R_0, R_1]} S_\infty^1(R) \right)$$

tem um ponto fixo de expansão em  $\mathcal{L}_{R_0}$ . Como  $f$  não tem uma folha invariante em  $(R_0, R_1)$ , a ação de  $f$  sobre  $B$  tem  $\mathcal{L}_{R_1}$  como um ponto atrator. Como  $f(R_1) = R_1$  isto mostra que  $\mathcal{L}_{R_1}$  corresponde a uma direção de contração em  $R_1$ , contradizendo o lema 5.8. Conclui-se que  $\zeta$  intersecta todos os círculos no infinito.

Agora, seja  $v$  uma folha de  $\mathcal{N}$  intersectando  $S_\infty^1(S_0)$  que não intersecta todos os círculo no infinito; suponha que exista um limite superior  $S_\infty^1(S_1)$ . Então  $v$  se aproxima de  $\mathcal{L}$  próximo de  $S_\infty^1(S_1)$ . Segue que  $v, S_\infty^1(S_0)$  e  $\mathcal{L}$  limitam uma região  $\mathcal{Z}$  a qual não intersecta  $S_\infty^1(S_1)$ . Qualquer marcador intersectando  $\mathcal{Z}$  está limitado superiormente. Agora escolhamos  $u$  em  $\mathcal{Z}$  que



é um ponto fixo de alguma translação de recobrimento. Mostramos antes que qualquer direção de contração é o limite de pontos fixos de translações de recobrimento. Seja  $\nu'$  a folha de  $\mathcal{N}$  passando por  $u$ . Como  $\nu'$  está em  $Z$  então  $\nu'$  é limitada superiormente, o que pelo visto anteriormente não acontece.

A conclusão é que para qualquer marcador  $\zeta$  em  $\mathcal{A}$ , então  $\zeta$  intersecta todos os círculos no infinito. Em particular dado  $E, F$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $u$  em  $S_\infty^1(E) - \mathcal{L}_E$ , então o marcador  $\zeta$  passando por  $u$  intersecta  $S_\infty^1(F)$ - isto é,  $u$  é uma direção de contração entre  $E$  e  $F$ . Isto finaliza a prova.  $\square$

#### 4 Construção da folheação vertical - caso não-uniforme

**Teorema 5.1.** (folheação vertical - caso não-uniforme) *Seja  $\mathcal{F}$  é uma folheação minimal, não-uniforme,  $\mathbb{R}$ -coberta e com folhas hiperbólicas. Dados quaisquer  $F, E$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , existe um conjunto denso de direções em  $F$  contraindo-se a  $E$ . O conjunto de marcadores estende-se a uma folheação vertical em  $\mathcal{A}$  que é invariante por  $\pi_1(M)$ .*

*Demonstração.* O argumento é como segue: Se os marcadores não são densos, conseguimos produzir uma curva limite invariante  $\mathcal{L}$  e então aplicando a proposição anterior, obtemos uma contradição visto que nele é provado que todo ponto  $u \in S_\infty^1(E) - \mathcal{L}_E$  é direção de contração, para qualquer folha  $E$ . Suponha que a proposição não é verdadeira. Então existe  $F$  e  $E$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  (pode-se supor  $E$  acima de  $F$ ) sem um conjunto denso de direções de contração de  $F$  para  $E$ - isto é do ponto de vista de  $F$ !. Assim existe um intervalo aberto  $J_0$  em  $S_\infty^1(F)$  de modo que nenhum ponto de  $J_0$  corresponde a uma direção de contração entre  $F$  a  $E$ . Seja  $q_0$  em  $J_0$ . Desde que  $q_0$  não é uma direção de contração entre  $F$  e  $E$ , existe um positivo  $\epsilon$  e  $p_1$  em  $F$  convergindo a  $q_0$

ao longo de um raio geodésico  $l$  e de modo que  $d(p_i, E)$  é maior que  $\epsilon$ . Na folha  $F$ , a medida visual de  $J_0$  medida do ponto  $p_i$  é  $\theta_i$  convergindo a  $2\pi$  quando  $i$  converge ao infinito. Salvo subsequências de  $p_i$  escolhemos translações de recobrimento  $g_i$  com  $g_i(p_i)$  convergindo a  $p_0$  e se for necessário passamos a uma outra subsequência do jeito que os  $g_i(l)$  convergem a  $l_0$ . Seja  $F_0$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  contendo  $p_0$ . Seja

$$\mathcal{O} = \{G \in \tilde{\mathcal{F}} \mid G = f(F_0), \text{ para algum } f \in \pi_1(M)\} \subset \mathcal{H}$$

Vamos definir uma função  $\eta$  de  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$  que escolhe a direção do marcador limite e produzira uma curva limite invariante. Desde que  $d(g_i(E), g_i(p_i))$  é maior que  $\epsilon$  então  $g_i(E)$  não tem uma subsequência convergindo a  $F_0$ . Claramente um marcador de  $g_i(F)$  para  $g_i(E)$  no máximo, começa no conjunto

$$U_i = S_\infty^1(g_i(F)) - g_i(J_0).$$

Do ponto de vista de  $g_i(p_i)$  em  $g_i(F)$ , a medida visual de  $U_i$  é  $2\pi - \theta_i$  que converge a 0. Também visualmente de  $g_i(p_i)$  o conjunto  $U_i$  é muito próximo à direção do segmento de  $g_i(l_i)$  de  $g_i(p_1)$  a  $g_i(p_i)$ . Dado que a direção de  $g_i(l)$  converge à direção  $l_0$  e a topologia de  $\mathcal{A}$  é dada pela a topologia visual das transversais a  $\tilde{\mathcal{F}}$ , segue que o segmento  $U_i$  converge a um único ponto em  $S_\infty^1(F_0)$ .

**Definição 5.3.** (função  $\eta$ ) Definamos  $\eta: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}$  por

$$\eta(F_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} U_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (S_\infty^1(g_i(F)) - g_i(J_0))$$

e para qualquer translação de recobrimento  $f$  definamos

$$\eta(f(F_0)) = f(\eta(F_0)).$$

Pelo feito acima temos que o limite dos  $U_i$ 's é só um ponto assim a função  $\eta$  é bem definida, além disso pela definição temos que  $\eta(f(F_0)) \in S_\infty^1(f(F_0))$ . As folhas  $F, E, F_0$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  bem como as transformações de recobrimento  $g_i$  estarão fixadas nesta prova.

**Lema 5.12.** A função  $\eta$  de  $\mathcal{O}$  a  $\mathcal{A}$  se estende a  $\eta: \mathcal{H} \cong \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ .

*Demonstração.* Desde que  $\mathcal{F}$  é uma folheação minimal o conjunto  $\mathcal{O}$  é denso em  $\mathcal{H}$  assim o jeito natural de estender  $\eta$  é pegar um  $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ , então existe uma sequência de  $L_i \in \mathcal{O}$  convergindo a  $L$  e definimos

$$\eta(L) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(L_i).$$

Agora, temos que provar a boa definição desta extensão. Suponha que pode-se encontrar duas sequências  $L_j$  e  $H_j$  convergindo a  $L$  com  $\eta(L_j)$  convergindo a  $\mathbf{a}$ ,  $\eta(H_j)$  convergindo a  $\mathbf{b}$ , com  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  pontos distintos. Desde que os  $\eta(L_i) \in S_\infty^1(L_i)$  e  $L_i$  converge a  $L$  implica que  $\mathbf{a} \in S_\infty^1(L)$ , analogamente  $\mathbf{b} \in S_\infty^1(L)$ . Os  $L_j, H_j$  são transladados de recobrimento de  $F_0$ :

$$L_j = f_j(F_0), \quad H_j = h_j(F_0) \quad \text{para algum } f_j, h_j \in \pi_1(M).$$

Escolhamos pequenas vizinhanças abertas disjuntas  $V_a, V_b$  de  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  respectivamente em  $\mathcal{A}$ . O lema 5.6 mostra que existem pequenas vizinhanças abertas disjuntas  $V'_a, V'_b$  de  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  respectivamente em  $\mathcal{A}$ , e uma vizinhança  $V$  de  $L$  em  $\mathcal{H}$  definida por uma transversal  $\mu$  a  $\tilde{\mathcal{F}}$ , de modo que qualquer marcador atravessando  $V'_a$  e contido em  $\mathcal{A}_\mu$  está contido em  $V_a$  e similarmente qualquer marcador que intersecte  $V'_b$  está contido em  $V_b$ . Em particular os dois conjuntos de marcadores contidos em  $\mathcal{A}_\mu$  atravessando  $V'_a$  e  $V'_b$  são disjuntos um do outro. O lema 4.2 implica que qualquer marcador em  $\mathcal{A}$  atravessando  $V'_a$  não intersecta  $V'_b$ .

Fixamos  $j$  suficientemente grande de modo que  $\eta(L_j)$  está em  $V'_a$  e  $\eta(H_j)$  está em  $V'_b$ . Como  $L_j = f_j(F_0)$  então

$$\eta(L_j) = f_j(\eta(F_0)) = f_j(\lim_{i \rightarrow \infty} U_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_j(U_i) \in V'_a.$$

Similarmente

$$\eta(H_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_j(U_i) \in V'_b.$$

Agora, fixamos  $i$  suficientemente grande de modo que  $f_j(U_i)$  está contido em  $V'_a$  e  $h_j(U_i)$  está contido em  $V'_b$ , isto implica que qualquer marcador passando por  $f_j(U_i)$  é disjunto de um marcador passando por  $h_j(U_i)$ . Escolhamos  $A$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $A$  menor que  $L$  na ordem linear de  $\mathcal{H}$ . Escolhendo  $j, i$  suficientemente grandes pode-se assumir que  $L_j, H_j$  são maiores que  $A$  e assim também

$$f_j(g_i(F)) \quad , \quad h_j(g_i(F))$$

lembre que  $U_i \subset g_i(F)$ . Também escolhemos  $B$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$  com  $B$  maior que ambos  $f_j(g_i(E))$  e  $h_j(g_i(E))$  em  $\mathcal{H}$ . Um marcador de  $S_\infty^1(A)$  a  $S_\infty^1(B)$  tem que passar através de  $S_\infty^1(f_j(g_i(F)))$  e através de  $S_\infty^1(h_j(g_i(E)))$ , pois as folhas  $f_j(g_i(F))$  e  $f_j(g_i(E))$  separam  $A$  de  $B$ . Pela a propriedade de  $U_i$ , segue que os marcadores têm que passar através de  $f_j(U_i)$  contido em  $V'_a$ . Similarmente qualquer tal marcador tem que passar através de  $S_\infty^1(h_j(g_i(F)))$  e  $S_\infty^1(h_j(g_i(E)))$ . Assim este tem que passar através de  $h_j(U_i)$  contido em  $V'_b$ . Mas provamos que nenhum marcador pode passar através de ambos  $V'_a$  e  $V'_b$ . Isto implica que

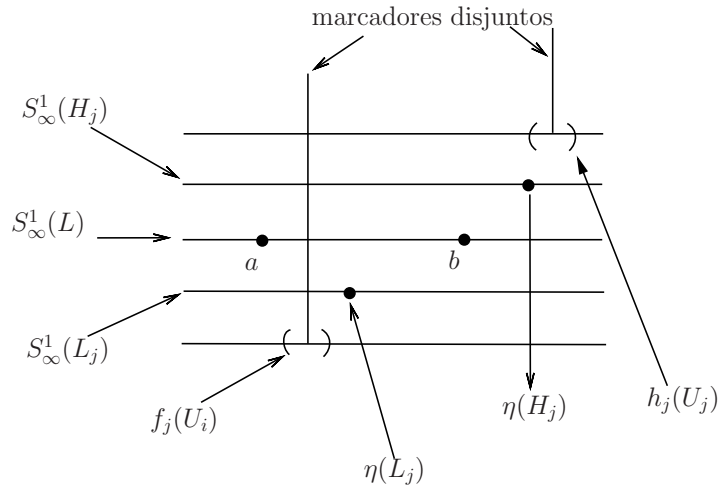


Figura 5.3: Se  $\eta$  não é contínua, isto faz que os marcadores estejam em regiões disjuntas ao mesmo tempo- contradição

não existe um marcador de  $S_\infty^1(A)$  a  $S_\infty^1(B)$  o que contradiz a proposição 5.2. Isto mostra que  $\eta$  pode ser estendida a uma função contínua do fecho de  $\mathcal{O}$  para  $\mathcal{A}$ . Mas como  $\mathcal{F}$  é minimal, então  $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{H}$ , assim  $\eta: \mathcal{H} \cong \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ . A imagem é uma curva  $\mathcal{L}$  a qual intersecta todo círculo no infinito, isto pois  $\eta(L) \in S_\infty^1(L)$  para qualquer  $L \in \tilde{\mathcal{F}}$  e ela é transversal à folheação horizontal. Isto finaliza a prova.  $\square$

**Conclusão da prova da Proposição 5.1**

O conjunto

$$\eta(f(F_0)), \quad f \in \pi_1(M)$$

é um subconjunto invariante de  $\mathcal{A}$ , pela ação de  $\pi_1(M)$ , pois se pegamos uma translação de recobrimento  $g$  e pegamos algum elemento  $\eta(f(F_0))$  do conjunto, com  $f \in \pi_1(M)$ , então temos da definição que

$$g(\eta(f(F_0))) = g(f(\eta(F_0))) = \eta(gf(F_0)),$$

estando por tanto no mesmo conjunto. Pelo lema 5.12 temos que para quaisquer  $g \in \pi_1(M)$  e  $p \in \mathcal{L}$  então  $p \in S_\infty^1(L)$ , para algum  $L$  e

$$p = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(L_i)$$



onde  $L_i$  converge a  $L$  e  $L_i \in \mathcal{O}$ , logo temos que

$$g(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(\eta(L_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(g(L_i))$$

Assim  $g(L_i) \in \mathcal{O}$ , então  $g(p)$  pertence a  $\mathcal{L}$ , logo  $\mathcal{L}$  é uma curva invariante. Também dado qualquer translação de recobrimento  $g$  com uma folha invariante  $L$  ( $g(L) = L$ ), então um dos pontos fixos de  $g$  em  $S_\infty^1(L)$  está em  $\mathcal{L}$ .

Seja  $L$  em  $\mathcal{O}$ ,  $L = g(F_0)$ . Então  $L$  é o limite de  $g(g_i(F))$  quando  $i$  converge a infinito. Qualquer marcador de

$$S_\infty^1(g(g_i(F))) \quad \text{para} \quad S_\infty^1(g(g_i(E)))$$

tem ponto inicial em  $g(U_i)$ . Lembremos que  $g(U_i)$  converge a  $\eta(L)$  quando  $i$  converge no infinito. Escolhamos uma coleção de folhas  $G_k, R_k$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$ , escapando para os fins opostos de  $\mathcal{H}$  e  $G_k$  sempre menor que  $R_k$  em  $\mathcal{H}$ . Para cada  $k$  escolhamos um marcador  $\zeta_k$  de  $S_\infty^1(G_k)$  a  $S_\infty^1(R_k)$ . Fixamos um vizinhança  $N$  de  $\eta(L)$  em  $\mathcal{A}$ . Escolhamos  $i$  suficientemente grande de modo que  $g(U_i)$  está contida em  $N$ . Para  $k$  suficientemente grande as folhas  $G_k, g(g_i(F)), g(g_i(E))$  e  $R_k$  estão linearmente ordenados em ordem crescente em  $\mathcal{H}$ , assim  $\zeta_k$  tem que passar através de algum ponto  $z_k$  em  $g(U_i)$ , donde  $z_k$  está em  $N$ .

**Afirmção 5.2.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\zeta_k \cap S_\infty^1(L)) = \eta(L)$

Com efeito, suponha que  $\zeta_k \cap S_\infty^1(L)$  não converge a  $\eta(L)$ , então existe um vizinhança  $N_1$  de  $\eta(L)$  de tal jeito que nenhum  $\zeta_k \cap S_\infty^1(L)$  está em  $N_1$ , agora pelo lema 5.6 existem vizinhanças  $N'_1$  de  $\eta(L)$  e uma vizinhança  $V$ , dada por uma transversal  $\mu$  a  $\tilde{\mathcal{F}}$  ( $V = \mathcal{A}_\mu$ ), de  $L$  tal que si um marcador  $\zeta$  intersecta  $N'_1$  a sua intercessão com  $\mathcal{A}_\mu$  está contida em  $N_1$ . Agora para um  $i$  suficientemente grande temos que  $g(U_i)$  pertencem a  $N'_1$  assim para  $k$  suficientemente grande temos que  $G_k, g(g_i(F)), g(g_i(E))$  e  $R_k$ , estão ordenados de forma crescente em  $\mathcal{H}$ . Logo o marcador  $\zeta_k$  tem que cortar  $g(U_i)$  em algum  $z'_k$  assim  $\zeta_k \cap N'_1 \neq \emptyset$  então  $\zeta_k \cap \mathcal{A}_\mu \subset N_1$  que implica que  $\zeta_k \cap S_\infty^1(L) \in N_1$  contradizendo a suposição. Então

$$\text{para todo } L \text{ em } \mathcal{O}, \quad \eta(L) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\zeta_k \cap S_\infty^1(L)) \quad (1)$$

Como o conjunto  $\mathcal{O}$  é denso em  $\mathcal{H}$ , e  $\eta$  é contínua em  $\mathcal{H}$ , o lema 5.6 implica que a equação (1) é verdadeira para todo  $G$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Com efeito, pegamos  $G \in \tilde{\mathcal{F}}$  qualquer, então existem  $L_i \in \mathcal{O}$ , com  $L_i$  convergindo a  $G$  e  $\eta(L_i)$  convergindo a  $\eta(G)$ , agora suponha que a afirmação é falsa, então existe

uma vizinhança  $N_2$  de  $\eta(G)$  onde  $\zeta_k \cap S_\infty^1(L_i) \notin N_2$  para todo  $k$ , uma vez mais pelo lema 5.6 existe uma vizinhança  $N'_2$  de  $\eta(G)$  e uma vizinhança  $V'$ , dada por uma transversal  $\nu$  a  $\tilde{\mathcal{F}}$  ( $V = \tilde{\mathcal{F}}_\nu$ ). Assim para  $j$  suficientemente grande  $\eta(L_j)$  está em  $N'_2$  logo como

$$\eta(L_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\zeta_k \cap S_\infty^1(L))$$

temos que existe um  $k$  grande tal que  $\zeta_k \cap S_\infty^1(L)$  está em  $N'_2$  assim,  $\zeta_k$  intersecta  $N'_2$ , logo temos que  $\zeta_k \cap V' \subset N_2$  donde  $S_\infty^1(L) \cap \zeta_k \in N_2$ , o que contradiz a suposição. Assim

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k \cap S_\infty^1(G) = \eta(G)$$

para qualquer  $G \in \tilde{\mathcal{F}}$ . Então conclui-se que  $\mathcal{L}$  é o limite de uma sequência de marcadores  $\eta_k$  cada vez maior e  $\mathcal{L}$  é uma curva invariante. Mas neste caso a proposição 5.4 implica que dadas quaisquer  $G, H$  folhas em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e qualquer  $u$  em  $S_\infty^1(G) - \mathcal{L}_G$  então  $u$  é uma direção de contração entre  $G$  e  $H$ . Isto contradiz a hipótese na prova da proposição 5.1 de que não existe um conjunto denso de direções de contração entre  $F$  e  $E$ .

Agora, finalizamos a prova da proposição 5.1. Dado duas folhas arbitrárias  $G, H$ , o conjunto denso de marcadores entre  $S_\infty^1(G)$  e  $S_\infty^1(H)$ , estende-se a uma folheação vertical da região de  $\mathcal{A}$  entre  $S_\infty^1(G)$  e  $S_\infty^1(H)$ . Isto é por que ele é denso do ponto de vista de ambos  $G$  e  $H$ !. Em adição se  $G', G, H, H'$  estão ordenados linearmente em  $\mathcal{H}$ , fazendo a mesma operação usando  $G', H'$ , a folheação resultante é uma extensão da folheação entre  $S_\infty^1(G)$  e  $S_\infty^1(H)$ . Isto é por que marcadores de  $S_\infty^1(G')$  e  $S_\infty^1(H')$  produzem marcadores de  $S_\infty^1(G)$  e  $S_\infty^1(H)$  e existe uma única extensão da folheação a um anel maior. Conseqüentemente existe uma folheação vertical bem definida em  $\mathcal{A}$ . Desde que a coleção de marcadores em  $\mathcal{A}$  é invariante pela ação por translações de recobrimento, a folheação vertical também, e é uma folheação natural associada a  $\mathcal{F}$ . Isto finaliza a prova da construção da folheação vertical no caso não uniforme. □

# Bibliografia

- [Cal1] D. Calegari,  *$\mathbb{R}$ -covered foliation of hyperbolic 3-manifolds*, *Geom. Topol.* 3 (1999) 137-153(electronic).
- [Cal2] D. Calegari, *The geometry of  $\mathbb{R}$ -covered foliation*, *Geom. Topol.* 4 (2002) 457-515(electronic).
- [Cal3] D. Calegari, *The geometry and topology of  $\mathbb{R}$ -covered foliations*, *Elec. Res. Ann. of the AMS*, 6 (2002) 31-39.
- [Ca-Li] Camacho, A. Lins Neto., *Geometric theory of foliations*, traducido do português por Sue Goodman. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA (1985).
- [Can] A. Candel, *Uniformization of surface lamination*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 26(1993) 489-516.
- [Fe] Sergio R. Fenley., *Foliation, topology and geometry of 3-manifold:  $\mathbb{R}$ -covered foliation and transverse pseudo-Anosov flows*, *Comment. Math. Helv.* 77(2002) 415-490.
- [K] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and Discrete Grups: Lectures on thurston's hyperblisation*, *Progress en Math.*, Birkhauser, 2000.
- [Li] E. Lima., *Espaço de recobrimento e grupo fundamental*, *Coleção Matemática Universitária*, IMPA, 1998.
- [Pa] F. Palmeira *Open manifolds foliated by planes*, *Ann. of Math.* 107(1978), 109-131.
- [Sc-Mo] Scárdua, C. Morales, *Geometry, Dynamics and Topology of Foliated Manifolds*, 24<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2003.
- [Th1] W. Thurston, *Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton lecture notes (1979).

- [Th2] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surface*, Bull. A.M.S 19 (1998), 417-431.
- [Th3] W. Thurston, *Three manifold, foliations and circles I*, arxiv:math.GT/9712268.