Universidade Federal Fluminense

FACULDADE DE ECONOMIA

KALLEL GOULART DA MOTA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI NA DEMONSTRAÇÃO DO EQUILÍBRIO ECONÔMICO GERAL - UMA PROPOSTA DA ABORDAGEM TOPOLÓGICA

NITERÓI – RJ

2021.2

KALLEL GOULART DA MOTA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI NA DEMONSTRAÇÃO DO EQUILÍBRIO ECONÔMICO GERAL - UMA PROPOSTA DA ABORDAGEM TOPOLÓGICA

Monografia apresentada ao curso de Bacharelado em Ciências Econômicas da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para conclusão de curso.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Henrique Cabido Gusmão

Niterói – RJ

2021.2

Ficha catalográfica automática - SDC/BEC
Gerada com informações fornecidas pelo autor

D111t Da mota, Kallel Goulart
O Teorema do Ponto Fixo de Kakutani na Demonstração do Equilíbrio Econômico Geral : Uma Proposta da Abordagem Topológica / Kallel Goulart Da mota ; Paulo Henrique Cabido Gusmão, orientador. Niterói, 2021.
47 p. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Econômicas)-Universidade Federal Fluminense, Faculdade de Economia, Niterói, 2021.

1. Economia matemática. 2. Equilíbrio econômico geral. 3. Ponto fixo. 4. Kakutani. 5. Produção intelectual. I. Gusmão, Paulo Henrique Cabido, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Faculdade de Economia. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

KALLEL GOULART DA MOTA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE KAKUTANI NA DEMONSTRAÇÃO DO EQUILÍBRIO ECONÔMICO GERAL - UMA PROPOSTA DA ABORDAGEM TOPOLÓGICA

Monografia apresentada ao curso de Bacharelado em Ciências Econômicas da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para conclusão de curso.

Trabalho aprovado em 07 de Fevereiro de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Henrique Cabido Gusmão
Orientador
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. André Barbosa Oliveira
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Slobodan Tanusevski
Universidade Federal Fluminense

"You know, Oskar, if those books are unearthed sometime a few hundred years hence, people will not believe they were written in our time. Rather they will think that they are about contemporary with Newton, so primitive is their mathematics. Economics is simply still a million miles away from the state in which an advanced science is, such as physics" - John Von Neumann
Em Morgenstern (1976b, p. 810 apud Weintraub 1985, p. 85)

"Envolvi-me com a Revolução, ou pelo menos na mais estupenda simulação que dela já fizeram, buscando uma fé honrosa. Julguei que era digno participar de assembleias e desfiles, gritei, com os outros, "fascistas, burgueses, agora poucos meses", não atirei pedras de calçadas nem esferas de metal porque sempre tive medo que os outros fizessem comigo aquilo que eu estava fazendo com eles, mas experimentava uma espécie de excitação moral ao fugir correndo pelas ruas do centro, quando a polícia investia contra nós. Voltava para casa com a sensação de haver cumprido um dever qualquer. Nas assembleias não conseguia apaixonar-me pelas divergências que dividiam os grupos: suspeitava que seria suficiente encontrar o discurso apropriado para se passar de um grupo ao outro. Divertia-me procurar as palavras pertinentes. Formulava." - Casaubon
Em O Pêndulo de Foucault (Eco, 2008, p. 58-9)

RESUMO

O caráter referencial que a Teoria do Equilíbrio Geral desempenha na Ciência Econômica é emblemático. A compreensão desta teoria em seus detalhes exige, já desde sua fundação no trabalho dos Elementos de Economia Pura de Walras, o conhecimento matemático que, se por um lado lhe confere maior universalidade devido à interseção instrumental com áreas do pensamento além das utilizadas pelas humanidades, por outro lado, implica uma barreira à entrada daqueles desejosos de entender este campo de estudo econômico. Para a compreensão e partilha deste conhecimento, esta monografia se propõe analisar o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, presente nos teoremas de existência da revolução neowalrasiana do período que se estende desde a década de 1930 à década de 1950, cuja relevância na história do pensamento econômico é central devido sua predicação metateorética para com a teoria econômica ortodoxa, de acordo com uma perspectiva topológica.

Palavras-chave: Equilíbrio Geral; Teorema de Kakutani; Teorema do Ponto Fixo; Economia; Topologia; Teoria do Ponto-Fixo.

ABSTRACT

Theory of General Economic Equilibrium emblematically stands as a reference point in Economic Science. The understanding of this theory in all of its details requires, since its foundation with Walras's Elements, the mathematical knowledge which, if on the one hand confers universality due to its instrumental intersection with theoretical areas beyond humanities, on the other hand involves an entrance barrier to those who wish to understand this economic field. For a better comprehension and sharing of this knowledge, this monograph proposes to analyse the Kakutani's Fixed Point Theorem, present in almost every existence theorem of neowalrasian revolution from 1930's to 1950's, wich relevance in the history of economic thought is central due to its metatheoretic predicative to orthodox economic theory, according to a topological perspective.

Keywords: General Economic Equilibrium; Kakutani's Theorem; Fixed-Point Theorem; Economics; Topology; Fixed-Point Theory; Kakutani's Fixed-Point Theorem; Algebraic Topology; Mathematical Economics.

Aos meus pais, Lupercio e Matilde.
A John Von Neumann (*In memoriam*)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que passaram direta ou indiretamente pelo meu percurso neste período, cujo valor inestimável de cada experiência vivida sedimentou em mim o valor das virtudes ensinadas por meus pais e me deram o vislumbre da amizade virtuosa.

Agradeço aos professores Paulo Henrique Cabido Gusmão, por sua solícita disponibilidade e relevante ajuda neste trabalho, e André Barbosa Oliveira, por sua valorosa atenção.

Agradeço aos meus pais que, com o suor de seu trabalho, me ensinaram o valor do sacrifício pelo bem maior nesta vida: a família.

Agradeço a D'us cuja benevolência e amor, não passiveis de serem abarcados por meio algum, são certamente infinitos.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Equilíbrio Econômico é um dos temas mais centrais na Ciência Econômica, todavia mal compreendido e/ou vilipendiado. Sua relevância é crescente no desenrolar do tempo, com determinações mais explícitas quanto mais a pesquisa se desenvolve. De caráter metateórico, oferece aos modelos atuais a plataforma sobre a qual se constrói o edifício do Pensamento Econômico Contemporâneo. Enquanto determinante na direção assumida por seus adeptos na pesquisa econômica, seus comentadores se dividem entre advogados e promotores. Assim, concorde-se ou não com sua validade metateórica, não se pode discordar de sua importância.

Em meados do século XIX, surgem na Europa algumas descobertas econômicas cujos proponentes ficarão conhecidos como Economistas Marginalistas, em referência à determinação do valor econômico concomitante à utilidade marginal dos bens em sua produção e consumo no ambiente econômico de produção e trocas. Tais economistas, tomando da mecânica newtoniana o critério de rigor do raciocínio científico pela matemática, implementarão em suas construções teóricas o raciocínio do Cálculo Infinitesimal. Equilíbrio Parcial, segundo muitos dos economistas ingleses, ou Equilíbrio Geral, segundo a abordagem matemática e econômicamente generalizante da escola de Lausanne, eles trabalharam a noção de Equilíbrio prevalecente na produção científica posterior, com frutuosidade de soluções das aporias do Pensamento Econômico Clássico que estes economistas obtiveram.

Fundador da Escola Econômica de Lausanne e um dos proponentes da Revolução Científica do Marginalismo Econômico, Leon Walras publicará em 1884 seu *Eléments d'economie politique pure* (Elementos de Economia Política Pura) e estabelecerá como paradigma de sua abordagem ao problema econômico a multiplicidade de agentes econômicos em sistema de competição perfeita. Propondo a equalização simultânea dos setores econômicos de commodities, produção industrial e serviços na economia real por meio de um sistema de equações, o pai do Equilíbrio Econômico Geral estabelecerá na noção de Equilíbrio o princípio de funcionamento da Economia. Tal vislumbre intensivo, com todo o mérito do alcance extensivo pela mente deste economista, foi desenvolvido por seus contemporâneos a partir de seu modelo maduro proposto na terceira edição de sua obra magna. Os desenvolvimentos apresentados por Leon Walras na quarta edição, de modo inacabado, referentes a um sistema virtual de equações que determinassem o funcionamento da economia real, embora trabalhados por alguns economistas contemporâneos a ele, não terá solução econômico-matemática proposta até a década de 1930 (WALKER, 2006).

A solução do problema walrasiano de existência de equilíbrio desenvolveu-se no efervescente cenário europeu do entre-guerras, com matemáticos e economistas interessados no alcance que avanços teoréticos da matemática pura poderiam oferecer. Assim, surgem legítimos pensadores tais como Abraham Wald (1902-1950), John Von Neumann (1903-1957), Karl

Menger (1902-1985), entre outros, que debruçar-se-ão sobre o problema walrasiano enquanto aplicam economicamente o raciocínio teorético matemático na solução de problemas que, então, se interpunham entre eles e o mérito do avanço da Ciência Econômica do período. Tal fertilidade econômica estender-se-á num processo de crescente clarificação até a década de 1950, quando outros economistas matemáticos, tais como Kenneth Arrow (1921-2017), Gerard Debreu (1921-2004), Lionel Mckenzie (1919-2010), entre outros, estabelecerão sobre conhecimentos de *topologia algébrica* a solução do problema econômico da Existência do Equilíbrio Geral: em que a oferta e demanda de todos os mercados, num regime de competição perfeita, é equalizada concomitantemente à formação dos preços nestes mesmos mercados.

Neste *continuum* progressivo do conhecimento econômico do período de 1934 a 1959, muitos pesquisadores contribuíram para a determinação de avanços cumulativos nas realizações matemáticas e econômicas que culminaram nos famosos artigos do que ficou conhecido como modelo ADM, em referência a Arrow, Debreu e Mckenzie, com variações e hipóteses próprias, de modo que firmou-se entre os profissionais da área o caráter metateórico e proeminência do modelo supracitado. Pode-se estudar o Equilíbrio enquanto estável ou instável, único ou múltiplo, determinado linear ou não-linearmente, dentre outras predicações *a priori* cuja analiticidade pressupõe a Existência do Equilíbrio enquanto Equilíbrio, demonstrada por estes pensadores econômicos. Neste ínterim, os trabalhos de Brouwer e de Kakutani (KAKUTANI, 1941) em demonstrações da existência de solução por *ponto-fixo* desempenharam função crucial na determinação dos novos teoremas econômicos que seriam provados, pois não só encaixavam-se perfeitamente na sutileza que os conceitos econômicos exigiam e que a flexibilidade dos axiomas topológicos permitia como também exerceram papel determinante no percurso de compreensão qualitativa maior da realidade econômica naquele contexto.

1.1 Objeto

A presente monografia tem como objeto apresentar a nuance do raciocínio matemático por trás do desenvolvimento da demonstração da Existência do Equilíbrio Econômico Geral no efervescente período acadêmico de 1934 a 1959, constituinte do *hardcore* ortodoxo da Ciência Econômica, segundo a perspectiva de um dos seus principais argumentos, qual seja: o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani. Tal objeto, com o intuito de divulgar em língua portuguesa a possibilidade de apresentação da Teoria Econômica sob perspectiva topológica, inclui os seguintes objetivos:

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Mostrar como um resultado formal da matemática nutre-se de avanços materiais da ciência econômica e como os resultados matemáticos de teoremas do ponto-fixo implicaram a solução do problema da Existência do Equilíbrio Econômico Geral.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Contextualizar os Teoremas de Brouwer e de Kakutani para com os respectivos teoremas econômicos de Equilíbrio Geral.
2. Demonstrar o Teorema do Ponto-Fixo de Kakutani, expandindo sua demonstração e acrescentando um prólogo matemático referente ao teorema do ponto-fixo de Brouwer que esclareça e justifique sua existência enquanto generalização matemática;
3. Apresentar a possibilidade de compreensão do Equilíbrio Econômico Geral do período pela perspectiva topológica através do acesso pedagógico do estudante de graduação a uma literatura pouco abordada, porém crucial, para estudos de fronteira da área de Economia Matemática. A isto, a presente monografia, além de procurar esmiuçar os argumentos matemáticos de caráter analítico, oferece também figuras que propiciem a visualização geométrica dos resultados ao iniciante em Economia Neowalrasiana.

1.3 Motivação

Em leituras pessoais para além do ementário do presente curso de bacharelado, o graduando deparou-se com literatura sobre o tema quase exclusivamente em idioma inglês, não encontrando tal tema em textos de língua portuguesa que abordassem amplamente os argumentos e a Teoria do Equilíbrio Econômico Geral. Exceto por alguns textos pontuais e sobre questões específicas posteriores à demonstração da Existência no *softcore* da teoria econômica em português, nenhum deles o presente graduando encontrou que oferecesse às demonstrações da Existência do Equilíbrio Geral uma perspectiva topológica rigorosa e esmiuçada que permitisse a compreensão e disseminação de um dos principais resultados econômicos do século XX. A maioria dos quais faziam referência, quando existiam, de cunho crítico sem muita fundamentação matemática e com viés mais metodológico do que propriamente teorético.

1.4 Justificativa

(MCLENNAN, 2018), argumentando da limitação dos economistas à compreensão matemática de suas teorias majoritariamente através do Cálculo Infinitesimal, constituiu um argumento relevante para a decisão do presente graduando em buscar oferecer aos colegas de profissão de língua portuguesa algum material básico puro do tema com a devida apresentação de alguns modelos que, se marginalizados no decorrer das décadas passadas por suposta abstração excessiva, mas agora começando a ser desenvolvidos e explicitamente apresentados como, por exemplo, em (EVSTIGNEEV; SCHENK-HOPPÉ, 2006) e (BALASKO, 2009), então apresenta-se contexto relevante para um levantamento bibliográfico local que propicie futuras pesquisas sem preconceito e iniciáticas ao tema, que diminuam a distância para a participação nacional no movimento internacional que se apresenta em busca da solução do problema de (SMALE, 1998), de Equilíbrio Geral com Sistemas Dinâmicos. A motivação do presente trabalho, reconhecendo que pesquisa econômica não se restringe a Economia Aplicada, mas que esta se alimenta de desenvolvimentos da Economia Teorética, busca assim realizar o interesse pessoal enquanto aproximação inicial ao movimento internacional objetivo de alguns economistas matemáticos de estatura.

1.5 Metodologia

Esta monografia é de Economia Matemática. Caracterizada pela finalidade de estudo teorético de um grupo de modelos econômico-matemáticos em um período delimitado (1930 a 1950), segundo a perspectiva de um argumento específico construído concomitantemente aos modelos estudados, tem-se que este trabalho monográfico possui uma metologia, segundo sua finalidade, básica estratégica. O tema do Equilíbrio Geral é comumente apresentado restringindo-se aos axiomas dos modelos ADM utilizados em Microeconomia. Devido à abordagem topológica do tema proposta nessa monografia, não restrita apenas aos axiomas, utilizar-se da proposta de demonstração e aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, tem-se a finalidade secundária de abordagem metodológica da matemática, de modo que se caracterize a aplicação econômico-teorética em diversos modelos segundo a possibilidade de uma perspectiva comum, expandindo portanto o horizonte de aplicação, analogamente ao próprio argumento, no conjunto de modelos segundo o próprio Teorema de Kakutani. Os objetivos supracitados da presente monografia delimitam sua análise enquanto proeminentemente descritiva, de modo que os procedimentos mormente utilizados em seu desenvolvimento se dão por bibliografia especializada.

1.6 Estrutura do Trabalho

Esta monografia estrutura-se em quatro capítulos, além desta introdução:

- No primeiro capítulo, verificar-se-á, a constituição do programa de pesquisa neowalrasiano, no qual os formuladores da teoria moderna do Equilíbrio Geral estavam inseridos, compreendendo o desenvolvimento do problema de determinação dos preços que equalizem demanda e oferta em mercados sob regime de competição perfeita;

- No segundo capítulo, apresenta-se a contextualização matemática aos teoremas do ponto-fixo de Brouwer e Kakutani

- No terceiro capítulo, propõe-se demonstrar o Teorema de Kakutani, de modo a esmiuçar a dinâmica interna deste resultado com o intuito de pavimentar o caminho de compreensão mais profundo dos resultados em Equilíbrio Geral, segundo sua perspectiva;

- Conclui-se a presente monografia, verificar-se-á a realização dos objetivos propostos e exposição das considerações finais.

2 O PROGRAMA DE PESQUISA NEOWALRASIANO

Pode-se reconhecer em (WEINTRAUB, 1993) a participação dos seguintes pesquisadores-chave no processo histórico de construção do que viria a ser conhecido pela epítome "Escola Neowalrasiana", termo em referência a Walras e à solução de seu problema de Equilíbrio Econômico Geral; são eles: Abraham Wald, Karl Schlesinger, John Von Neumann, Tjaling Koopmans, Lionel McKenzie, Kenneth Arrow, Gerard Debreu, Hukukane Nikaido e David Gale. O problema de solução do Equilíbrio Econômico Geral, que vinha desde sua postulação por Leon Walras em seu *Elementos de Economia Política Pura*, encontrou nestes economistas matemáticos da primeira metade do século XX um terreno fértil para aplicação de novas teorias e instrumentos matemáticos que culminariam nas demonstrações das décadas de 1930 a 50. O ambiente no qual tais soluções começaram a ser trabalhadas é a Europa do entre-guerras, em que tais pesquisadores encontravam no cenário cultural e cientificamente efervescente da década de 1930 ambiente favorável ao desenvolvimento da aplicação de novas teorias matemáticas em economia para, em seguida, a emigração de cérebros após a anexação da Áustria deslocar tal epicentro aos Estados Unidos. De todo o ambiente, pode-se reconhecer no primeiro momento o Colóquio de Vienna, sob coordenação de Karl Menger, como o mais destacado dos locais em que tal empreendimento se desenrolou. Após a emigração devida à Segunda Grande Guerra, passa-se à *Cowles Comission* e *Naval Office* americanos.

Dos pesquisadores-chave supracitados, vislumbra-se algum padrão nos modelos com foco nos conhecimentos topológicos para análise linear. Inicialmente, os modelos utilizavam-se de Cálculo Infinitesimal quando dedicados a estudo de relações de produção e equilíbrios em sistema produtivo - a isto soma-se o artigo seminal de Von Neumann em 1928, fundador aliás do campo de pesquisa em Teoria dos Jogos e no qual delineia-se abordagens ao problema que ecoarão em seu modelo posterior de 1937 sobre Equilíbrio Econômico. Num segundo estágio de desenvolvimento dos modelos, outra percepção que subjaz as diferentes abordagens é a construção de modelos econômicos focados não mais apenas em produção, mas sob a categoria mais abstrata de trocas econômicas. Neste cenário pendular de desenvolvimento do programa de pesquisa, Wald, Von Neumann, Koopmans e Gale encontram-se entre aqueles focados em solução de problemas produtivos, enquanto (também) Wald, McKenzie, Arrow e Debreu debruçaram-se sobre problemas mais gerais que incluíam trocas econômicas.

Outros economistas e matemáticos também participaram desse movimento, tais como Lawrence Klein (1920-2013), Oskar Lange (1904-1965), Irving Fisher (1867-1947), Harold Hotelling (1895-1973), Leonid Kantorovich (1912-1986), dentre outros, mas conforme bem verificou (WEINTRAUB, 1993), as maiores realizações concentravam-se no primeiro grupo.

Há que se ressaltar nesse ínterim que o Seminário em *Activity Analysis* organizado por Koopmans em 1951 desempenhou grande papel concentrador dos esforços e reunião de pesquisadores em torno do estudo de assuntos convergentes ao movimento neowalrasiano, mas a proeminência dos demais institutos foi mais determinante e congruente com as grandes realizações do período.

O predicativo walrasiano desse programa de pesquisa, embora refira-se a uma das primeiras mentes que debruçaram-se sobre o tema do Equilíbrio Geral, corresponde nos relatos históricos à solução matemática do problema econômico segundo a explicitação por Gustav Cassel (1866-1945), economista sueco e antecessor de Knut Wicksell (1851-1926), que tinha seu livro *Theory of Social Economy* (Teoria de Economia Social) como referência dos estudos em Economia na região germanófona do período que os pesquisadores-chave iniciais do neowalrasianismo supracitados defrontaram-se com a matéria econômica.

Outros grandes economistas do período já vinham num percurso semelhante de exposição matemática e solução com instrumentos avançados de problemas econômicos, dentre eles destacam-se Irving Fisher, Paul Samuelson e John Hicks. O primeiro deparou-se com o problema do Equilíbrio Econômico Geral já em sua tese de doutorado em 1898; o segundo desempenhou individualmente um grande *pathbreaking* com sua abordagem por analogia à termodinâmica na economia, enquanto o terceiro, profícuo economista que estudou a matéria econômica em várias perspectivas diferentes da profissão, destacou-se por seu manifesto à pluralização e enfoque matematicamente avançado aos problemas econômcios, mormente no Prefácio de seu clássico *Valor e Capital*, que fornecessem maior clareza no tratamento do assunto econômico frente à Revolução Keynesiana que a Ciência Econômica vivia no período pós Crise Econômica de 1929.

Enquanto a Revolução Marginalista representou um período academicamente fértil de solução de algumas aporias dos Economistas Clássicos, a matematização encontrava-se restrita, com algumas exceções, a noções geométricas e de analogia newtoniana do Cálculo Infinitesimal. Todavia, na Revolução Neowalrasiana nota-se a passagem da matemática, principalmente a matemática avançada do período, de contrarregra para protagonista.

O presente capítulo se dedica a compreender os principais modelos da Revolução Neowalrasiana dedicados à demonstração do Equilíbrio Econômico Geral, a partir da exposição realizada por (WEINTRAUB, 1993), mas focada não na construção histórica desse programa de pesquisa, que o presente texto toma como dada pela bibliografia, mas dedicada a compreender algumas nuances teoréticas que justifiquem e esclareçam o seu desenvolvimento concomitante a alguns importantes Teoremas do Ponto-Fixo em Topologia, como o de Kakutani.

2.1 Cassel e Wald

Se a Cassel pode ser creditado o mérito de estabelecer o problema econômico sobre o qual os economistas neowalrasianos se debruçarão, Wald pode ser meritoriamente considerado como o primeiro a oferecer não apenas uma solução, mas duas por meio de seus modelos de produção. A exposição das ideias de Cassel e Schlesinger contribui para compreender a apresentação do problema que os demais modelos se dedicarão.

2.1.1 O modelo Walras-Cassel

O livro-texto de Cassel *Theory of Social Economy*, que naquele tempo era dos mais utilizados pelos pesquisadores germanófonos, apresenta a seguinte configuração do problema:

Definição 1 *Sejam r os fatores de produção e R suas quantidades disponíveis; n bens produzidos e a_{ij} os coeficientes técnicos da produção do bem i utilizando os fatores de produção j. Dados os preços q dos fatores r e os preços p dos produtos n, tem-se:*

$$a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + ... + a_{nr}q_r = p_n \tag{2.1}$$

Onde os preços q dos fatores r são necessariamente positivos porque $a_{ij} > 0$, determinando os preços p das commodities n enquanto não negativos.

Definição 2 *Sejam os preços p_n definidos. Então, pode-se calcular a demanda D de cada commodity n em função de seus preços p.*

$$D_n = F_n(p_1, ..., p_n) \tag{2.2}$$

Definição 3 (Princípio da Escassez de Cassel) *Em equilíbrio de preços, a demanda D pela commodity n é satisfeita pela oferta S:*

$$D_n = S_n \tag{2.3}$$

Definição 4 *Conhecidas as quantidades ofertadas em cada período S_n da commodity n, então as quantidades demandadas R dos fatores de produção r são:*

$$R_r = a_{1r}S_1 + a_{2r}S_2 + ... + a_{nr}S_n \tag{2.4}$$

Proposição 1 *Sejam os preços p dos produtos n determinados por (2.1) e o conjunto de preço q dos fatores r dados. Então tem-se a solução de (2.2) e de (2.3). D determina S, segundo o princípio da escassez, e alcança-se o equilíbrio pela solução do sistema via (2.4).*

Algumas questões aparecem , segundo (WEINTRAUB, 1993), ao se observar o sistema de equilíbrio econômico de Cassel:

- Embora exista o símbolo r para denominar os fatores, a para seu coeficiente tecnológico de utilização na produção de n, ele estabelece o símbolo D para demanda agregada do bem n e S para oferta agregada de n, mas não fornece um símbolo específico para a quantidade agregada demandada dos fatores r. Diante disso, a solução do sistema recai sobre as quantidades ofertadas disponíveis R.

- O Princípio da Escassez se assemelha ao de "Equilíbrio de Mercado" quando postula que a demanda D deve ser satisfeita pela oferta S.
- A construção do sistema de Cassel não usa explícitamente do conceito de utilidade e sua construção aproxima-se do que posteriormente se desenvolverá de modo emergente com Wald e outros neowalrasianos.
- Cassel propôs a solução por uma cadeia causal entre o sistema de equações, mas não expôs que o equilíbrio exista pela mera igualdade de equações e incógnitas [1].

2.1.2 O modelo de Schlesinger

Definição 5 *Sejam m os insumos e n os produtos. Para um produção S_i em que s_i é sua quantidade, seja r_i as quantidades disponíveis do insumo R_i. Por fim, seja os preços dos insumos ρ_i, bem como σ_i os preços dos produtos. Então:*

$$r_m = a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + ... + a_{mn}s_n \tag{2.5}$$

$$\sigma_n = a_{1n}\rho_1 + a_{2n}\rho_2 + ... + a_{mn}\rho_m \tag{2.6}$$

$$\sigma_n = f_n(s_1, s_2, ..., s_n) \tag{2.7}$$

Para insumos escassos, seja: $r_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + ... + a_{in}s_n$, em que $\rho_i > 0$

E para bens livres: $r_j \leq a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + ... + a_{in}s_n$, sendo $\rho_j = 0$.

Donde substitui-se as m primeiras equações por:

$$r_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + ... + a_{in}s_n + u_i \tag{2.8}$$

Embora Cassel tenha escrito as relações de demanda D_i enquanto funções dos preços p, nota-se que Schlesinger inverte a relação: os preços demandados são funções das quantidades.

2.1.3 Os modelos de Wald

Três foram os modelos de Abraham Wald. No primeiro, ele dialoga com Cassel, fornecendo-lhe uma demonstração da existência do Equilíbrio Econômico Geral produtivo por meio de uma

[1] Embora Cassel tenha exposto que as funções F_i fossem homógenas de grau zero nos preços e na renda, de modo que a mera contagem produziria uma resposta errada para a existência de um equilíbrio de preços relativos.

estratégia de refutar a hipótese da não-existência de solução. Em seu segundo modelo, Wald inverte a relação entre fatores e commodities, de modo que ao utilizar-se da abordagem de Schlesinger, este segundo modelo forneça uma prova alternativa da existência do equilíbrio econômico geral, também produtivo. Por último, em seu terceiro modelo, Abraham Wald dedicou-se a abordar o problema do equilíbrio econômico geral com trocas. Neste último, verificar-se-á a perda de seus resultados por problemas históricos e a realização aproximada, se não generalizada, de seu intento nos modelos de (MCKENZIE, 1954) e (ARROW; DEBREU, 1954).

2.1.3.1 Equilíbrio de Cassel-Wald

Utilizando-se das formulações de Cassel e de Schlesinger, Abraham Wald teve o caminho para sua primeira demonstração de existência do equilíbrio, publicado em 1934 sob o título *Über die eindeitige positive Lösbarkeit der neuen Produktions-gleichungen (I)* (" Sobre a solvabilidade Não Negativa Única das Novas Equações de Produção, Parte 1"). Segue sua descrição conforme (WEINTRAUB, 1993) e (WALD, 1951).

Definição 6 *Seja r_i e a_{ij} quantidades dadas e as funções f_i conhecidas. As quantidades u_i, ρ_i, s_j e σ_j são desconhecidas.*

O seguinte sistema de equações, definido conforme o modelo de Schlesinger:

$$\begin{cases} r_i = \sum_1^n a_{ij}s_j + u_i, \text{ onde } i = 1, ..., m \\ \sigma_j = \sum_1^m a_{ij}\rho_i, \text{ para } j = 1, ..., n \end{cases}$$

possui um conjunto de solução univariada nas variáveis u_i, s_j, σ_j quando as seguintes condições são cumpridas:

1. $r_i \geq 0$, para i = 1,...,m
2. $a_{ij} \geq 0$, para i = 1,...,m;j=1,...,n
3. Existe ao menos um i (i = 1,...,m) para cada j (j = 1,...,n) em que $a_{ij} \neq 0$.
4. A função $f_{j(s_j)}$ é definida contínua, não negativa e monótona estritamente decrescente para todo valor positivo de s_j. Assim, $s_i^{'} < s_j$ e $f_j(s_j^{'}) > f_j(s_j)$. O $\lim_{sj=0} f_j(s_j) = \infty$ quando as seguintes restrições de não-negatividade sejam mantidas:
   a) $s_j \geq 0$ para j = 1,...,n
   b) $\sigma_j \geq 0$ para j = 1,...,n
   c) $\rho_i \geq 0$ para i = 1,...,m
   d) $u_i \geq 0$ para i = 1,...,m
   e) Para $u_i > 0$, então $\rho_i = 0$

Algumas propriedades restritivas empregadas por Wald é a demanda do bem j depender apenas de sua quantidade, isto implica em uma curva de demanda com declividade negativa. Além disso, Wald emprega embrionariamente a noção de comoddity composta que posteriormente será conceituada por John Hicks e Paul Samuelson.

2.1.3.2 Equilíbrio de Schlesinger-Wald

Na edição seguinte da $Ergebnisse$ do Círculo de Viena, ainda em 1934, Abraham Wald publicará outro artigo tratando da existência de equilíbrio econômico geral. Neste artigo, sob o título de *Über the Produtktiongleichungen der ökonomischen Wertlehre (II)* (" Sobre as Equações de Produção da Teoria do Valor Econômico II") , ele generalizará o modelo anterior, substituindo as funções demanda de seu artigo anterior pelas funções de demanda do mercado $\sigma_j = f_j(s_1, ..., s_n)$.

A condição 4 do modelo anterior, referente à monotonicidade de $f_j(s_j)$, é substituída pela seguinte:

Seja $\Delta_{s_1}, ..., \Delta_{s_n}$ os n elementos dentre os quais ao menos um seja < 0. E seja $\sum_j^n \sigma_j' \Delta_{s_j} < 0$, então tem-se $\sum_{j=1}^n \sigma_j' \Delta_{s_j} < 0$, tal que $\sigma_j' = f_j(s_1 + \Delta_{s_1}, ..., s_n + \Delta_{s_n})$ (j = 1, 2, ... , n).

Dentre as hipóteses, sobressai a (6), na qual Wald declara: Seja w qualquer número da economia que, quando os preços são $\sigma_1, ..., \sigma_n$ demandas s_{w1} de $S_1, ...$, e s_{wn} unidades de S_n. A quantia s_j - o número de unidades S_j produzidas em equilíbrio - é a soma das quantias s_{wj} para todos os membros da economia, W....

(6w) se os preços $\sigma_1, ..., \sigma_n$ individuo w demanda $s_{w1}, ..., s_{wn}$, e com preços $\sigma_1', ..., \sigma_n'$ ele demanda $s_{w1} + \Delta s_{w1}, ..., s_{wn} + \Delta s_{wn}$ onde ao menos um dos $\Delta s_{wj} < 0$ e onde $\sum_1^n \sigma_j \Delta s_{wj} < 0$, então $\sum_1^n \sigma_j' \Delta s_{wj} < 0$.

2.1.3.3 A perda do Equilíbrio de Wald

Em Economia, o uso de Teoremas do Ponto Fixo para obter teoricamente a existência de um resultado que permitisse a explicitação das respectivas propriedades foi primeiramente utilizado por Abraham Wald em 1935 no Círculo Matemático de Viena, com o intuito de obter a prova da existência de equilíbrio em uma Economia de Trocas e, portanto, generalizando dois trabalhos anteriores seus de equilíbrio em Sistemas Produtivos. Este trabalho, infelizmente devido à anexação da Áustria pelo regime nazista e ao ambiente de antissemitismo latente, não teve sua publicação permitida, já que a proeminência dos trabalhos de Wald no Círculo de Viena não vinha sendo visto com bons olhos pelo ambiente universitário daquele momento (então com antissemitismo crescente); assim seus resultados foram retidos apenas nas mentes pelos demais participantes do grupo e seu manuscrito com publicação prometida para a próxima edição foi perdido durante sua imigração para os Estados Unidos. Seu empreendimento se desenvolveu através de seu contato com Oskar Morgenstern e Schlesinger durante aulas de matemática ministradas por ele a pedido de Karl Menger. O seu uso de ponto fixo para o problema maior de uma Economia de Trocas é asseverado pelas correspondências entre Menger e Von Neumann (DÜPPE; WEINTRAUB, 2016). [2]

2.2 Modelo de Von Neumann

John von Neumann, paralelamente a Abraham Wald, em seu artigo de 1937 sobre crescimento econômico (NEUMANN, 1971), apresentado em Princeton e posteriomente publicado nos Cadernos do Círculo Matemático de Viena de Karl Menger, evidenciou que em seu modelo de crescimento econômico a taxa de crescimento da Economia seria constante quando correspondesse ao estoque de capital acumulado entre períodos, com o preço do produto referente a um acréscimo marginal de insumo igual a zero; esta taxa de crescimento constante corresponde, por sua vez, a um ponto-fixo que soluciona de modo dual a taxa de juros da economia. Este resultado de Von Neumann trata de uma aplicação direta de sua inovação matemática da obtenção de uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (o qual terá sua essência demonstrada alternativamente por (KAKUTANI, 1941) em seu Teorema 1); tal generalização foi publicada por Von Neumann no mesmo artigo.

Definição 7 *Sejam os bens G_n, onde n é o número de bens G produzidos na economia. Além disso, sejam os processos P_m tal que m seja a multiplicidade de processos produtivos P. Para um coeficiente a_{ij} de bens G_j consumidos na produção de b_{ij} bens G_j, tem-se, para processos lineares:*

$$P_i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} b_{ij} G_j, \textit{ para } a_{ij} + b_{ij} \geq 0; \tag{2.9}$$

Algumas hipóteses incluídas para a solvabilidade desta equação são que os retornos sejam constantes à escala, que os fatores naturais de produção sejam crescentes ilimitadamente e que o consumo da força de trabalho de empregados e empregadores esteja incluída no coeficiente a_{ij}. Além disso, $a_{ij} + b_{ij} \geq 0$ garante a unidade global da produção, evitando sua divisão em subeconomias.

Definição 8 *Sejam x_i a intensidade do i-ésimo processo produtivo, em que $x_i \geq 0$, e y_i o preço do bem j, tal que $y_i \geq 0$. Além disso, sejam o crescimento econômico à taxa α e o os juros β. As*

[2] (WEINTRAUB, 1993) apresenta, por sua correspondência com Kenneth Arrow, a hipótese de que Wald não poderia ter resolvido o problema da solução de equilíbrio de trocas com os mesmos métodos utilizados anteriormente, de modo que o uso necessário de teoremas modernos de matemática asseverasse a possibilidade do uso de teoremas de ponto-fixo. Tal hipótese confirmou-se em (DÜPPE; WEINTRAUB, 2014) e (DÜPPE; WEINTRAUB, 2016) pelo acesso à correspondência entre Von Neumann e Menger. (DÜPPE; WEINTRAUB, 2014) apresenta ainda a afirmação de Arrow de que o modelo correspondente à abordagem de Wald teria sido o modelo de (MCKENZIE, 1954).

equações de funcionamento da economia são:

$$\alpha \sum_{1}^{m} a_{ij}x_i \leq \sum_{1}^{m} b_{ij}x_i, \textit{ tal que } \sum_{1}^{m} x_i > 0 \tag{2.10}$$

$$\beta \sum_{1}^{n} a_{ij}y_i \geq \sum_{1}^{n} b_{ij}y_j, \textit{ em que } \sum_{1}^{n} y_j > 0 \tag{2.11}$$

Observação 1 $x_i \geq 0$ *e* $y_i \geq 0$. *Então,* $y_i <$ *para 2.10 e* $x_i >$*, para 2.11* $>$*, são iguais a zero.*

Teorema 1 *A existência do equilíbrio se dá em 2.9 somente se o conjunto* X *das* m *possibilidades produtivas de* P_i *e* Y*, dos* n *preços dos bens* G_j*, tiver um subconjunto em que este assuma seu menor valor* y *e seu maior valor* x*.*

Em (NEUMANN, 1971), mostra-se, por sua generalização do Teorema de Brouwer, que em equilíbrio $\alpha = \beta = \Phi(X, Y)$.[3] Além disso, os conjuntos X e Y constituem, devido sua homogeneidade, simplexos de dimensão m e n, respectivamente. O subconjunto que soluciona o modelo, portanto, repousa em $\mathbb{R}^{\mathrm{m+n}}$. [4]

2.3 Modelo de McKenzie

Inicialmente apresentando o enquadramento do modelo de Frank Graham nas condições de demanda do modelo de Cassel-Wald, (MCKENZIE, 1954), embora considerasse as condições produtivas não se encontrarem, forneceu uma prova da existência de equilíbrio no modelo de Graham onde as funções demanda não fossem tão restritivas quanto às de Wald. Para isso, McKenzie recorreu à ideia essencial do modelo de Von Neumann de Ponto Fixo e à fronteira eficiente do conjunto convexo de produção factível de Tjalling Koopmans.

Definição 9 *Sejam os bens primários* A_{pri} *produzidos pela oferta de trabalho de* n *países e os bens finais* A_{fin}*, constituído por* k *bens finais, produzidos por processos tecnológicos de transformação linear.*

Os bens intermediários não são explicitados, mas McKenzie considera, baseando-se em Graham, que, cada país possuindo distintos recursos de produção, os processos produtivos transformam o trabalho em seus respectivos bens finais.

Definição 10 *Seja* a_i^j *a quantidade do i-ésimo bem produzido por uma unidade de trabalho do j-ésimo país.* A_{fin}^j *é a matriz diagonal formada pelas* k *linhas de* A^j *e* A_{pri}^j *é a (k+1)-ésima linha de* A^j.

[3] Este resultado, conforme alternativamente demonstrado por (KAKUTANI, 1941), será exposto no item 8

[4] Tal raciocínio será desenvolvido no item 4.2

Definição 11 *Sejam x o nível não-negativo de atividade na produção de n bens e η a oferta de trabalho disponível. Seja ainda y_{fin} os produtos finais produzidos por tranformação linear e y_{pri} o trabalho necessário; w é a quantidade de trabalho, sendo w^j_{pri} a quantidade de trabalho ofertada pelos consumidores, enquanto w^i_{fin} é a quantidade do i-ésimo bem final demandada. ρ são os preços, sendo ρ_{pri} o preço do trabalho e ρ_{fin} o preço do bem final.*

O sistema de produção será definido pelas equações:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_{fin} \\ A_{pri} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_{fin} \\ y_{pri} \end{bmatrix} \\ x \geq 0 \\ y_{pri} \geq -\eta < 0 \end{cases}$$

As funções demanda serão definidas, por sua vez, segundo as equações:

$$\begin{cases} w_{jpri} = -\eta_j \ , \ \rho_{jpri} > 0 \ \ (j = 1, ..., n) \\ w_{ifin} = b_i \frac{r}{\rho_{ifin}} \ \ (b_i > 0, \sum b_i = 1, i = 1, ..., k) \\ r = \rho_{fin} y_{fin} \ , \ \ \rho_{ifin} > 0 \end{cases}$$

Observação 2 *Considera-se $a^j_i > 0$, de modo que cada subconjunto A^j_{fin} em A_{fin} é positivo, sendo cada país capaz de produzir cada bem. O elemento r, por sua vez, é a renda mundial e b_i é a proporção da renda mundial direcionada ao i-ésimo bem final independente de seu preço, sendo as elasticidades de preço e de renda da demanda mundial unitárias. A oferta de trabalho, por sua vez, é constante a preços positivos.*

Definição 12 *Sejam os conjuntos X dos níveis de atividade x que satisfaçam o sistema de equações de produção e Y dos elementos $y = A_{fin}x$. X e Y são fechados, limitados e convexos.*

Definição 13 *A hipótese de linearidade do modelo envolve a multiplicação do insumo por $\alpha \geq 0$, o qual multiplicará este produto pelo mesmo α independente do nível das outras atividades.*

Definição 14 *$z \in Y$ é ponto eficiente enquanto $z + w \notin Y$ para $w \geq 0$. $z \in Y$ e $\alpha z \notin Y$ para $\alpha > 1$.*

O equilíbrio então deve corresponder ao preço ρ e a y factível tal que:

- Satisfaça as funções demanda;

- Não tenha oportunidade de lucros crescentes:

$$\rho A_i^j \leq 0 \text{ e } \rho A_i^j = 0 \text{ se } x_i^j > 0 \tag{2.12}$$

McKenzie toma ρ no simplexo fechado unitário S e considerando todo ρ mapeado linearmente em $y \in Y$, $r(\rho) = max\, \rho z$, para $z \in Y$. Então a interseção do raio desde a origem, contendo w, com o conjunto de produtos extremos de Y é $h(w) = \alpha w$, $\alpha < 1$, $\alpha w \in Y$, $kw \notin Y$ para $k > \alpha$ (em que $k = \Delta r/r > -1$ e $p + \Delta p = kp$).

Seja $g(y) = K_y$, em que K_y é a interceção de ys mapeados de ρ em S. g é semi-contínua superiormente. O domínio de g é fechado, limitado e convexo, enquanto K_y é um conjunto convexo. O mapeamento composto se dará com $F = g(h(f^*))$. O domínio de F repousa em S e sua imagem é K_y, um compacto convexo de S. Tais condições enquadram-se no Teorema do Ponto-Fixo de Kakutani, tal que $\rho \in K_y$. ρ^* é ponto-fixo, então $y^* = h(f(\rho^*))$ e (ρ^*, y^*) é um equilíbrio competitivo.

Teorema 2 (Teorema do Equilíbrio de McKenzie) *Todo modelo de Graham possui um equilíbrio competitivo.*

Vale ressaltar que McKenzie, na seção final de seu artigo, observa a manutenção da existência de equilíbrio demonstrada frente a possíveis flexibilizações de algumas hipóteses do modelo.

2.4 Modelo Arrow & Debreu

O artigo seminal de (ARROW; DEBREU, 1954) oferece um modelo no qual a aparente separação entre equilíbrio produtivo e equilíbrio de trocas em (WALD, 1951) seja superada mediante uma economia integrada de produção e consumo que considere o fluxo circular da renda. Introduzem a solução, partindo dos modelos de Wald, focados na existência do equilíbrio, independentemente de sua estabilidade e unicidade. Considerando a Economia numa perspectiva abstrata, propunham-se abordar a questão da existência de equilíbrio em uma economia cuja noção fosse mais geral que o conceito de jogo.

Definição 15 *Seja l o número de commodities e a h o número das diferentes commodities, para h = 1,...,l.*

Definição 16 *Sejam n unidades de produção e j as diferentes unidades produtivas. Os diferentes planos de produção y_j no conjunto Y_j possuem a produção agregada dada por $Y = \sum_1^n Y_j$. O quadrante não-negativo Ω em $\mathbb{R}^l$ é dado por $\Omega = \{x | x \in \mathbb{R}^l, x \geq 0\}$.*

Para insumos tratados como componentes negativos, os elementos de Y representam todos os planos de produção. Então as hipóteses a seguir sobre o conjunto Y_j podem ser feitas:

I.a. Y_j é um subconjunto convexo e fechado de $\mathbb{R}^l$ contendo 0, para $j = 1, ..., n$

I.b. Não há produto sem que exista algum insumo: $Y \cap \Omega = 0$

I.c. Trabalho não pode ser produzido, então $-y \notin Y$ e $Y \cap (-Y) = 0$

Definição 17 *Sendo ρ o preço, o equilíbrio competitivo (ρ^*, y^*) ocorre apenas quando y_j^* maximiza $\rho^* y_j$ no conjunto Y_j, para cada j.*

II O conjunto X_i de consumo disponível ao indivíduo i (i=1,...,m) é um subconjunto convexo, fechado e limitado de $\mathbb{R}^l$.

III.a O indicador de utilidade u_i para o indivíduo i é uma função contínua em X_i, $u_i(x_i)$.

III.b Para todo $x_i \in X_i$ existe um $x =_i^{'} \in X_i$ tal que $u_i(x_i^{'}) > u_i(x_i)$.

III.c Se $u_i(x_i) > u_i(x_i^{'})$ e $0 < t < 1$, então $u_i[tx_i + (1-t)x_i^{'}] > u_i(x_i^{'})$.

Supõe-se que todo indivíduo possui dotação inicial e detêm as n unidades de produção j.

A i-ésima unidade consumida é dotada de um vetor κ_i de dotação inicial das diferentes commodities disponíveis e um contrato para compartilhar a parcela α_{ij} do lucro da j-ésima unidade de produção para cada j.

IV.a $\kappa_i \in \mathbb{R}^l$, para $x_i \in X_i$, $x_i < \kappa_i$.

IV.b Para todo i, j, $\alpha_{ij} \geq 0$; para todo j, $\sum_1^m \alpha_{ij} = 1$.

Definição 18 *O equilíbrio x^* é ótimo para o i-ésimo consumidor, assim como para os demais consumidores e aos lucros das unidades produtivas. Assim:*

x^* maximiza $u_i(x_i)$ no conjunto $\{x_i \,|\, x_i \in X_i\,,\, p_i^* x_i \leq \; p^* \kappa_i + \sum_j \alpha_{ij} \rho^* y_j^*\}$

Os preços, então, pertencentes ao n-simplexo P:

Definição 19 *A definição dos preços e o significado do equilíbrio em qualquer mercado é:*

$$p^* \in P = \{p \,|\, p \in \mathbb{R}^l, p \geq 0, \textstyle\sum_1^l p_h = 1\}$$

em que $x = \sum_i x_i$, $y = \sum_j y_j$, $\kappa = \sum_i \kappa_i$ e $z = x - y - \kappa$

Definição 20 (Equilíbrio de Mercado) *O preço de uma commodity aumenta se a demanda excede a oferta e cai se a oferta excede a demanda. O equilíbrio é incompatível com o excesso de demanda em qualquer mercado:*

$$z^* \leq 0\,,\, p^* z^* = 0$$

Teorema 3 (Teorema do Equilíbrio de Arrow-Debreu) *Para qualquer sistema de mercado satisfazendo as hipóteses **I** - **IV**, existe um equilíbrio competitivo.*

Em seguida, (ARROW; DEBREU, 1954) verificam a existência do equilíbrio para sua noção de Economias Abstratas e demonstram também a validade de sua demonstração para o caso de uma flexibilização da hipótese IV.

3 PRELÚDIO MATEMÁTICO

O artigo seminal de Shizuo Kakutani foi publicado em 1941, enquanto afiliado ao *Institute for Advanced Study* de Princeton, no *Duke Mathematical Journal*. Chama-se *A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem* (Uma Generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) e propôs expandir o escopo de aplicação do teorema de Brouwer em algumas de suas suposições, as quais são:

- O mapeamento ponto-a-ponto é generalizado para mapeamento ponto-a-conjunto;
- O conceito de continuidade é generalizado para o de semi-continuidade superior.

Estes tópicos, embora cada um constitua-se numa generalização matemática, juntos eles conferem aos teoremas expostos no artigo de Kakutani um resultado tão forte quanto o exposto por Brouwer, representando considerável salto de conhecimento na determinação de soluções para problemas consideravelmente mais gerais que aqueles aos quais o teorema do ponto fixo de Brouwer se aplica.

Por outro lado, na introdução de seu artigo, Kakutani expõe a equivalência do núcleo de seus dois últimos teoremas com os resultados já expostos por John Von Neumann em artigos anteriores, um de 1928 sobre Teoria dos Jogos, no qual jogos de duas pessoas com soma zero possuem um equilíbrio em estratégias mistas e outro de 1937 em que fornece uma demonstração do equilíbrio geral em uma economia com crescimento balanceado. Sua novidade constava numa demonstração fundamentada em seu primeiro teorema no mesmo artigo que, por sua vez, utilizava-se de topologia algébrica (portanto diferente do exposto por Von Neumann em 1928 que utilizou de Integral em Espaço Euclidiano e semelhante ao artigo de 1937 que também utilizou de simplexos), aderindo ao seu resultado vantagens qualitativas que permitiriam pavimentar o caminho para trabalhos posteriores, tanto em Economia Matemática quanto em Teoria dos Jogos.

O artigo, assim, constitui-se de três teoremas, nos quais Kakutani:

1. no primeiro expõe a generalização das suposições de continuidade e mapeamento ponto-a-ponto em Brouwer para semi-continuidade superior e mapeamento ponto-conjunto, respectivamente;
2. no segundo teorema há a aplicação de seu primeiro teorema em espaço euclidiano com uso de conjuntos fechados e limitados arbitrários; em retração;

3. no seu terceiro teorema ele demonstra com seus resultados anteriores o Teorema Minimax. [1]

Ademais, entre o primeiro e o segundo Teorema, Kakutani expõe um Corolário com a demonstração da equivalência de seu primeiro resultado para mapeamentos ponto-conjunto com semi-continuidade superior para conjuntos convexos, fechados e limitados arbitrários. Assim, percebe-se que Kakutani, em um curto artigo de apenas três páginas, dialoga no primeiro Teorema com Brouwer, no segundo com Von Neumann (então seu colega no *Institute for Advanced Study*) de Princeton e, no terceiro, fornece uma prova alternativa mais econômica do Teorema Minimax, também de Von Neumann.

A recepção de seus resultados pela comunidade científica foi muito frutífera, tendo em vista que se tratava de um texto em inglês publicado em território americano (diferentemente de teoremas de ponto fixo de outros matemáticos que foram publicados anteriormente em alemão e na Europa: Brouwer publicou oito artigos desenvolvendo o método de aproximação simplicial e o seu resultado de ponto fixo, sendo o último sob o título *Beweis des ebenen Translationssatzes* e Von Neumann *Zur Theorie der Gesellschafsspiele*), isto permitiu ao resultado de Kakutani alcançar um público acadêmico bastante pujante em avanços científicos naquele contexto frente à situação européia do período.

Estes resultados de Kakutani, serviram de inspiração para realizações posteriores obtidas em Economia Matemática - principalmente (ARROW; DEBREU, 1954) e (MCKENZIE, 1954) em seus teoremas de equilíbrio geral - bem como em Teoria dos Jogos, notadamente John Forbes Nash Jr em jogos de n-pessoas com soma zero.

O presente capítulo desenvolve-se, principalmente, a partir de (NIKAIDO, 1960), (MUNKRES, 2018) e (HATCHER, 2002).

3.1 Teorema de Brouwer

Esta seção dedica-se a discorrer sobre o teorema de Brouwer, alguns conceitos cuja compreensão auxiliará no seu entendimento e, por conseguinte, também do Teorema de Kakutani. São estes: mapeamento ponto-a-ponto, conjunto fechado e simplexo. Ao final, disponibiliza-se uma demonstração combinatorial deste teorema.

3.1.1 Mapeamento - Parte 1

Definição 21 (Função) *Uma regra $f : X \longrightarrow Y$, em que cada elemento $x \in X$ é associado a um único $y = f(x) \in Y$ é denominada uma função. O conjunto X é chamado domínio de f e Y seu contradomínio.*

[1] Embora Economia Matemática e Teoria dos Jogos possuam resultados semelhantes em alguns aspectos, o presente trabalho não aprofundará o Teorema 3 de Kakutani para MiniMax e, portanto, não tratará de Teoria dos Jogos

Uma função pode ser classificada em injetora, sobrejetora e bijetora. Denomina-se função injetora quando quaisquer dois elementos $x \neq y \in X$ tem-se $f(x) \neq f(y)$. Por sua vez, uma função é sobrejetora quando o conjunto imagem é igual ao contradomínio. Resta dizer que uma função é bijetora quando os critérios de injetora e sobrejetora são cumpridos simultaneamente. Diferente de função, o conceito de mapeamento é uma generalização desse conceito.

Definição 22 (Mapeamento) *Um mapeamento φ entre dois conjuntos X e Y é uma regra $\varphi : X \longrightarrow Y$, que a cada $x \in X$ associa um elemento $y \in Y$.*

Nota-se que na definição de mapeamento não há a necessidade de que para cada x exista um único elemento y associado; desse modo apresenta-se preliminarmente o conceito de multivaloração ou ponto-a-conjunto.

Com o intuito de obter maior clareza de exposição, diz-se (segundo (KOLMOGOROV; FOMIN, 1970)) que uma função mapeia X **em** Y quando $f(X) \subset Y$ e mapeia-se **em todo** se $f(X) = Y$, portanto se houver a propriedade sobrejetora presente.

3.1.2 Norma e Métrica em $\mathbb{R}^n$

Definição 23 (Norma) *A norma euclidiana do vetor $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definida pelo número real $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.*

Definição 24 (Norma do máximo) *Define-se a norma do máximo para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ como $\|x\|_{max} = \{|x_1|, ..., |x_n|\}$.*

Definição 25 (Norma da Soma) *A norma da soma é definida para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ por $\|x\|_s = |x_1| + ... + |x_n|$.*

Observação 3 *Veja que para um ponto $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, com um índice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tem-se que:*

$$\|x\|_{max} \leq \|x\| \leq \|x\|_s \leq n\|x\|_{max}\,, \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

Definição 26 (Equivalência de Normas) *Duas normas $\|\;\|_1$ e $\|\;\|_2$ são equivalentes se houver números reais λ e μ tais que as seguintes desigualdades se verificam:*

$$\|x\|_1 \leq \lambda\,\|x\|_2 \quad e \quad \|x\|_2 \leq \mu\,\|x\|_1 \tag{3.2}$$

Definição 27 (Distância) *Define-se a distância euclidiana entre dois pontos x e $y \in \mathbb{R}^n$ por: $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$

2. $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$

3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Definição 28 (Métrica) *Define-se métrica pela função distância $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Tem-se, mediante a definição de métrica e as propriedades da norma, que, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, a função d satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$ (positividade)

2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular)

Definição 29 (Espaço Métrico) *Para um dado conjunto M e uma métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$, o par (M, d) é chamado espaço métrico.*

Observação 4 *Tal qual a norma euclidiana, cada norma em $\mathbb{R}^n$ define uma métrica. Assim, para $d_{max}, d_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tem-se:*

$$d_{max} = \| x - y \|_{max} \quad e \quad d_s(x, y) = \| x - y \|_s \tag{3.3}$$

que correspondem a espaços métricos distintos $(\mathbb{R}^n, d_{max})$ e $(\mathbb{R}^n, d_s)$. Deste modo:

$$d_{max}(x, y) \leq d(x, y) \leq d_s(x, y) \leq n \, d_{max}(x, y) \,, \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

3.1.3 Intervalos, Bolas e Esfera

Os conceitos de intervalo aberto e intervalo fechado, na reta real, são generalizados para $\mathbb{R}^n$ pelo conceito de bola. Então, considere o seguinte conceito de intervalo aberto e fechado, respectivamente, para as correspondentes generalizações em $\mathbb{R}^n$: $I(a, r) = (a - r,\, a + r)$, $I[a, r] = [a - r,\, a + r]$.

Definição 30 (Bola Aberta) *Seja um elemento $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$. Então define-se a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro a e raio r como: $B(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, \| x - a \| < r \}$ ou ainda $B(a, r) = \{ a + h \in \mathbb{R}^n ;\, \| h \| < r \}$*

Definição 31 (Bola Fechada) *Define-se bola fechada como $B[a, r] = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \|x - a\| \leq r \}$ ou, alternativamente, $B[a, r] = \{ a + h \in \mathbb{R}^n ; \| h \| \leq r \}$, sendo $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.*

Observação 5 *As normas no $\mathbb{R}^n$ diferem em suas configurações geométricas de suas análogas no espaço euclidiano. Assim, a norma do máximo em $\mathbb{R}^2$ da bola fechada de raio 1 e centrada na origem possui configuração geométrica de um quadrado com vértices em $(-1, -1), (-1, 1), (1, 1)$ e $(1, -1)$, enquanto a norma da soma, para uma bola fechada com raio e centro idênticos, possui configuração geométrica do quadrado com vértices em $(-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ e $(0, 1)$.*

Observação 6 *Ao se designar com relação às normas* $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *as bolas abertas de centro* $a \in \mathbb{R}^n$ *e raio* $r > 0$*, tem-se* $B_1(a, r/\mu) \subset B_2(a, r)$ *e* $B_2(a, r/\lambda) \subset B_1(a, r)$*. Assim, toda bola aberta* B_2 *em* $\| \|_2$ *possui a bola aberta* B_1 *em* $\| \|_2$*, em que* $B_1 \subset B_2$ *e vice-versa.*

Definição 32 (Esfera) *Uma esfera* S *em torno de um ponto aleatório* $a \in \mathbb{R}^n$ *e raio* r *é definida por:* $S[a, r] = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \| x - a \| = r \}$.

Quando $r = 1$, qualquer bola ou esfera é dita *unitária*; quando a esfera possui centro a na origem denomina-se S^{n-1}.

3.1.4 Conjuntos aberto, fechado e limitado

A compreensão de um conjunto fechado pressupõe a compreensão do que seja um conjunto aberto. Deste modo:

Definição 33 (Conjunto Aberto) *Um subconjunto S de* $\mathbb{R}^n$ *é aberto se para cada ponto* $a \in S$*, existe* $r > 0$ *tal que a bola aberta* $B(a, r)$ *está inteiramente contida em* S*.*

Proposição 2 *Toda Bola aberta* $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$*, de centro* a *e raio* r*, é um conjunto aberto.*

Definição 34 (Conjunto Fechado) *Um conjunto* X *diz-se fechado, por sua vez, sempre que seu complementar* $X^{\subset} = \mathbb{R}^n - X$ *for um conjunto aberto. Assim, para cada elemento* $a \in X^{\subset}$ *existe uma bola aberta* $B(a, r) \subset X^{\subset}$*.*

Definição 35 (Conjunto limitado) *Define-se o conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *enquanto limitado se houver* $a \in \mathbb{R}^n$ *e* $r > 0$ *, tal que* $X \subset B(a, r)$*.*

Observação 7 *Uma aplicação* $f : A \to \mathbb{R}^n$ *é limitada quando seu conjunto-imagem for limitado.*

Definição 36 (Ponto de Acumulação) *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Um ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *chama-se ponto de acumulação de* X *quando toda bola aberta centrada em* x *possui um ponto* $v \in X$ *tal que* $x \neq v$*.*

Teorema 4 *(LONGUEVILLE, 2010) Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto fechado e limitado,* $(A_k)_{k \geq 1}$ *uma família de subconjuntos fechados* $A_k \subset X$ *tal que* $\lim_{k \to \infty} diam(A_k) = 0$*. Então existe* $x \in X$ *tal que cada vizinhança de* x *contém uma quantidade infinita de conjuntos* A_k*,* $k \geq 1$*.*

Corolário 1 *Seja um conjunto fechado e limitado. Todo conjunto infinito possui um ponto de acumulação.*

Corolário 2 *Em particular, toda sequência* ${x^n}_{n \in \mathbb{N}}$ *em um conjunto fechado e limitado possui uma subsequência convergente.*

3.1.5 Simplexos

A utilização de simplexos em demonstrações matemáticas permite considerável visualização geométrica do problema. A área matemática que os estuda chama-se topologia algébrica. Se, por um lado, a construção simplicial facilita a visualização do problema, por outro lado, esta visualização torna-se mais difícil quando se expande o problema para dimensões superiores. A dificuldade natural de visualização de problemas em dimensões maiores, se por um lado pode retrair a motivação de quem se depara com o assunto pela primeira vez, pode por outro lado servir de instigante desafio à visualização de problemas matemáticos (ou de áreas correlatas contidas no espectro da matemática aplicada, como a Economia Matemática e a Teoria dos Jogos) generalizados para dimensões maiores a partir da percepção geométrica fundamental.

Definição 37 (Conjunto Convexo) *Seja um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. X é convexo se, para qualquer $x, y \in X$, o segmento de reta que une x e y pertence a X. Isto é: $[x, y] = \{ (1-\lambda)\, x + \lambda\, y \} \subset X$, para $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Definição 38 (Envoltório Convexo) *O envoltório convexo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ (alternativamente chamado invólucro convexo) é o menor conjunto convexo que contém X.*

Definição 39 (Independência Geométrica) *Um conjunto de $k+1$ pontos, $x^0, x^1, ..., x^k \in \mathbb{R}^n$, é chamado geometricamente independente se os vetores $x^1 - x^0, x^2 - x^0, ..., x^k - x^0$ forem linearmente independentes no sentido de álgebra linear.*

Definição 40 (Simplexo) *Considere $k+1$ pontos geometricamente independentes, pertencentes a $\mathbb{R}^n$, $\{ x^0, x^1, ..., x^k \}$. Um k-simplexo é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que:*

$$x = \sum_{0}^{k} t_i x^i \text{ , \textit{tal que} } \sum_{0}^{k} t_i = 1 \;\; e \;\; t_i \geq 0 \;\forall\, i. \tag{3.5}$$

Essa definição de k-simplexo corresponde exatamente ao envoltório convexo de um conjunto de $k+1$ pontos geometricamente independentes em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1 *Pode-se ilustrar mediante a definição acima que o 0-simplexo corresponde a um ponto, enquanto o 1-simplexo por x^0 e x^1 consiste de todos os pontos pertencentes a:*

$$x = tx^0 + (1-t)x^1 \text{ , \textit{sendo} } 0 \leq t \leq 1 \tag{3.6}$$

O 2-simplexo, determinado pelos pontos x^0, x^1, x^2, identifica-se com um triangulo em que tais pontos correspondem aos vértices. Isto pode ser compreendido por:

$$\begin{aligned} x = \sum_{0}^{2} t_i x^i = \; & t_0 x^0 + (1 - t_0)\,[\,(t_1/\lambda)\, x^1 + (t_2/\lambda)\, x^2\,] \\ & \text{\textit{tal que} } x \neq x^0 \;\; e \;\; \lambda = 1 - t_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

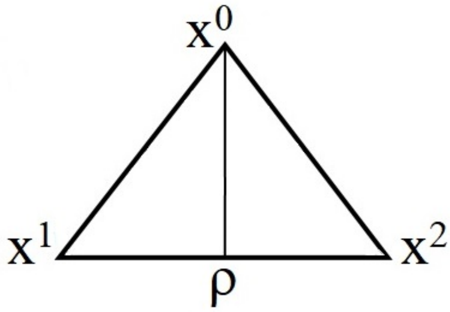

Figura 1 – O triângulo σ equivale a todos os segmentos de reta que unem x^0 a x^1x^2, onde $x \in x^0\rho$. Elaborado a partir de (MUNKRES, 2018)

A expressão entre colchetes representa um ponto ρ do segmento de reta unindo x^1 a x^2 , de modo que:

$$\frac{(\, t_1 + t_2\,)}{\lambda} = 1 \text{ e } \frac{t_i}{\lambda} \geq 0\,, \text{ para } i = 1, 2. \tag{3.8}$$

Pode-se mostrar que qualquer simplexo é a união dos segmentos que unem x^0 aos demais pontos do simplexo gerado $\{\, x^1, x^2, ..., x^n \,\}$, de modo que quaisquer dois segmentos se interceptam somente em x^0 (cf. Figura 1).

A propriedade de independência geométrica entre os vértices de um simplexo, e sua constituição enquanto conjunto das combinações lineares entre seus respectivos elementos, nos permite representá-los através de seus $k + 1$ vértices $x^0, x^1, ..., x^k$ como $x^0x^1...x^k$.

Assim, o simplexo é um conjunto convexo, fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$ que iguala-se à interseção de todos os conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$ que contenham $x^0, x^1, ..., x^n$. Portanto, trata-se do menor convexo que contém esses mesmos pontos, constituindo-se em envoltório convexo.

Definição 41 (Simplexo Canônico) *Denomina-se simplexo canônico σ^k ao envoltório convexo da base vetorial canônica $e_1, ..., e_{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+1}$.*

$$\begin{aligned} \sigma^k &= conv\,(\,\{e_1 \ldots e_{k+1}\}\,) \\ &= \{t_1e_1 + \ldots + t_{k+1}e_{k+1} : t_i \geq 0\,, \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1\} \\ &= \{(\,t_1 \ldots t_{k+1}\,) : t_i \geq 0\,, \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observação 8 *Por Δ^k denota-se o simplexo dado por σ^k e todas as suas faces simpliciais, isto é: $\Delta^k = \{\tau : \tau \leq \sigma^k\}$.*

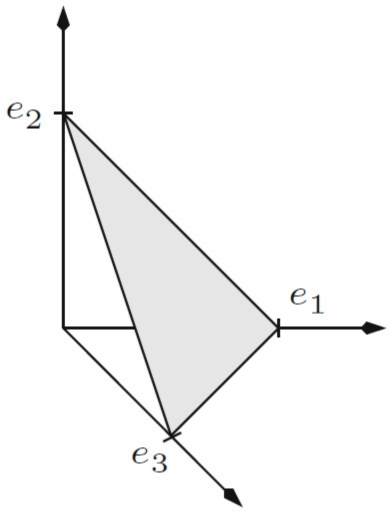

Figura 2 – O 2-simplexo canônico $\sigma^2 = conv(\{e_1 ... e_{k+1}\})$ (LONGUEVILLE, 2010)

Definição 42 (Homeomorfismo) *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$. Um homeomorfismo entre X e Y é uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ contínua, com inversa contínua. Neste caso, dizemos que X e Y são homeomorfos.*

Teorema 5 (Homeomorfismo da Bola Unitária) *Todo conjunto fechado, limitado e convexo de $\mathbb{R}^n$ com interior não-vazio é homeomorfo à bola unitária fechada $B[0,1]$ em $\mathbb{R}^n$. Em particular, isto vale para todo n-simplexo.*

3.1.6 Subdivisão Simplicial Baricêntrica

Um simplexo pode ser dividido em simplexos menores. Devido à menor dimensão dos simplexos resultantes, adiciona-se-lhes um novo vértice com o intuito de manter suas propriedades simpliciais. Este simplexo $x^0x^1...x^{\hat{j}}x^{j+1}...x^k$ resultante [2] do simplexo $x^0x^1...x^k$ é chamado **face simplicial de dimensão k-1**. O número de faces simpliciais é o número de combinações dos $k-1$ vértices do simplexo resultante frente aos k vértices do simplexo original, portanto $\binom{k+1}{j+1}$.

Definição 43 (Baricentro) *(Hatcher, 2002, p. 119)*

O baricentro do simplexo $x^0x^1...x^k$ é o ponto $y = \sum_0^i t_i x^i$ cujas coordenadas baricêntricas t_i são todas iguais, nomeadamente $t_i = \frac{1}{k+1}$, $\forall i$ e $y = \frac{1}{k+1}\sum_0^k x^i$.

Os vértices restantes $x^0, x^1, x^2, ..., x^{k-1}$ mais o baricentro y são o envoltório convexo da subdivisão simplicial baricêntrica de uma face simplicial de dimensão $k-1$.

[2] Note que o vértice $x^{\hat{j}}$ significa um vértice qualquer retirado do simplexo original. Este sub-simplexo corresponde a um simplexo de dimensão $k-1$

Definição 44 (Subdivisão Baricêntrica) [3] *(Hatcher, 2002, p. 120)*

A subdivisão baricêntrica de $x^0x^1...x^k$ é a decomposição de $x^0x^1...x^k$ em k-simplexos $\left(y, w^0, w^1, ..., w^{k-1}\right)$ onde, indutivamente, $\left(w^0, w^1, ..., w^{k-1}\right)$ é um $k-1$-simplexo na subdivisão baricêntrica de uma face $x^0, ..., x^{\hat{j}}, ..., x^k$.

Os vértices dos simplexos derivados da subdivisão simplicial de $x^0x^1...x^k$ são exatamente os baricentros das faces simpliciais de dimensão $(k-1)$. [4]

Observação 9 [5]

O caso de um 0-simplexo, em que o número de vértices coincide com o vértice adicionado, tem seu baricentro equivalente a este mesmo vértice.

Considere o 1-simplexo x^0x^1. Aplique sobre ele uma subdivisão simplicial e acrescente o vértice y. Disto se obtém dois 1-simplexos faciais resultantes: x^0y e yx^1. O novo vértice y constitui, junto aos vértices x^0 e x^1, os 0-simplexos faciais, tal que x^0 e x^1 são os 0-simplexos no bordo do 1-simplexo original, enquanto y será o 0-simplexo pertencente aos bordos dos dois 1-simplexo faciais derivados da subdivisão simplicial baricêntrica.

Por indução, um k-simplexo original $x^0x^1...x^k$ pode ser subdividido em $k+1!$ subsimplexos de dimensão k. O baricentro y do k-simplexo original constituir-se-á pela formação dos envoltórios convexos dos $(k-1)$-simplexos resultantes da subdivisão simplicial do simplexo original. Se um subsimplexo de dimensão $k-1$ estiver no bordo do simplexo original, então ter-se-á um subsimplexo de exatamente um k-simplexo derivado e apenas um k-simplexo resultante formará o invólucro convexo do baricentro y como face simplicial.

Caso o simplexo derivado de dimensão $k-1$ não repouse no bordo do $(k+1)$-simplexo original, o baricentro será uma face simplicial de mais de um dos simplexos derivados de dimensão k e este tornar-se-á o envoltório convexo de um $(k-2)$-simplexo derivado, somado o baricentro. A operação de repetição da subdivisão simplicial baricêntrica pode ser repetida até que o n-ésimo simplexo derivado tenha seu baricentro no bordo do simplexo que lhe deu origem. Se o n-ésimo simplexo derivado estiver no bordo do simplexo de dimensão $k-1$ que lhe deu origem, ele será a face simplicial de ***um*** *n-ésimo simplexo derivado de dimensão k. Caso contrário, ele é uma face simplicial de* ***dois ou mais*** *n-ésimos simplexos derivados de dimensão k.*

Seja o diâmetro do conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ igual a

$$\delta(X) = sup\ d(\,x, y\,),\ \forall\, x, y \in X \tag{3.10}$$

[3] " Se, em vez do baricentro, tivéssemos escolhido um outro ponto p_s no interior de cada simplexo s, a definição indutiva dada acima ainda produziria uma subdivisão do poliedro K. A vantagem da subdivisão baricêntrica está na regularidade com que ela reduz o tamanho dos simplexos " (LIMA, 2012).

[4] Cf. Equação 3.5

[5] Cf. Figura 3

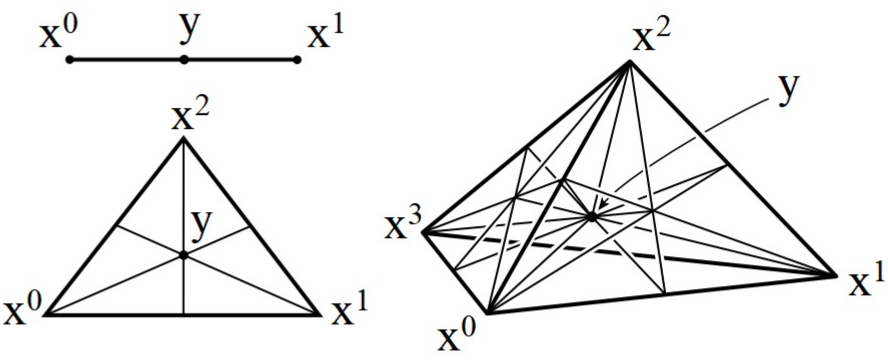

Figura 3 – Subdivisão Simplicial Baricêntrica para um k-simplexo, $k = 1, 2, 3$ dimensões. Elaborado a partir de (HATCHER, 2002)

e seja a n-ésima subdivisão baricêntrica sobre um simplexo S de dimensão k. Para o n-ésimo simplexo derivado, S^n:

$$\delta(S^n) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \delta(S) \text{ , para } S^n \subset S \text{ e } n \in N. \tag{3.11}$$

Assim, em toda combinação linear convexa de $x^0, x^1, ..., x^k \in S$, tem-se que a distância entre o baricentro e qualquer $x \in S$ é:

$$d(\, y, x\,) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right) \delta(\, S\,),\, \forall\, x \in S \tag{3.12}$$

Para $x = y^j$, sendo $j = 1, 2, ..., k$, correspondente aos demais vértices do envoltório convexo formado pelo k-ésimo simplexo derivado, tem-se:

$$d(\, y, y^j\,) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right) \delta(S) \tag{3.13}$$

Com a compreensão dos conceitos acima expostos, pode-se expor sem maiores dificuldades o teorema de Brouwer, de modo que a percepção de sua importância em problemas de existência de solução permita vislumbrar a relevância de sua generalização por Kakutani.

Teorema 6 (Teorema de Brouwer) *Toda aplicação contínua de um conjunto convexo, fechado e limitado em si mesmo possui um ponto fixo. Portanto, existe $x^* \in S$ tal que $x^* = \varphi(x^*)$.*

Em particular, toda aplicação contínua de um k-simplexo em si mesmo tem um ponto-fixo.

3.1.7 Demonstração Combinatorial do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Pode-se compreender combinatorialmente o teorema do ponto fixo de Brouwer enquanto análogo à Proposição de Sperner, que garante a indexação de um subsimplexo para com o simplexo original já indexado (LONGUEVILLE, 2010).

Definição 45 (Indexação de Sperner) *Seja σ^k o k-simplexo canônico $e_1e_2...e_{k+1}$ e K uma subdivisão de σ^n, por exemplo: a n-ésima subdivisão baricêntrica. Uma indexação de Sperner é uma aplicação $\lambda : vert(K) \rightarrow [k+1] = 1, 2, ..., k+1$ que satisfaz:*

$$\lambda(v) \in \{\, i \in S : v^i \neq 0\,\},\ \forall\, v \in\ vert(K) \tag{3.14}$$

Uma maneira intuitiva de enxergar a indexação de Sperner é: considere a face mínima de σ^k que contém v. Digamos que ela é dada pelo envoltório convexo $e_1^i, e_2^i, ..., e_l^i$. Em particular, os vértices e^i obterão índice i enquanto um vértice que se encontra no lado gerado por e_j^i obtém o índice i ou j e assim por diante. Um k-simplexo de K é totalmente indexado (com respeito a λ) se seus $k+1$ vértices obtém distintos índices. Ou seja, se todos os elementos pertencentes ao conjunto $[k+1]$ aparecem como índices.

Proposição 3 (Proposição de Sperner) *Seja $\lambda : vert(K) \longrightarrow [k+1]$ uma indexação de Sperner no subsimplexo σ^k. Existe ao menos um subsimplexo na subdivisão inteiramente indexado. Em particular, o número de subsimplexos indexados é ímpar.*

3.1.7.1 Demonstração do Teorema de Brouwer via Proposição de Sperner

Desde que B^k e o k-simplexo canônico são homeomorfos, pode-se considerar um mapeamento contínuo $f : |\sigma^k| \rightarrow |\sigma^k|$, onde σ^k é o simplexo dado pelo n-simplexo canônico e todas as suas faces. Considere a k-ésima subdivisão baricêntrica S_k em σ^n, para $k \geq 1$. Se, para algum k, um dos vértices de S_k de σ^k acontece de ser um ponto fixo, então está feito. Caso contrário, constrói-se uma sequência $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ de simplexos de tamanho decrescente tal que qualquer ponto de acumulação desta sequência será um ponto fixo de f. Por um ponto de acumulação se diz um ponto $x \in |\sigma^k|$ tal que cada ϵ-bola na vizinhança de x contém infinitamente muitos elementos pertencentes a de (σ_k), $k \geq 1$. Para isso, dota-se a k-ésima subdivisão baricêntrica S_k de σ^k com uma indexação de Sperner como segue. Para $v \in vert(S^k\sigma^k)$ seja $\lambda(v)$ o menor i tal que a i-ésima coordenada de $f(v) - v$ é negativa, isto é:

$$\lambda(v) = min\{i : f(v)_i - v_i < 0\} \tag{3.15}$$

Tal i existe, desde que a soma sobre todas as coordenadas de $f(v) - v$ é zero e v não é um ponto fixo. Esta indexação é ainda uma indexação de Sperner, desde que para $v_i = 0$, tem-se certamente $f(v)_i - v_i \geq 0$. Assim, pela proposição de Sperner, existe um simplexo σ_k inteiramente indexado. Agora seja x um ponto de acumulação da sequência (σ_k) dos simplexos. Para a existência de tal

x refere-se ao Teorema 4. Então, para cada i e qualquer $\epsilon > 0$, existe um $k \geq 1$ e um vértice $v \in vert(\sigma_k)$ tal que $|x - v| < \epsilon$ para todo i. Mas desde que a soma $\sum_{i=1}^{n+1}(f(x)_i - x_i)$ é zero, isto é possivel apenas se $f(x) = x$. $\square$

Shizuo Kakutani explora as propriedades expostas no teorema de Brouwer expandindo seu mapeamento ponto-a-ponto para mapeamentos ponto-a-conjunto. Nisto, o conjunto imagem não constituir-se-ia mais de necessariamente um ponto, mas de um conjunto. Assim, o conjunto imagem é subdividido em subconjuntos convexos de pontos correspondentes ao domínio pela regra de mapeamento, de modo que este mesmo mapeamento tenha a propriedade de semi-continuidade superior para a obtenção de uma solução que contenha o limite da sequência. Pode-se, então, mostrar outros conceitos cuja compreensão ajudará na demonstração de Kakutani. São estes: mapeamento ponto-a-conjunto e semi-continuidade superior.

3.2 Propriedades presentes em Kakutani

3.2.1 Mapeamento - Parte 2

Considere o seguinte exemplo econômico - para efeito didático - de uma cesta de consumo factível submetida a uma dotação definida. Esta cesta de consumo poderá conter mais de uma combinação de produtos que a compõe, para determinado nível de preço de seus produtos. Quando houver entre as possibilidades de combinação de produtos desta cesta factível apenas uma combinação possível, ter-se-á um caso particular do mapeamento ponto-conjunto que corresponde ao mapeamento ponto-a-ponto. Assim:

Definição 46 (Mapeamento Ponto-conjunto) *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ dois conjuntos e $\Re(Y)$ o conjunto de todos os subconjuntos de Y. Um mapeamento ponto-conjunto entre X e Y é uma aplicação $\Phi : X \longrightarrow \Re(Y)$.*

Pode-se dizer que um mapeamento ponto-conjunto refere-se a um subconjunto de $X \times S$: $\{(x, y) \,|\, x \in X,\, y \in \Phi(x)\}$.

Definição 47 (Ponto-Fixo - Parte 2) *Um ponto-fixo para estes mapeamentos significa a existência de um ponto $x \in X$ tal que $x \in \Phi(x) \in \Re(Y)$.*

3.2.2 Semi-continuidade

O conceito de continuidade para mapeamentos ponto-conjunto é um análogo ao de continuidade para funções. Este conceito é muito útil pois como será visto, situações onde tem-se a validade do Teorema de Bolzano-Weiertrass, as propriedades de convergência no caso de função se estendem para mapeamento ponto-conjunto semi-contínuo superiormente.

Definição 48 (Ponto de Acumulação) *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ chama-se ponto de acumulação de X quando toda bola aberta centrada em x possui um ponto $v \in X$ tal que $x \neq v$*

Teorema 7 (Bolzano-Weiertrass) *Seja um conjunto fechado e limitado. Todo conjunto infinito possui um ponto de acumulação.*

Corolário 3 *Em particular, toda sequência $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em um conjunto fechado e limitado possui uma subsequência convergente.*

Percebe-se que o conceito ordinário de continuidade é definido em termo das imagens $f(x)$ e $f(x^*)$ para com seus respectivos pontos x e x^* no domínio. Isto é, $f(x)$ é contínua em x se $f(x) \to f(x^*)$ conforme $x \to x^*$.

A propriedade de semi-continuidade superior, especificamente, é característica de muitos mapeamentos ponto-conjunto em economia e sua importância - conforme o tema deste trabalho - reside em sua posse das propriedades necessárias de continuidade para o seu uso no teorema do ponto-fixo de Kakutani.

Definição 49 (Semi-continuidade superior) [6]

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ e $\Phi : X \longrightarrow \Re(Y)$ um mapeamento ponto-conjunto entre X e Y. Diz-se que Φ é semi-contínuo superiormente se $\{x^n\}$ é uma sequência em X, com $x^n \to x^*$ e $y^n = \phi(x^n) \in \Re(Y)$ de modo que $y^n \to y^*$. Então $y^* \in \Phi\,(x^*)$.

[6] Veja Figura 5 como exemplo em $\mathbb{R}^2$

4 A GENERALIZAÇÃO DE KAKUTANI

Finalmente, tem-se condições de expor os teoremas de Kakutani de forma a demonstrá-los sem maiores dificuldades. As demonstrações seguintes fundamentaram-se em (KAKUTANI, 1941) e (YOO, 2016), que as expôs detalhadamente e dele baseou-se a maior parte; as provas começam pelo primeiro dos teoremas do ponto-fixo de kakutani.

4.1 Invariância homológica por Subdivisão Simplicial Baricêntrica - Generalização do Teorema do Ponto-Fixo de Brouwer

Teorema 8 (Teorema 1 de Kakutani) *Seja Φ um mapeamento semi-contínuo superior ponto-conjunto de um simplexo fechado S de dimensão k no conjunto $\Re(S)$ formado por todos os subconjuntos fechados e convexos de S. Então, existe $x^* \in S$ tal que $x^* \in \Phi(x^*)$.*

Demonstração: Seja S_n a n-ésima subdivisão simplicial baricêntrica de S. O número natural n denota o número de subdivisões simpliciais baricêntricas que são feitas. Note que é o simplexo S sendo dividido em simplexos menores, não necessariamente através de subdivisões baricêntricas. Tal subdivisão foi introduzida como uma de muitas subdivisões possíveis.

Desde que S é um simplexo fechado de dimensão k, existem muitos simplexos fechados de dimensão k menores em S_n. Escolha um desses simplexos menores, o qual teria $k+1$ vértices e denote-o Δ_x. Denote cada vértice como $x^0, x^1, ..., x^k$. Então, cada ponto em $x \in \Delta_x$ se escreve de modo único como $x = t_0x^0 + t_1x^1 + ... + t_kx^k$, $t_i \geq 0 (i = 0, 1, 2, ..., k)$, $\sum_0^k t_i = 1$, por definição de simplexo. Para cada um destes vértices x^i, $\Phi(x^i)$ é um conjunto fechado e convexo. Escolha para cada $i = 0, 1..., k$ um $y^i \in \Phi(x^i)$ e seja Δ_w o simplexo gerado por estes vértices y^i. Agora, defina $\varphi_n : \Delta_x \to \Delta_w$ por $\varphi(x) = t_0y^0 + t_1y^1 + ... + t_ky^k$, $t_i \geq 0 (i = 0, 1, 2, ..., k)$, $\sum_0^k t_i = 1$, onde os t_i são exatamente os mesmos da expressão de $x \in \Delta_x$. Assim, φ é um mapeamento contínuo ponto-a-ponto entre Δ_x e Δ_w. Agora, estenda linearmente φ a todos os subsimplexos de dimensão k de S_n. Obtém-se assim um mapeamento ponto-a-ponto contínuo $\varphi_n : S \to S$. (Figura 4) Dado que S é fechado e limitado, pelo Teorema do ponto-fixo de Brouwer, existe um ponto $x^n \in S$ tal que $x^n = \varphi_n(x^n)$

Repita todo o processo para $S_0, S_1, S_2, ...$, então haverão $x^0, x^1, x^2, ...$ correspondentes. Desde que a subdivisão baricêntrica pode ser feita tantas vezes quanto necessário, a sequência $x^0, x^1, x^2, ...$ é uma sequência infinita. Desde que S é um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$, pelo Teorema de Bolzano-Weiertrass, a sequência $\{x^n\}$ possui uma subsequência $\{x^{n_v}\}$ que converge a um ponto $x^* \in S$. Tal ponto é o ponto $x^* \in S$ tal que $x^* \in \Phi(x^*)$. Note que poderia haver mais de um x^*, se existir mais de uma subsequência convergente de $x^0, x^1, x^2, ...$

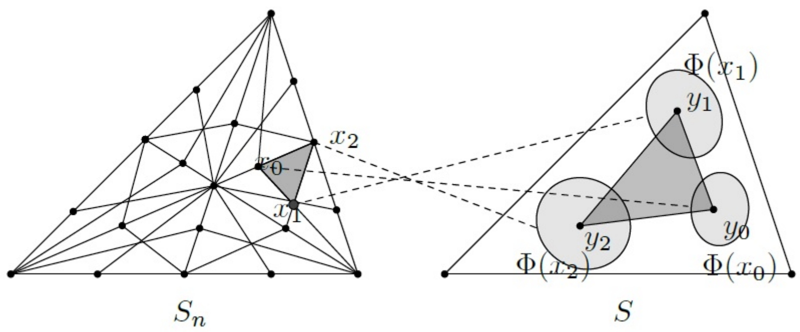

Figura 4 – Mapeamento entre dois 2-simplexos, Δ_x e Δ_w. Fonte: (YOO, 2016)

Para provar isto, seja Δ_n um simplexo de dimensão k de S_n que contém o ponto x^n. Se x^n estiver no simplexo de dimensão menor de S_n, então Δ_n não é unicamente determinado. Neste caso, seja Δ_n qualquer um destes simplexos. Seja $x_0^n, x_1^n, ..., x_k^n$ os vértices de Δ_n. Então a sequência $\{x_i^{n_v}\}$ (v = 1,2,...) converge para x^* para $i = 0, 1, ..., k$ e tem-se $x^n = \sum_0^k t_i^n x_i^n$ para o respectivo $\{t_i^n\}$ (i = 0,1,...,k; n=1,2,...) com $t_i^n \geq 0$ e $\sum_0^k t_i^n = 1$. Adiante, coloque-se $y_i^n = \varphi_n(x_i^n)(i = 0, 1, ..., k; n = 1, 2, ...)$. Então, tem-se $y_i^n \in \Phi(x_i^n)$ e $x^n = \varphi_n(x^n) = \sum_0^k t_i^n y_i^n$ para (i=1,2...). Tome-se agora a subsequência $\{n_v^{'}\}$ v=1,2,... de $\{n_v\}$ (v=1,2,...) tal que $\{y_i^{n_v^{'}}\}$ e $\{t_i^{n_v^{'}}\}$ v = 1,2,... converge para $i = 0, 1, ..., k$ e o $\lim_{v\to\infty} = y_i^*$ e $\lim_{v\to\infty} t_i^{n_v^{'}} = t_i^*$ para $i = 0, 1, ..., k$. Então, tem-se claramente $t_i^* \geq 0$, $\sum_0^k t_i^* = 1$ e $x^* = \sum_0^k t_i^* y_i^*$. Desde $x_i^{n_v^{'}} \longrightarrow x^*$, $y_i^{n_v^{'}} \in \Phi(x_i^{n_v^{'}})$ e $y_i^{n_v^{'}} \longrightarrow y_i^*$ para $i = 0, 1, ..., k$ tem-se, pela semi-continuidade superior de $\Phi(x^*)$, $y_i^* \in \Phi(x^*)$ para $i = 0, 1, ..., k$. E isto implica, pela convexidade de $\Phi(x^*)$, que $x^* = \sum_0^k t_i^* y_i^* \in \Phi(x^*)$. $\square$

4.1.1 Validade do Teorema anterior em Retrações no Espaço Euclidiano

Corolário 4 *O Teorema anterior é válido para o caso de S ser um conjunto arbitrário convexo fechado e limitado no Espaço Euclidiano.*

Demonstração: Seja S' um simplexo fechado e S um conjunto convexo, fechado e limitado arbitrário tal que $S \subset S'$. Seja uma retração contínua, que retrai por meio de um mapeamento ponto-a-ponto o espaço S' em todo o subespaço S, deixando cada ponto do subespaço fixo, denotada por $x \to \psi(x)$. Seja $x \longrightarrow \Phi(x)$ um mapeamento ponto-conjunto semi-contínuo superior de S em $\Re(S)$, onde $\Re(S)$ é a família de todos os subconjuntos convexos fechados de S, como no Teorema 1 de Kakutani. Então, $x \longrightarrow \Phi(\psi(x))$ é um mapeamento ponto-conjunto semi-contínuo superior de S' em $\Re(S)$, o qual satisfaz $\Re(S) \subset \Re(S')$ desde $S \subset S'$. Assim, $x \longrightarrow \Phi(\psi(x))$ é também um mapeamento de S' em $\Re(S')$, deste modo satisfazendo as condições do Teorema 1 de Kakutani. Além diso, pelo Teorema 1 de Kakutani, existe um ponto $x^* \in S'$ tal que $x^* \in \Phi(\psi(x^*))$. Note que $\Phi(\psi(x^*)) \subset S'$, desde que definiu-se o mapeamento

$x \longrightarrow \psi(x)$ como de S' em todo S e $x \to \Phi(x)$ como S em todo S. Assim , $\Phi(\psi(x^*)) \subset S$ então $x^* \in \Phi(\psi(x)) \subset S$. Desde que $x^* \in S$ e cada ponto do subespaço é fixado após a retração, $x^* = \psi(x^*)$, então $x^* \in \Phi(x^*) = \Phi(\psi(x^*)) \subset S$. Desde que existe x^* tal que $x^* \in S$, então $x^* \in \Phi(x^*)$. □

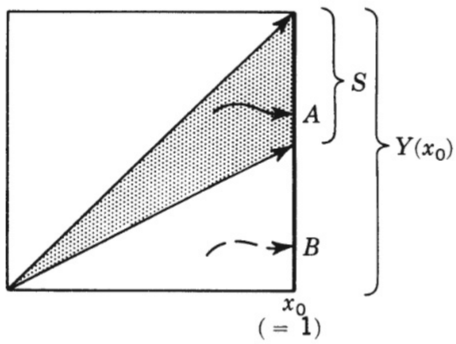

Figura 5 – Semi-continuidade superior em $\mathbb{R}^2$, onde $S \subset Y(x_0)$. “Toda sequência $x \to x_0$ e y no conjunto imagem, de seu x correspondente, deve terminar em $Y(x_0)$ (...) B não possui caminho de aproximação em $Y(x_0)$, então y repousa no conjunto imagem de seu x apropriado”. Fonte: (LANCASTER, 2018)[1]

O Teorema 2 de Kakutani, a seguir, corresponde a uma demonstração alternativa à de John Von Neumann publicado em seu artigo de 1937 na *Ergebnisse*, onde se propunha generalizar o teorema do Ponto Fixo de Brouwer enquanto demonstrava o equilíbrio geral de uma economia em regime de crescimento equilibrado. Assim, Kakutani se propõe a fornecer uma prova alternativa e mais econômica, matematicamente mais elegante, utilizando de seu Teorema 1 para mostrar sua aplicabilidade no ramo da Economia Matemática.

4.2 Segundo Teorema do Ponto-Fixo de Kakutani em Espaço Euclidiano

Teorema 9 (Teorema 2 de Kakutani) *Sejam K e L dois conjuntos convexos, fechados e limitados nos espaços Euclidianos $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente, e considere seu produto Cartesiano $K \times L$ em $\mathbb{R}^{m+n}$. Sejam U e V dois subconjuntos fechados de $K \times L$ tais que para qualquer $x^0 \in K$ o conjunto U_{x^0}, de todo $y \in L$ tal que $(x^0, y) \in U$, é não-vazio, fechado e convexo de modo que para qualquer $y^0 \in L$ o conjunto V_{y^0}, de todo $x \in K$ tal que $(x, y^0) \in V$, é não-vazio, fechado e convexo. Tem-se, sob essas condições, que U e V possuem um ponto comum.*

Demonstração: Seja $S = K \times L$. Defina um mapeamento ponto-a-conjunto $z \longrightarrow \Phi(z)$ de S em $P(S)$ como $\Phi(z) = V_y \times U_x$ se $z = (x, y)$. Tal função $\Phi(z)$ é semi-contínua superior pelos seguintes motivos. Para uma sequência de $q^i \in S(i = 0, 1, 2, ...)$ que converge a q^0, seja $wi \in \Phi(q^i)$ tal que (q^i) converge a $(q^0) \in S$. Para mostrar que $\Phi(z)$ é semi-contínua superior, nós precisamos mostrar que $w^0 \in \Phi(q^0)$. É suficiente mostrar que $\phi_1(w^0) \in V_{y^0}$ e

$\phi_2(q^0) \in U_{x^0}$, porque então $w^0 \in V_{y^0} \times U_{x^0} = \Phi(q^0)$. Desde Π_1 é contínua, $\Pi(w^i)$ é uma sequência convergente em K convergindo para $\Pi_1(w^0)$. Pela definição de q^i, $\Pi_1(w^1) \in V_y$, então $(\Pi_1(w^i), y^i) \in V$. Agora, $\Pi_1(w^i)$ é convergente e y^i é convergente, desde que q^i seja convergente. Então $(\Pi_1(q^i), y^i)$ é convergente para $(\Pi_1(w^0, y^0))$. Desde V é fechado, $(\Pi(w^0, y_0) \in V)$. Então, $\Phi(z)$ é função semicontínua superior. Agora, desde que S é conjunto convexo fechado e limitado, pelo corolário, existe um ponto $z^0 \in S = K \times L$ tal que $z^0 \in \Phi(z^0)$. Desde que $(x^0, y^0) = z^0 \in \Phi(z^0) = V_{y^0} \times U_{x^0}$, $x^0 \in V_{y^0}$ e $y^0 \in U_{x^0}$, então $(x^0, y^0) \in V_{y^0} \times U_{x^0}$. Desde que $V_{y^0} \times U_{x^0} \subset U \cap V$, tal $z^0 = (x^0, y^0)$ é o ponto comum de U e V. $\square$

O Teorema 3 de Kakutani, por sua vez, corresponde a uma prova alternativa do teorema minimax também exposto inicialmente por John Von Neumann em artigo seminal publicado em 1928 que inaugurou a área de Teoria dos Jogos. Isto fortalece a ideia de ampla aplicabilidade do resultado de Kakutani e sua utilidade, inclusive, para o ramo de Teoria dos Jogos. Devido a presente monografia não abordar especificamente o tema de teoria dos jogos, a aplicabilidade demonstrada por kakutani no Teorema Minimax não será esmiuçada no presente texto.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta monografia analisou um dos principais argumentos presentes nas soluções propostas nos modelos centrais de Economia Matemática que se estenderam da década de 1930 a 1950. O estudo aprofundado do Teorema de Kakutani permitiu a melhor compreensão da estrutura matemática que sustenta os modelos modernos de Equilíbrio Econômico Geral. Neste ínterim, considera-se que o objetivo geral deste trabalho tenha se realizado.

Dentre os três objetivos específicos que esta monografia se propôs, compreende-se que estes foram cumpridos integralmente - cumprindo por sua vez o objetivo geral. Devido principalmente ao esforço demandado para acessar conhecimento avançado de matemática e organizá-lo pedagogicamente, o capítulo dedicado à construção dos modelos neowalrasianos é aprimorável se neste capítulo específico se considerar outros modelos contemporâneos também relevantes. Por conta do presente trabalho monográfico constituir-se numa primeira aproximação mais aprofundada ao assunto, tal capítulo cumpre satisfatoriamente seu propósito.

Verificou-se a profundidade do argumento utilizado pelos principais modelos modernos de Equilíbrio Econômico Geral, frente aos argumentos muitas vezes intuitivos com os quais se apresenta esta teoria. Considera-se a proposta de aprendizado e organização deste conhecimento cumpridos integralmente, com a possibilidade de seu ensino durante a graduação verificada positivamente.

A elegância da formalidade matemática, embora aparente aridez a quem lhe trata com desdém, junto à matéria econômica efetivam profundo conhecimento não-intuitivo. Quanto ao interesse pessoal por conhecer melhor o neowalrasianismo, esta monografia realizou quase integralmente as expectativas, com bom trabalho de estudos com o intuito de romper a barreira de entrada a um conhecimento não acessível em língua portuguesa - até agora.

6 REFERÊNCIAS

ARROW, K. J.; DEBREU, G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 265–290, 1954. Citado 4 vezes nas páginas 20, 25, 27 e 29.

BALASKO, Y. *The Equilibrium Manifold: Postmodern developments in the theory of general economic equilibrium*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 14.

DÜPPE, T.; WEINTRAUB, E. R. *Finding equilibrium*. [S.l.]: Princeton University Press, 2014. Citado na página 22.

DÜPPE, T.; WEINTRAUB, E. R. Losing equilibrium: On the existence of abraham wald's fixed-point proof of 1935. *History of Political Economy*, Duke University Press, v. 48, n. 4, p. 635–655, 2016. Citado na página 22.

EVSTIGNEEV, I. V.; SCHENK-HOPPÉ, K. R. The von neumann-gale growth model and its stochastic generalization. In: *Handbook on Optimal Growth 1*. [S.l.]: Springer, 2006. p. 337–383. Citado na página 14.

HATCHER, A. *Algebraic Topology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 37.

KAKUTANI, S. A generalization of brouwer's fixed point theorem. *Duke mathematical journal*, Duke University Press, v. 8, n. 3, p. 457–459, 1941. Citado 4 vezes nas páginas 13, 22, 23 e 41.

KOLMOGOROV, A.; FOMIN, S. *Introduction Real Analysis Rev. English Ed*. [S.l.]: Dover, 1970. Citado na página 30.

LANCASTER, K. *Mathematical economics*. [S.l.]: Dover Publications Inc, 2018. Citado na página 43.

LIMA, E. L. *Homologia Basica*. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Citado na página 36.

LONGUEVILLE, M. d. *A Course in Topological Combinatorics*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 38.

MCKENZIE, L. On equilibrium in graham's model of world trade and other competitive systems. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 147–161, 1954. Citado 4 vezes nas páginas 20, 22, 23 e 29.

MCLENNAN, A. *Advanced Fixed Point Theory for Economics*. [S.l.]: Springer, 2018. v. 25. Citado na página 14.

MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.

NEUMANN, J. V. A model of general economic equilibrium. In: *Readings in the Theory of Growth*. [S.l.]: Springer, 1971. p. 1–9. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

NIKAIDO, H. *Introduction to sets and mappings in modern economics*. [S.l.]: North-Holland, 1960. Citado na página 29.

SMALE, S. Mathematical problems for the next century. *The mathematical intelligencer*, Springer, v. 20, n. 2, p. 7–15, 1998. Citado na página 15.

WALD, A. On some systems of equations of mathematical economics. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 368–403, 1951. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 25.

WALKER, D. A. *Walrasian Economics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 12.

WEINTRAUB, E. R. *General equilibrium analysis: Studies in appraisal*. [S.l.]: University of Michigan Press, 1993. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 18, 20 e 22.

YOO, Y. Kakutani's fixed point theorem and the minimax theorem in game theory. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.