INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU –
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Guilherme Brandão Pereira

OS NÚMEROS DO PONTO DE VISTA HISTÓRICO E A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE

NITERÓI
2022

Guilherme Brandão Pereira

OS NÚMEROS DO PONTO DE VISTA HISTÓRICO E A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Pós-Graduação Lato Sensu – Especialização em Ensino de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial à obtenção do título Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Paulo Henrique Cabido Gusmão

Niterói
2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

P436n Pereira, Guilherme Brandão
Os números do ponto de vista histórico e a construção do conjunto dos números reais / Guilherme Brandão Pereira ; Paulo Henrique Cabido Gusmão, orientador. Niterói, 2022.
100 f. : il.

Monografia (Especialização em Ensino de Matemática)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2022.

1. História da matemática. 2. Sistemas de numeração. 3. Números reais. 4. Cortes de Dedekind. 5. Produção intelectual. I. Gusmão, Paulo Henrique Cabido, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Guilherme Brandão Pereira

OS NÚMEROS DO PONTO DE VISTA HISTÓRICO E A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Pós-Graduação Lato Sensu – Especialização em Ensino de Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial à obtenção do título Especialista em Ensino de Matemática.

Banca Examinadora

Prof. PAULO HENRIQUE CABIDO GUSMÃO - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. WANDERLEY MOURA REZENDE - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. LEONARDO NAVARRO DE CARVALHO - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Outubro/2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, minha família e meus amigos por apoiarem e colaborarem direta ou indiretamente com esse trabalho.

RESUMO

Baseado em relatos de professores de matemática do ensino básico sobre como os alunos demonstram mudança de postura e interesse em relação à aula de matemática ao se depararem com a abordagem histórica do conteúdo matemático, o presente trabalho apresenta uma longa (porém pontual) análise de alguns dos principais sistemas de numeração utilizados ao longo da história por diversos povos de culturas diferentes e como a evolução dos costumes dessas culturas influenciaram as mudanças nas notações aritméticas e até o surgimento e adoção de novos sistemas de numeração. A principal proposta é fornecer ao professor de matemática uma ferramenta que possa ser utilizada para permear suas aulas com conteúdo histórico tornando-a mais atrativa para seus alunos. O trabalho inicia apresentando os sistemas de numeração que escolhemos abordar em ordem cronológica, com foco nas notações dos números, mas também procurando abordar como eram realizadas as operações aritméticas com essas notações, e culmina abordando a construção do conjunto dos números reais de maneira rigorosa através de cortes de Dedekind, apresentando diversas definições e teoremas demonstrados detalhadamente.

Palavras-chave: História da matemática. Sistemas de Numeração. Números reais. Cortes de Dedekind.

ABSTRACT

Based on reports from elementary school mathematics teachers about how students show a change of attitude and interest in relation to the mathematics class when faced with the historical approach to mathematical content, the present work presents a long (but punctual) analysis of some of the main numbering systems used throughout history by different peoples of different cultures and how the evolution of the customs of these cultures influenced the changes in arithmetic notations and even the emergence and adoption of new numbering systems. The main proposal is to provide the mathematics teacher with a tool that can be used to permeate their classes with historical content, making it more attractive to their students. The work begins by presenting the numbering systems that we chose to approach in chronological order, focusing on the notations of the numbers, but also trying to approach how arithmetic operations were performed with these notations, and culminates by approaching the construction of the set of real numbers in a rigorous way through of Dedekind cuts, presenting several definitions and theorems demonstrated in detail.

Keywords: History of mathematics. Numbering Systems. real numbers. Dedekind cuts.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Muitos professores do ensino básico relatam certo interesse de alguns alunos ao presenciarem a abordagem de um conceito matemático sob um aspecto histórico. Em [1], Ubiratan D'Ambrosio critica o processo de construção de conhecimento através de um currículo geral, que não leva em consideração as experiencias históricas, sociais e culturais do indivíduo, pois defende que o conhecimento é o produto de todo um processo histórico que leva em consideração o desenvolvimento de toda a cultura de um grupo social, e que ainda está sendo construído.

A proposta do presente trabalho de conclusão de curso, é apresentar a evolução histórica dos números, abordando notações e sistemas de numeração específicos que determinadas culturas utilizaram ao longo do tempo, proporcionando ao professor de matemática do ensino fundamental e médio, uma ferramenta que possa ser utilizada para embasar suas aulas e tornar mais atrativa a aprendizagem matemática, através do aspecto de evolução histórica.

Esta monografia está dividida em 11 capítulos. No capítulo 2 apresentamos o conceito e alguns tipos de base de numeração, bem como um método para representar um número escrito em base decimal em outra base qualquer, e vice-versa. Do capítulo 3 ao capítulo 6, apresentamos alguns sistemas de numeração utilizados em diferentes momentos históricos e por diferentes culturas, assim como as notações utilizadas por tais povos para representar os números e, em alguns casos, como eram trabalhadas as operações aritméticas utilizando tais sistemas e notações. No capítulo 7, temos o desenvolvimento histórico do sistema de numeração Indo-arábico, passando pelo aparecimento do zero, até chegar as notações atuais do sistema de numeração decimal. No capítulo 8, temos uma rápida abordagem do desenvolvimento da notação de frações a partir do século XVI, após o estabelecimento do sistema de numeração Indo-arábico. No capítulo 9 é apresentado um breve panorama sobre a dificuldade histórica em lidar com a conceituação formal dos números irracionais. No capítulo 10, apresentamos brevemente a construção do conjunto dos números reais através das Sequências de Cauchy, e de maneira matematicamente rigorosa, através de Cortes de Dedekind. Encerramos com o capítulo 11, apresentando conclusões e propostas de continuidade deste trabalho.

Capítulo 2

Base Numérica

Um sistema numérico é dito posicional quando um mesmo símbolo usado nesse sistema serve para representar diferentes números, dependendo da posição que ocupa na escrita [2]. Por exemplo, a unidade é representada no nosso sistema numérico pelo algarismo 1. A representação que utilizamos para o numero dez é 10, que também possui o símbolo 1, porém não confundimos as representações desses números pois o algarismo 1 está em posições diferentes nas duas representações.

Dizemos que um número N qualquer está representado na base b (para algum $b > 1$ natural) quando podemos escrevê-lo na forma $a_n a_{n-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-m} \cdots$, tal que

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \cdots + a_{-m} b^{-m} + \cdots.$$

Dizemos que um sistema numérico posicional é de base b quando um número N qualquer, desse sistema, pode ser representado na base b.

2.1 Sistema de numeração decimal

Os números que utilizamos no nosso cotidiano são escritos na base 10, isto é, podem ser representados na forma $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \cdots + a_{-m} 10^{-m} + \cdots$. onde cada a_i é um dos algarismos indo-arábicos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9. Por exemplo, o número "dois mil e vinte e dois"é representado na base dez como 2022, pois, nessa base, ele pode ser escrito da seguinte maneira:

$$2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Também é possível representar números decimais nessa base. Por exemplo, o número "cento e vinte e três mil quatrocentos e cinquenta e seis inteiros e setecentos e oitenta e nove centésimos", é representado na base dez como $123456,789$ pois nessa base ele é escrito da seguinte maneira:

$$1\times10^5+2\times10^4+3\times10^3+4\times10^2+5\times10^1+6\times10^0+7\times10^{-1}+8\times10^{-2}+9\times10^{-3}$$

Para representar os números negativos utilizamos o símbolo "$-$"a esquerda de cada a_i:

$$-123 = (-1)\times 10^2 + (-2)\times 10^1 + (-3)\times 10^0$$

2.2 Sistema binário

O sistema de numeração de base dois é conhecido como sistema binário. Possui apenas os algarismos 0 e 1, conhecidos como *bits*. Nesse sistema de numeração um número N é representado na forma $a_n a_{n-1}\cdots a_0, a_{-1}\cdots a_{-m} + \cdots$, tal que:

$$N = a_n\times 2^n + a_{n-1}\times 2^{n-1} + \cdots + a_0\times 2^0 + a_{-1}\times 2^{-1} + \cdots + a_{-m}\times 2^{-m} + \cdots$$

onde cada a_i é um dos algarismos 0 ou 1. O número "nove"(9 no sistema decimal), por exemplo, é representado no sistema binário por 1001, pois

$$9 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0.$$

O número decimal $9,625$ (na base 10) é representado no sistema binário por $1001,101$, pois a parte inteira pode ser escrita como

$$9 = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$$

e a parte decimal pode ser escrita como

$$0,625 = 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}.$$

2.3 Sistema de numeração sexagesimal

Os povos que habitavam a região da antiga mesopotâmia utilizavam uma notação posicional de base 60 para representar os números. Na verdade, eles usavam uma combinação de base 60 e base 10 [2], pois, diferente do sistema de numeração mais utilizados pelos povos da mesopotâmia (que será abordado no capítulo seguinte), um sistema de numeração sexagesimal possui sessenta algarismos a_i, e um número N qualquer escrito nessa base seria representado na forma $a_n a_{n-1} \cdots a_0, a_{-1} \cdots a_{-m} + \cdots$, tal que:

$$N = a_n 60^n + a_{n-1} 60^{n-1} + \cdots + a_0 60^0 + a_{-1} 60^{-1} + \cdots + a_{-m} 60^{-m} + \cdots$$

onde cada a_i é um dos 60 algarismos do sistema de numeração sexagesimal.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

a b c d e f g h i j

k l m n o p q r s t

u v w x y z A B C D

E F G H I J K L M N

O P Q R S T U V W X

Figura 2.1: Algarismos do sistema de numeração sexagesimal (base 60).

Assim, o número "três mil setecentos e vinte e três"(3723 no sistema decimal), por exemplo, é representado por 123, pois

$$3723 = 1 \times 60^2 + 2 \times 60^1 + 3 \times 60^0.$$

O número "dois mil e vinte e dois"(2022 no sistema decimal) é representado por xG, pois

$$2022 = 33 \times 60^1 + 42 \times 60^0$$

e os algarismos x e G são os de número 33 e 42 do sistema de numeração sexagesimal, respectivamente. O número decimal $3723, 6$ (na base 10) é representado na base 60 por $123, \mathrm{A}$, pois a parte inteira pode ser escrita como

$$3723 = 1 \times 60^2 + 2 \times 60^1 + 3 \times 60^0$$

e a parte decimal pode ser escrita como

$$0,6 = 36 \times 60^{-1}$$

e o algarismo A é o 36º algarismo do sistema de numeração de base 60.

Um exemplo de uso da base 60 nos dias atuais, é a maneira como representamos as horas, minutos e segundos: duas horas, quinze minutos e 10 segundos representados apenas em segundos (como um valor decimal) é $2 \times 60^2 + 15 \times 60^1 + 10 \times 60^0 = 8110$ segundos.

2.4 Mudança de base

Ao longo do texto, trataremos de alguns sistemas de numeração diferentes que podem apresentar-se pouco habituais para alguns leitores, portanto, convém apresentar um processo de conversão de uma representação de um número em um determinado sistema de numeração para o sistema decimal, bem como um processo de conversão de um número representado no habitual sistema decimal para algum outro sistema de numeração.

2.5 Base 10 para base b

Para representar um número escrito em base 10 em uma base b (para algum $b > 1$ natural e diferente de 10) realizamos a divisão inteira do número pela base, e do quociente obtido pela base, sucessivas vezes até que o quociente seja menor que a base. A representação do número nessa base será feita com a composição do último quociente com os restos das divisões (do último ao primeiro resto) [5].

Por exemplo, para converter o número 10 para a sua representação na base 2, escrevemos

$$10 = 5 \times 2 + 0 = (2 \times 2 + 1) \times 2 + 0 = ([\mathbf{1} \times 2 + \mathbf{0}] \times 2 + \mathbf{1}) \times 2 + \mathbf{0}$$

Portanto, a representação do número 10 na base 2 é 1010.

Para escrever número 4025 na base 60, escrevemos

$$4025 = 67 \times 60 + 5 = (\mathbf{1} \times 60 + \mathbf{7}) \times 60 + \mathbf{5}$$

Portanto, a representação do número 4025 na base 60 é 175.

2.6 Base b para base 10

Para representar um número N escrito em uma base b (para algum $b > 1$ natural e diferente de 10) em base 10 devemos escrever N na seguinte representação polinomial:

$$N = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_0 \times b^0 + a_{-1} \times b^{-1} + \cdots + a_{-m} \times b^{-m} + \cdots$$

onde a_i são os algarismos que compõem N na base b e $n =$ quantidade de algarismos $-$ 1 [5]. Executando as operações, obtemos a representação de N na base 10.

Por exemplo, para converter o número representado por 110110 na base 2 para a sua representação na base 10, escrevemos

$$110110 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

$$= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 54$$

Portanto, o número escrito na base 2 como 110110, é o número 54 no sistema decimal.

Para descobrir qual número na base 10 é representado por 185 na base 60, escrevemos

$$185 = 1 \times 60^2 + 8 \times 60^1 + 5 \times 60^0$$

$$= 3600 + 480 + 5 = 4085$$

Portanto, o número na base 10 que é representado por 185 na base 60 é 4085.

Capítulo 3

Mesopotâmia

Estima-se que foi por volta do período 4000 a.C que surgiram os primeiros registros numéricos na antiga Mesopotâmia, região onde hoje se situa o Iraque. Essa região era formada por várias cidades entre os rios Tigre e Eufrates, e foi habitada por diversos povos, inclusive, nômades que acabavam por se estabelecer na região pela proximidade com os rios. Portanto, é possível dizer que o encontro dessas diversas culturas contribuiu para o surgimento da escrita e dos primeiros registros numéricos, tornando a tarefa de atribuir esse surgimento a um único povo ou cultura muito imprecisa.

No entanto, é possível destacar dois povos que habitaram naquela região, cujas culturas e desenvolvimento social foram muito importantes para o surgimento e desenvolvimento dos primeiros registros numéricos: os semitas (chamados de antigos babilônicos, pois fundaram o primeiro Império Babilônico), que faziam registros em tabletes de argila, e os selêucidas, que se estabeleceram na Babilônia por volta de 312a.C., após a morte de Alexandre o Grande [2]. Como a maior parte dos registros numéricos utilizados pelos povos da mesopotâmia conhecidos atualmente foi obtida através dos tabletes de argila babilônicos, em alguns momentos do texto utilizaremos o termo "babilônico"(relacionado a algum outro termo, como "sistema numérico"por exemplo) para nos referirmos aos registros utilizados pelos povos da Mesopotâmia.

Nas primeiras sociedades que existiram na região mesopotâmica, contar era um ato concreto. Consistia em associar os objetos que se queria contar com elementos de um conjunto conhecido (relação um a um entre elementos de conjuntos, denotando as primeiras ideias de função). Para fazer essa relação, foram confeccionados pequenos objetos de argila cozida chamados *tokens*, que possuíam formatos diversos como cones, esferas, discos, etc. Cabe observar que os *tokens* não eram representações de números, mas objetos com os quais eram feitas correspondências um a um com insumos do cotidiano a fim de contá-los (uma jarra de óleo era associada a um ovoide, duas jarras de óleo associada a dois ovoides, etc.).

Era um modo de contar concreto; não havia abstração. Os objetos de argila eram usados para representar aquilo que se desejasse contar, e não uma determinada quantidade. Com o desenvolvimento da sociedade, os métodos de utilização dos *tokens* foram evoluindo, o que contribuiu para o surgimento e desenvolvimento do registro dos números: esses *tokens* passaram a ser guardados em pacotes de argilas e, para saber a quantidade de cada tipo de *token* que havia dentro desses pacotes sem quebrá-los, eram feitas marcas diferentes (cada marca correspondente a um tipo de *token*) em sua superfície, tantas quantos fossem os *tokens* dentro do pacote. Mais tarde, perceberam que esses objetos de argila não seriam mais necessários: assim como faziam marcas nos pacotes de argila para representá-los, poderiam simplesmente utilizar essas marcas ao invés dos *tokens*. Mais tarde, essas marcas passariam a ser grafadas em tabletes planos de argila. Aos poucos viu-se que essas marcas poderiam ser usadas para representar coisas de naturezas diferentes, o que iniciou um processo de abstração: nos tabletes de argila, passaram a utilizar ideogramas para indicar o que estava sendo contado, como grãos de trigo por exemplo, junto as marcas que indicavam a quantidade daqueles insumos.

Considerando que os registros históricos mostram que aquela sociedade possuía uma vida econômica muito ativa, o processo de abstração das quantidades se mostrou algo muito útil, pois eles precisariam de muitos símbolos para associar aos diversos objetos e insumos que precisavam contar. Essa substituição dos *tokens* por marcas na argila que os representavam, foi o primeiro passo para a escrita e um grande passo para a representação dos números.

3.1 O sistema numérico babilônico

O sistema numérico utilizado na antiga mesopotâmia possuía apenas dois algarismos: um para a unidade e um para o dez.

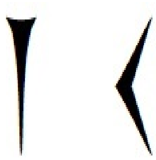

Figura 3.1: Algarismo que representa a unidade (à esquerda) e o algarismo que representa dez unidades (à direita) no sistema sexagesimal posicional mesopotâmico.

Todos os números da unidade até o nove eram representados por repetições desse sinal, denotando um processo aditivo (colocar um sinal junto a outro indica uma soma entre as quantidades que representam). Os números de onze até dezenove eram formados por combinações iniciando com o símbolo representante de dez ao lado das combinações do primeiro sinal que representavam os números da unidade ao nove. O número vinte era representado por dois sinais do número dez, lado a lado, e o processo aditivo de colocar um sinal ao lado do outro segue para representar os números até sessenta, que era representado pelo mesmo sinal da unidade.

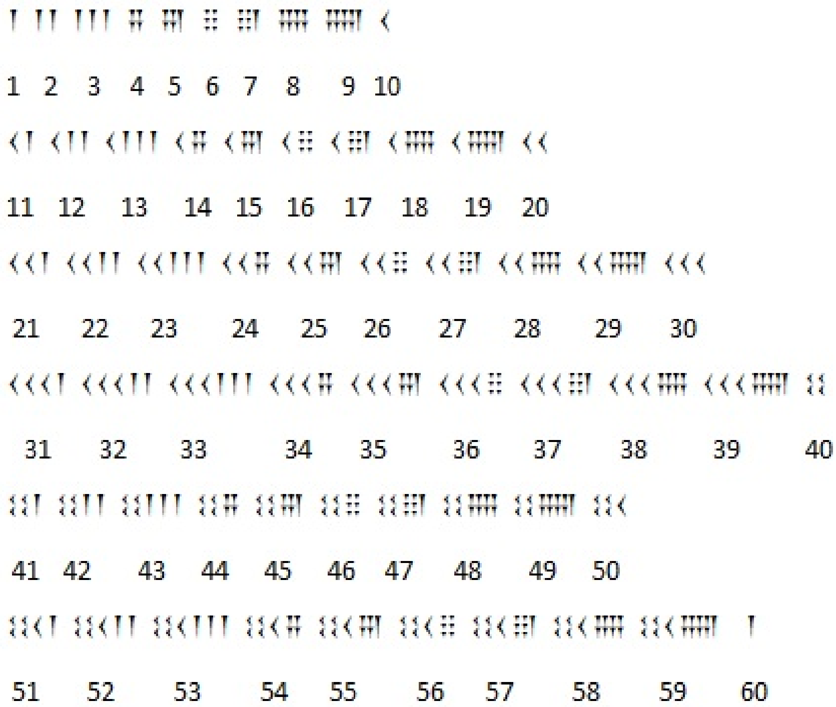

Figura 3.2: Representação dos números 1 a 60 no sistema sexagesimal babilônico.

Era um sistema sexagesimal posicional, isto é, um sistema numérico de base 60 no qual a posição ocupada por um algarismo em um número altera o seu valor. Na verdade, os povos daquela sociedade utilização diferentes sistemas de numeração com diferentes símbolos de acordo com o que queriam contar, mas em geral, para realizar contagens de objetos discretos, o sistema mais utilizado era o de base 60. No entanto, essa notação utilizada nesse sistema possuía dois grandes inconvenientes: a representação extensa dos números e a ambiguidade de algumas representações.

À medida que números maiores são escritos mais símbolos devem ser introduzidos para representá-los (já que utilizar apenas combinações de dois algarismos torna a representação do número demasiadamente extensa). Essa dificuldade é superada atribuindo-se importância à posição que um símbolo ocupa na representação de um número. No entanto, essa mesma solução acaba contribuindo para a ocorrência da segunda dificuldade: distinguir dois números com representações semelhantes.

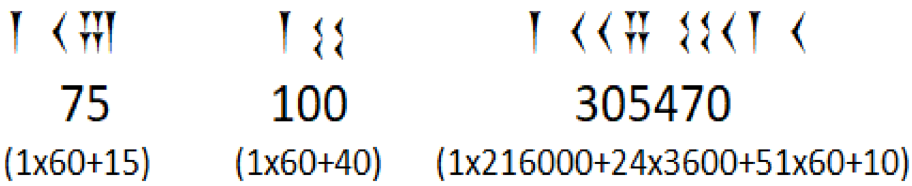

Figura 3.3: Quanto maior o número, mais símbolos é necessário para representá-lo no sistema babilônico e dependendo da posição, um algarismo pode ter valores diferentes: o algarismo que representa a unidade na primeira posição a esquerda na representação do número 75 e do número 100 possui valor 60; esse mesmo algarismo na representação de 305470 no sistema babilônico, possui valor 216000.

No caso da ambiguidade gerada por esse sistema, há registros de algumas maneiras que os povos da mesopotâmia encontraram para tentar resolver o problema: algumas vezes, para diferenciar números com representação iguais eram colocados espaços vazios entre os símbolos. No entanto, essa coluna vazia não tem a mesma função que o zero no sistema decimal posicional, portanto, essa solução não resolve o problema de expressar uma coluna vazia no fim do número, não sendo possível, por exemplo, diferenciar 7200 de 2 e de 120. Além disso, é difícil definir se há uma ou duas colunas vazias entre dois símbolos tornando impossível diferenciar 3601 e 216001, por exemplo, exceto pelo contexto.

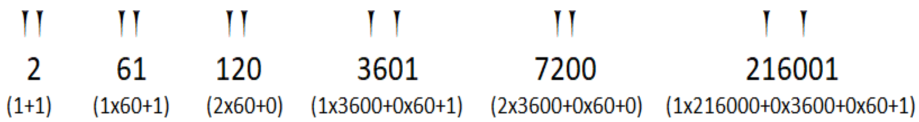

Figura 3.4: Alguns números possuem as mesmas formas de registro no sistema babilônico. Na representação dos números 3601 há uma coluna vazia entre o primeiro e o último algarismo, enquanto na representação do número 216001, há duas, porém é difícil perceber essa sutil diferença.

Apesar dessa limitação, nessa base, os zeros não aparecem com tanta frequência quanto no sistema decimal (é fácil entender quando estamos falando de um número de ordem 1/60 e de outro de ordem 1/3600), portanto supõe-se que, em geral, a identificação do número ao qual a representação se referia era feita pelo contexto dos problemas em que esses números apareciam.

Mais tarde, com o desenvolvimento dos estudos de astronomia, os selêucidas introduziram um símbolo que tinha função de separar os algarismos que representavam números grandes. Esse símbolo era formado por dois riscos (semelhante ao símbolo que representava a unidade) inclinados a um ângulo de aproximadamente 45°. É importante observar que esse símbolo não tinha a mesma função do zero, pois não era utilizado como último algarismo em uma representação e também não era utilizado para representar o resultado de uma operação. Ele era apenas utilizado como separador de algarismos, tendo a mesma função da coluna vazia que os matemáticos babilônicos utilizavam [2].

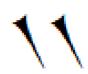

Figura 3.5: Símbolo utilizado pelos selêucidas como "separador" para eliminar problemas de ambiguidade com representações numéricas.

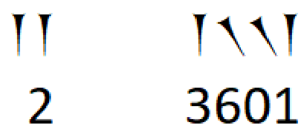

Figura 3.6: Utilização do símbolo separador dos selêucidas para diferenciar as representações dos números 2 e 3601 no sistema numérico babilônico.

Capítulo 4

Antigo Egito

Aproximadamente no mesmo período do surgimento dos registros cuneiformes utilizados pelos povos da mesopotâmia, os antigos egípcios desenvolveram um sistema de numeração de base 10 usando símbolos específicos para a unidade e as primeiras seis potências de dez (ver figura 4.1), e um esquema simples e iterativo para representar os números com esses algarismos.

A unidade era representada por uma barra vertical; o 10 por uma alça [2] (ou um osso de calcanhar invertido [3]); o 100 por uma espiral [2] (ou um laço com o formato da letra "C"[3]); o 1000, uma flor de lótus; 10000, um dedo dobrado; 100000, um sapo [2] (ou um peixe [3]); e 1 milhão, um deus com as mão levantadas[2] (talvez o "deus do Sem-fim"[3]).

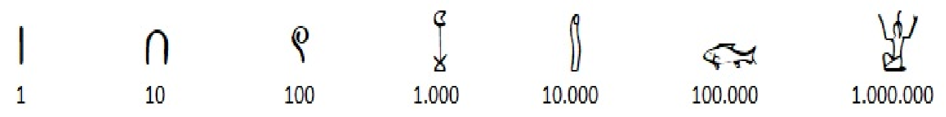

Figura 4.1: Algarismos do sistema de numeração decimal do antigo Egito.

Semelhante ao sistema mesopotâmico, o sistema de numeração do antigo Egito era aditivo, isto é, escrevendo dois símbolos lado a lado temos a representação da quantidade equivalente a soma entre as quantidades representados por eles. Assim, os números de 2 a 9 eram representados pelo número de barras verticais correspondente, escritos lado a lado. Além disso, os números deveriam ser lidos/escritos com os símbolos que representam números maiores na frente dos menores (da esquerda para a direita), e de cima para baixo, caso haja mais de uma linha de números (ver figuras 4.2 e 4.3).

Figura 4.2: Representação do número 2.022 no sistema de numeração do antigo Egito.

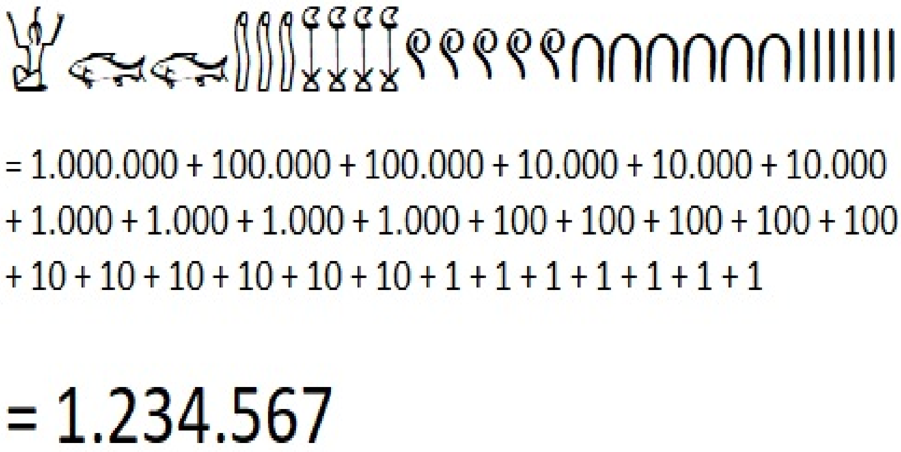

Figura 4.3: Representação do número 1.234.567 no sistema de numeração do antigo Egito.

Utilizando esse sistema de numeração, os antigos egípcios faziam uma matemática essencialmente prática, executando operações aritméticas baseadas em métodos de tentativa e erro. A adição era uma consequência natural do próprio sistema de numeração, visto que para representar um número (diferente da unidade ou de um múltiplo de dez menor que 1000000) bastava agrupar símbolos cujos valores somados equivalem ao número desejado (ver figura 4.4).

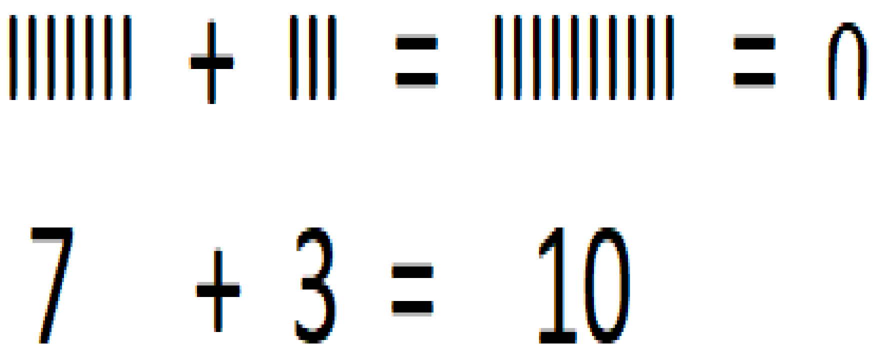

Figura 4.4: A operação $3 + 7 = 10$ no sistema de numeração egípcio. Os sinais $+$ e $+$ foram utilizados juntos com algarismos egípcios apenas para indicar a operação aritmética de soma.

já a multiplicação e a divisão eram efetuadas utilizando processos de duplicação e divisões por 2. Por exemplo, para efetuar a multiplicação 12×27 era realizado o seguinte procedimento:

A primeira linha, indicada pela unidade, corresponde ao fator 12; na segunda linha esse fator é duplicado, assim como a numeração da linha; o processo se repete até que a soma dos números correspondentes a cada linha supere o valor do segundo fator da multiplicação desejada, no caso, 27. Utilizando os algarismos do nosso sistema numérico atual, esse processo seria indicado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c}
1 \text{ ——— } 12 \\
2 \text{ ——— } 24 \\
4 \text{ ——— } 48 \\
8 \text{ ——— } 96 \\
16 \text{ ——— } 192
\end{array}$$

Em seguida selecionamos as linhas cujos números de indicação somam exatamente 27, ou seja, as linhas indicados pelos números 1, 2, 8 e 16 (1 +

$2+8+16 = 27$); o resultado da multiplicação desejada será a soma dos valores a esquerda em cada linha selecionada, isto é, $12 \times 27 = 12+24+96+192 = 324$ [2].

De fato, o algoritmo funciona para o caso do exemplo supracitado, pois:

$$12 \times 27 = 12 \times (1 + 2 + 8 + 16) = 12 + 24 + 96 + 192 = 324$$

Assim, observando que cada número inteiro positivo pode ser escrito na forma $1a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 + \cdots + 2na_n$; $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ e para $1 \leq i \leq n$, cada a_i é igual a 1 ou 0, temos para quaisquer inteiros positivos x e y:

$$1 \text{ —— } x$$

$$2 \text{ —— } 2x$$

$$4 \text{ —— } 4x$$

$$8 \text{ —— } 8x$$

$$\cdots$$

$$2n \text{ —— } 2nx$$

$$\begin{aligned} x \times y &= x \times (1a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 + \cdots + 2na_n) \\ &= xa_1 + 2xa_2 + 4xa_3 + 8xa_4 + \cdots + 2nxa_n \end{aligned}$$

Em alguns problemas era utilizado um método de "falsa posição", onde inicialmente deve-se "chutar"um valor para a solução do problema e através de outros processos conhecidos, junto com o valor da suposta resposta, concluir a verdadeira solução do problema. Como exemplo, podemos citar o problema 25 do papiro de Rhind: "Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?"

Para resolver esse problema, inicialmente, "chutamos"uma solução, por exemplo, 2. Mas, como a metade de 2 é 1, $2 + 1 = 3$ e não 16. Portanto, o valor escolhido não é a solução do problema. No entanto, podemos usar esta falsa solução para encontrar a verdadeira: devemos procurar qual número pelo qual 3 (soma da falsa solução pela sua metade) deverá ser multiplicado para dar 16, e em seguida, multiplicamos tal número por 2 (a falsa solução) e obteremos a solução verdadeira.

Utilizando o mesmo processo de duplicação apresentado no exemplo da multiplicação 12×27, e considerando que a terça parte de 3 é 1, temos:

$$1 \text{ —— } 3$$

$$2 \text{ —— } 6$$

$$4 \text{ ——— } 12$$
$$\frac{1}{3} \text{ ——— } 1$$

Como $3 + 12 + 1 = 16$, selecionamos as linhas que indicam esses valores (as linhas 1, 4 e $\frac{1}{3}$) e somamos os números de indicação dessas linhas, isto é, $1 + 4 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$. Então, $5\frac{1}{3}$ é o numero pelo qual devemos multiplicar 3 para encontrar 16.

$$3 \times (1 + 4 + \frac{1}{3}) = 3 \times 5\frac{1}{3} = 3 + 12 + 1 = 16$$

Então, multiplicamos esse número ($5\frac{1}{3}$) por 2, a falsa solução, e obteremos a verdadeira:

$$1 \text{ ——— } 5\frac{1}{3}$$
$$2 \text{ ——— } 10\frac{2}{3}$$

Selecionamos a linha 2 e obtemos $10\frac{2}{3}$ como resultado de $5\frac{1}{3} \times 2$. De fato, a metade de $10\frac{2}{3}$ é $5\frac{1}{3}$, e a soma desses valores é 16. Portanto, o número procurado é $10\frac{2}{3}$.

É interessante observar que esse sistema de numeração não é útil para representar números muito grandes. Por exemplo, para representar o número 10^{256} seria necessário utilizar 10^{250} símbolos correspondentes ao número 1000000 (pois, $\frac{10^{256}}{10^6} = 10^{250}$). Historicamente, cada cultura constrói um sistema mais adequado às suas necessidades, o que poderia implicar na conclusão que os egípcios não precisavam lidar com números muito grandes no seu cotidiano [2]. No entanto, como veremos mais adiante, os romanos lidavam com números bem grandes e também utilizavam um sistema de numeração aditivo, semelhante ao sistema egípcio [10].

Capítulo 5

Números Pitagóricos

Acredita-se que foi por volta do século IVa.C. que o estudos sobre aritmética do que hoje chamamos de Escola Pitagórica se desenvolveram, baseados, segundo relatos históricos, nos estudos de Pitágoras sobre a aritmética dos mesopotâmicos e Egípcios (principalmente em suas técnicas de medição de terras) [8], embora a escassez das fontes históricas nos permite duvidar da existência de um matemático de nome Pitágoras, sendo possível que tal pessoa seja apenas uma representação de ideias desenvolvidas por estudiosos da época (os quais chamaremos de Pitagóricos) em uma figura humana, feita por algum autor que registrou tais conhecimentos [2].

Os Pitagóricos foram os primeiros a relacionar matemática e filosofia. Basicamente, a ideia da filosofia Pitagórica era de que todas as coisas do universo são constituídas por números, isto é, possuem a propriedade de serem organizadas e divididas para serem contadas. O número é a essência permanente das coisas [8]. Assim, os Pitagóricos tinham uma relação com os números um pouco diferente dos babilônicos e dos egípcios; enquanto estes viam os números como ferramentas para exercer atividades cotidianas de suas culturas, os Pitagóricos os viam como importantes componentes para desvendar o universo. No entanto, não é correto considerar que eles foram os primeiros a tratar o número como um conceito abstrato, pois os Pitagóricos não admitiam separação entre número e corporeidade; os números dos Pitagóricos eram concretos. Tanto que desenvolveram uma notação muito peculiar para os números baseada no conceito de conjunto como uma coleção de objetos materiais, como uma coleção de pedrinhas por exemplo. Por isso, a matemática da escola Pitagórica é conhecida como a “aritmética dos pontinhos”e os números escritos nessa notação são chamados de números figurados [2].

5.1 Números Figurados

Segundo os Pitagóricos todas as coisas do universo são formadas a partir de números. E os números são constituídos por coleções de "uns", ou seja, são formados a partir da unidade. Assim, os números figurados dos Pitagóricos consistiam em coleções de pontos (onde cada ponto representa a unidade) que formavam alguma figura. Esses números possuíam distribuições poligonais bem definidas: lineares, triangulares, quadrados, pentagonais, etc.

Números triangulares - os pontos formam triângulos que representam números da forma $\frac{n(n+1)}{2}$, isto é, um número triangular de ordem n é dado pela soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

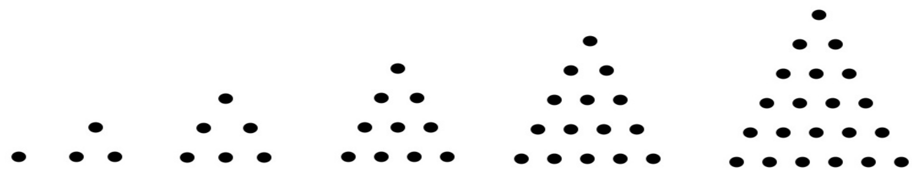

Figura 5.1: Números Pitagóricos triangulares associados aos números 1, 3, 6, 10, 15 e 21 do nosso sistema de numeração atual (sistema decimal).

Números quadrados - os pontos formam quadrados que representam números da forma n^2, isto é, um número quadrado de ordem n é dado pela soma da progressão aritmética $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$.

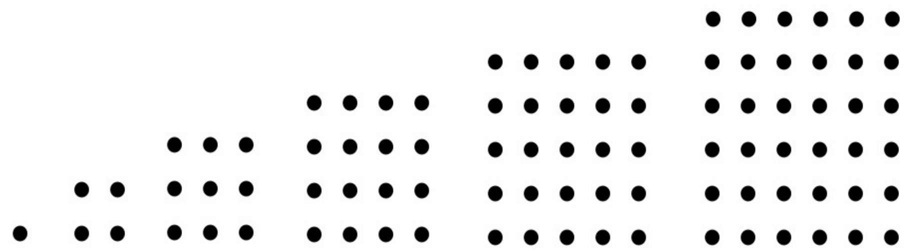

Figura 5.2: Números Pitagóricos quadrados associados aos números 1, 4, 9, 16, 25 e 36 do nosso sistema de numeração atual (sistema decimal).

Números pentagonais - os pontos formam pentágonos que representam números da forma $\frac{n(3n-1)}{2}$, isto é, um número pentagonal de ordem n é dado pela soma da progressão aritmética $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)$.

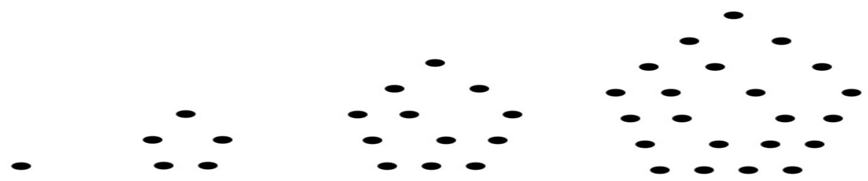

Figura 5.3: Números Pitagóricos pentagonais associados aos números 1, 5, 12 e 22 do nosso sistema de numeração atual (sistema decimal).

5.2 Números Quadrados

Devido a configuração visual dos números quadrados, os Pitagóricos conseguiram obter algumas propriedades sobre eles. Por exemplo: todo numero quadrado pode ser visto como a soma de dois números triangulares sucessivos.

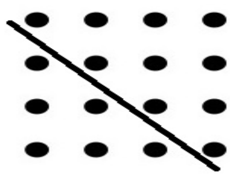

Figura 5.4: O número quadrado 16 pode ser construído utilizando os números triangulares consecutivos 6 e 10.

A construção de números quadrados é dada de maneira bem intuitiva através dos *gnomons* pitagóricos. Os *gnomons* são números ímpares formados pelas diferenças entre números quadrados sucessivos, em formato de “L”invertido [2]. assim, para obter um número quadrado de ordem $n+1$ a partir de um número quadrado de ordem n, basta adicionar um *gnomon* de ordem $n+1$ ao número de ordem n.

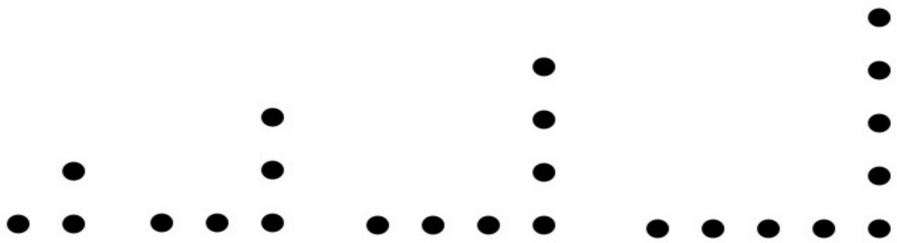

Figura 5.5: *Gnomons* pitagóricos.

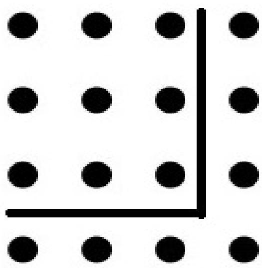

Figura 5.6: Para obter o 16 (número quadrado de ordem 4)a partir do 9 (número quadrado de ordem 3) adicionamos o *gnomon* de 7 pontos (*gnomon* de ordem 3).

Capítulo 6

Números Romanos

A civilização Romana existiu durante 12 séculos, sendo de 753a.C. a 509a.C. como uma Monarquia, de 509 a.C a 27 a.C. como República e como Império durou de 27 a.C. até 476 d.C. No entanto, acredita-se que a origem do sistema de numeração romano data de centenas ou até milhares de anos antes da civilização romana, evoluindo a partir de entalhes em pedras ou argila, de maneira semelhante a que os babilônicos faziam. Os algarismos desse sistema numérico (como o conhecemos atualmente) foram formados a partir de letras do alfabeto latino (O latim vulgar, entre vários dialetos, era uma das línguas mais usuais entre os povos estrangeiros que foram conquistados ou simplesmente migraram e foram absorvidos na sociedade romana), e até os dias de hoje encontramos ocasiões específicas em que utilizamos esses algarismos, como por exemplo, em relógios, numeração de capítulos de livros, depois de nomes de imperadores, reis, rainhas, papas, etc [10].

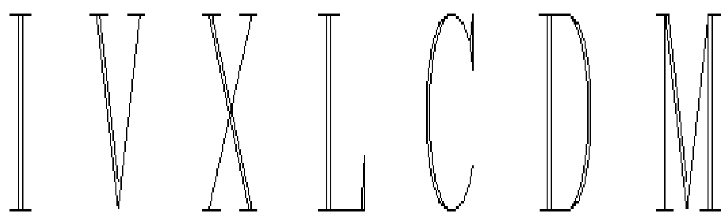

Figura 6.1: Principais algarismos do sistema de numeração romano utilizados nos dias atuais.

Os algarismos mais antigos do sistema de numeração romano são I, V e X que representam respectivamente os números 1, 5 e 10 do nosso sistema de numeração. O símbolo I também foi representado por i e j e o V por v, u e U, depois que o letras minúsculas começaram a serem utilizadas como algarismos desse sistema numérico. Acredita-se que o algarismo romano V teve sua origem como representação de um ângulo agudo formado pela forma de uma mão aberta com o polegar afastado, enquanto o X seria formado pela junção de dois algarismos V opostos um ao outro, representando o seu dobro.

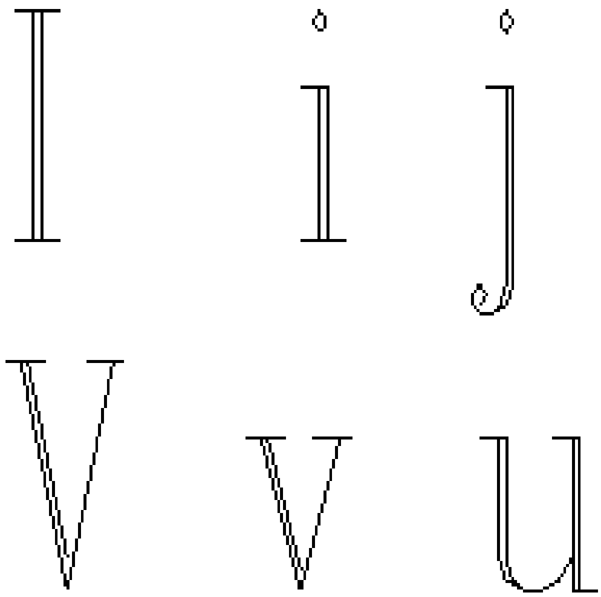

Figura 6.2: Algarismos do sistema de numeração romano utilizados para representar os números 1 e 5 do nosso sistema de numeração.

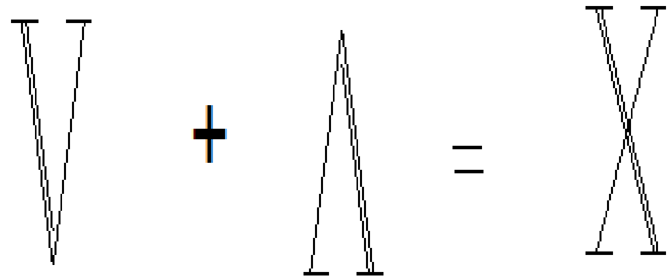

Figura 6.3: O algarismo X teria sua origem a partir da junção de dois algarismos V. Na figura, o símbolo + é utilizado para representar uma junção entre os símbolos V e V invertido, não representa necessariamente uma soma.

O algarismo L que representa o número 50 do nossos sistema de numeração, é uma evolução de um antigo símbolo usado anteriormente nesse sistema (ver figura 6.4). Diferente dos algarismos anteriores, C e M, que representam os números 100 e 1000 do nosso sistema de numeração, respectivamente, não são símbolos primitivos do sistema romano. O algarismo C deriva da palavra *centum* e o M, da palavra *mille*, sendo que este último já teve diversas representações, de maneira que é a partir de uma delas que deriva a representação do número 500 pelo algarismo D (ver figura 6.5) [10].

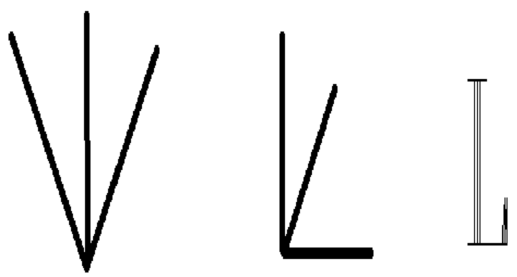

Figura 6.4: A esquerda o símbolo que seria a forma inicial do número 50 no sistema de numeração romano. Ao longo do tempo, por influência do latim e das diversas grafias pelas quais foi representado, acabou se confundindo com a letra "L".

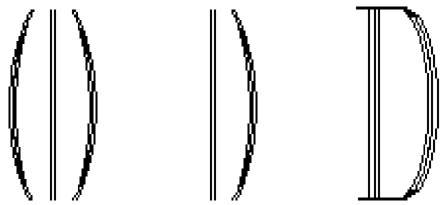

Figura 6.5: A esquerda, uma das representações antigas para o número mil. No centro, o símbolo que representa 500, originado do símbolo anterior ao considerarmos a metade direita, e que evoluiu para a representação pelo letra "D".

O sistema de numeração romano não é posicional e utiliza um princípio aditivo e um principio subtrativo para combinar seus algarismos e representar números diversos. Na representação pelo principio aditivo, considerando a ordem de escrita/leitura da esquerda para a direita, ao escrever um algarismo ao lado de outro de valor menor ou igual, estaremos representando o número correspondente a soma dos valores de tais algarismos:

$$II = 1 + 1 = 2$$

$$XXX = 10 + 10 + 10 = 30$$

$$CLX = 100 + 50 + 10 = 160$$

$$LXXIII = 50 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 73$$

Já na representação de números pelo princípio subtrativo, ao escrever um algarismo ao lado de outro de valor maior que o primeiro, estaremos representando o número correspondente a subtração entre o algarismo de maior valor e o de menor valor:

$$IV = 5 - 1 = 4$$

$$IX = 10 - 1 = 9$$

$$XL = 50 - 10 = 40$$

O princípio subtrativo foi mais utilizados por outros povos que viviam entre os romanos, pois achavam que essa maneira de representar os números era mais fácil, enquanto os romanos utilizavam com mais frequência os números representados através do principio aditivo (os romanos preferiam a escrever $IIII$ a IV, por exemplo) [10]. Não havia uma regra sobre qual princípio utilizar ou um símbolo padrão para algum número, o que faz com que haja mais de uma representação para o mesmo número, como as formas XIX e IXX para o dezenove, por exemplo.

$$XIX = 10 + (10 - 1) = (10 - 1) + 10 = IXX$$

Um grande problema do sistema de numeração romano era a notação de números muito grandes. Vários símbolos foram utilizados como notação especial para representar números como 5000, 10000 e 100000, principalmente durante o período da República Romana. Mas, talvez a melhor solução encontrada para representar números grandes, e que é ensinada nas escolas até hoje, era o recurso de colocar uma barra horizontal sobre determinado número, para representa o produto daquele valor por mil, apesar de tal recurso ter sido mais utilizado para distinguir numerais de palavras durante a idade média (ver 6.7). Mesmo assim, vários símbolos e recursos foram criados ao longo dos anos para tentar contornar os problemas de notação provenientes desse sistema de numeração, variando muito a escrita desses numerais e tornando cada vez mais evidente a insuficiência da numeração romana [10].

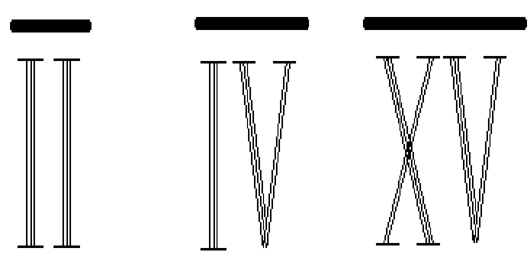

Figura 6.6: Uma notação que foi utilizada no sistema de numeração romano para representar números muitos grandes foi colocar um traço acima dos algarismos de um número para indicar o produto de tal número por mil. Na figura, os números 2000, 4000 e 15000, respectivamente, escritos em algarismos romanos com a utilização desse recurso.

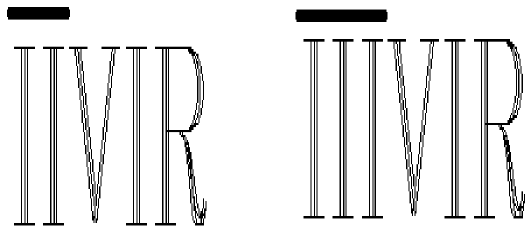

Figura 6.7: A esquerda o termo “dois homens”e a direita o termo “três homens”, escritos utilizando o recurso de colocar um traço acima dos algarismos para diferenciar letras de numerais.

Capítulo 7

Sistema Indo-Arábico

O sistema de numeração que utilizamos atualmente, bem como os algarismos desse sistema, desenvolveram-se de um antigo sistema de numeração decimal dos hindus, inicialmente não posicional, no início da era cristã. No século V d.C., com o desenvolvimento religioso e o estabelecimento do sânscrito clássico como língua culta hindu, muitos trabalhos com regras geométricas, métodos aritméticos e algébricos surgiram naquela cultura, bem como o aperfeiçoamento do seu sistema numérico. Os hindus escreviam números por extenso, em sânscrito. Então, surgiu a ideia de não escrever os nomes das potências de 10, nascendo aí o princípio posicional [11].

No século $VIII$ d.C., os árabes conquistaram a região onde habitavam os povos hindus. Em 773 d.C., sábios indianos foram a Bagdá apresentar a corte árabe seu sistema de numeração e seus métodos algébricos inovadores. Assim, os árabes conheceram o sistema de notação hindu e o incorporou em sua cultura. Com a adoção do sistema hindu pelos árabes, que também assimilaram outras culturas como a dos Egípcios, sumérios e Gregos, tal sistema de numeração foi difundido do pelo Europa, inicialmente introduzido através do Papa Silvestre II por volta do ano 1000, e se consolidando a partir do século $XIII$ através de Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Como essa divulgação pelo mundo conhecido até então se deu a partir da cultura árabe, muito se credita aos árabes a origem do sistema de numeração atual, que na verdade originou-se da antiga cultura hindu, tanto que é comum até os dias de hoje encontrarmos o termo "algarismos arábicos"[11].

7.1 O Desenvolvimento do Sistema de Numeração Hindu e o Surgimento do Zero

O primeiro sistema de numeração hindu constituído por símbolos próprios foi o *Brahmin*. Na verdade, existem registros do uso de algarismos formados apenas por marcas verticais, constituindo um sistema chamado de *Kharosti*, que seria mais primitivo que o *Brahmin*. Ambos os sistemas foram descobertos através de colunas de pedra construídas aproximadamente entre 272 a.C. e 232a.C. [10].

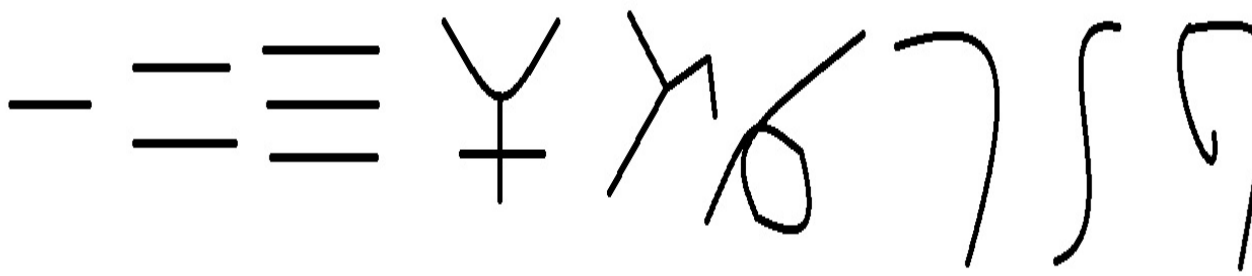

Figura 7.1: Primeiros nove algarismos *Brahmin*

O *Brahmin* era um sistema de numeração primitivo e não posicional muito rudimentar. Porém, no século V, novos signos foram desenvolvidos, de maneira que os primeiros nove algarismos possuíam símbolos próprios e independentes, que não eram compostos por partes menores (como o número 3 que antes era representado por três traços, por exemplo) - ver figura 7.2. Além das unidades simples, cada dezena, centena, milhar e dezena de milhar também ganhou um algarismo em particular, de maneira que agora seria possível representar até o número 99999, visto que o maior algarismo dessa evolução do sistema *Brahmin* correspondia ao número 90000.

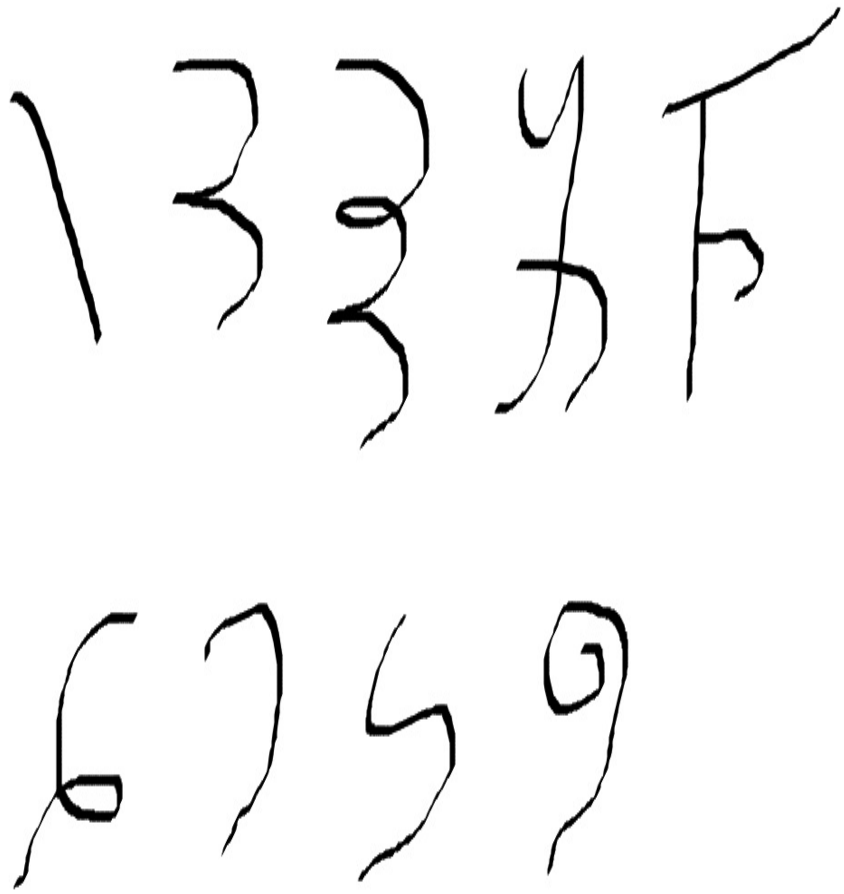

Figura 7.2: Primeiros nove algarismos da primeira evolução do sistema *Brahmin* no século *V* d.C.

Desde o século *IV* d.C., os hindus acostumaram a escrever os números por extenso em sânscrito, língua culta hindu: cada um dos nove primeiros algarismos e as potências de base dez até um bilhão, recebiam nomes específicos (Ver figura 7.3) [11]. Então, para contornar a limitação dos novos algarismos do *Brahmin* de não ser possível expressar todos os números, os hindus continuaram a escrever os números por extenso em sânscrito, simultaneamente com a representação feita pelos novos símbolos. A notação em sânscrito era feita em ordem crescente das potências de sua base (base dez), isto é, começando pela unidade (ver figura 7.4) [11].

eka	dvi	tri	catur	pañca	sat	sapta	asta	nava
1	2	3	4	5	6	7	8	9

dasa	- 10	prayuta	- 1 000 000
sata	- 100	koti	- 10 000 000
sahara	- 1 000	vyarbuda	- 100 000 000
ayuta	- 10 000	padma	- 1 000 000 000
laksa	- 100 000		

Figura 7.3: Nomes em sânscrito atribuídos aos primeiros nove algarismos e às potências de dez até o bilhão, utilizados pelos hindus para escrever os números no sistema de numeração que utilizavam no século IV d.C.

nava sapta sata ca trisahara = "*nove, setecentos e três mil*" (3709)

Ainda no século V d.C., passaram a omitir os nomes dos indicadores das

Figura 7.4: Representação do número três mil setecentos e nove em sânscrito, utilizada pelos hindus no século IV e V. O número era escrito a partir da unidade para as ordens seguintes (dezena, centena, etc.).

bases das potências de dez na notação feita em sânscrito, expressando apenas os nomes dos algarismos de cada ordem das potências de dez (ver figura 7.5).

nava dvi sat sapta = "nove, dois, seis, sete"(7629)

Figura 7.5: Representação do número sete mil seiscentos e vinte e nove em sânscrito, omitindo as ordens das potências de dez, explicitando apenas os nomes dos algarismos de cada ordem (ainda em ordem ascendente das potências de dez).

No entanto, apesar dessa nova forma de indicar os números simplificar bastante a notação, ela apresenta a possibilidade de ambiguidade, pois não haveria símbolo (ou palavra) para representar ausência de unidade em determinada potência decimal, sendo impossível diferenciar números como 31, 301 e 3001.

$$31 = eka\ tri$$
$$301 = eka\ tri$$
$$3001 = eka\ tri$$

A solução encontrada pelos hindus para solucionar o problema foi a utilização da palavra *sunya*, criada para expressar o "vazio"existente em determinada posição de alguns números. Assim, a ordem que estivesse vazia seria representada pela palavra *sunya*, e simbolicamente por um ponto, que mais tarde foi substituído por um círculo, sendo essa forma utilizada até os dias de hoje. Os hindus acabavam de inventar o zero [11].

$$31 = eka\ tri$$

$$301 = eka\ sunya\ tri$$

$$3001 = eka\ sunya\ sunya\ tri$$

sunya sunya sunya tri dvi dasa = "vazio vazio vazio três dois um "(12300

Figura 7.6: Representação do número cento e vinte e três mil em sânscrito, utilizando a palavra *sunya* para representar ausência de algarismos nas ordens da unidade, dezena e centena, omitindo as ordens das potências de dez, explicitando apenas os nomes dos algarismos de cada ordem e escrevendo em ordem ascendente das potências de dez. Dessa maneira, os hindus conseguiam representar os números sem possibilidades de ambiguidade.

7.2 A Contribuição dos Árabes

Com a expansão de seu império e a conquista do território Hindu no século $VIII$ d.C., os árabes tiveram acesso a variados conhecimentos matemáticos. Entre as principais contribuições dos Árabes para o desenvolvimento da ciência e da matemática, podemos destacar a introdução da ciência oriental na Europa medieval através de traduções de obras do passado, acrescentando vários comentários e misturando métodos gregos, hindus e até procedimentos utilizados pelos babilônicos.

Essa amálgama de conhecimentos de diversas culturas, também foi implementada ao sistema de numeração dos hindus. Após se apropriarem dos algarismos hindus, os árabes criaram novos símbolos para representar os primeiros nove algarismos e o zero. Alguns deles ainda se pareciam com os símbolos inicias dos hindus (ver figura 7.7).

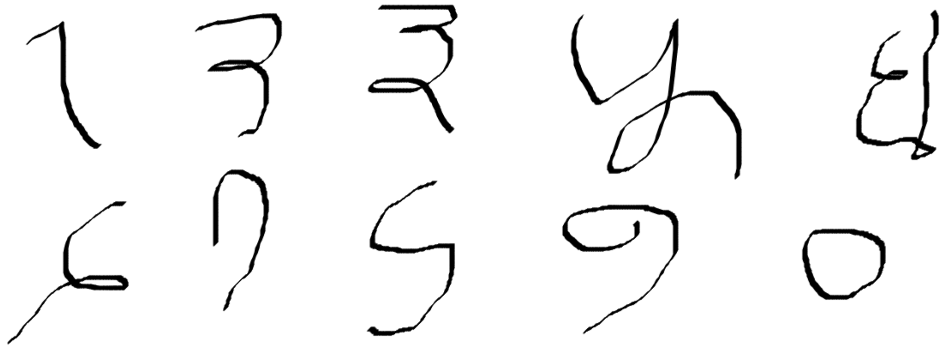

Figura 7.7: Na segunda metade do século $VIII$, ao adotarem o sistema de numeração hindu, os árabes criaram novos algarismos: os números 2, 3, 6, 7, 8 e 9 ainda se pareciam com os símbolos originais usados pelos hindus. Entre esses novos algarismos podemos observar a utilização do círculo para representar o zero.

Conforme o novo sistema de numeração foi sendo difundido na cultura árabe, os algarismos hindus foram sofrendo modificações devido a fatores étnicos, como por exemplo, a escrita árabe que é realizada na vertical, da direita para a esquerda.

Com essas modificações, e devido a extensão do império árabe, surgiram dois principais conjuntos de algarismos: os algarismos Hindi (figura 7.8), utilizados pelos árabes orientais, e os algarismos de Ghobar (figura 7.9), utilizados pelos árabes ocidentais. Os algarismos utilizados no nosso sistema de numeração atual derivaram dos algarismos de Ghobar [11].

Figura 7.8: Algarismos Hindi: Grafia modificada dos algarismos hindus difundida através das províncias árabes do Oriente Próximo. Estas formas (que representam respectivamente os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0) ainda são utilizadas em todos os países do Golfo Pérsico, Egito, Turquia, Síria, Afeganistão, Paquistão e em várias regiões da Índia muçulmana [11].

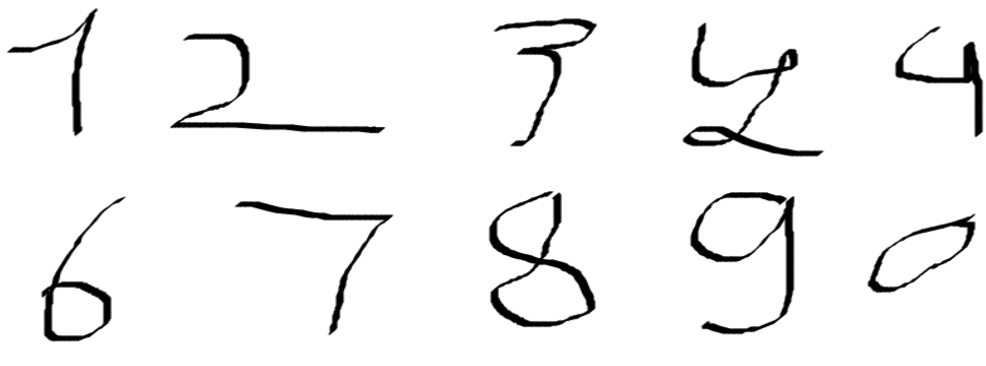

Figura 7.9: Algarismos de Ghobar: modificações dos algarismos hindus utilizadas pelos Árabes Ocidentais (que representam respectivamente os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0), e que deram origem as formas atuais dos algarismos do sistema indo-arábico [11].

7.3 Al-Khowarizmi

Mohamed Ibn Mussa Al-Khowarizmi foi o matemático de maior destaque da civilização Árabe-Islâmica, no que se refere a divulgação do sistema de numeração hindu pelo mundo, pois foi o autor da obra "Tratado de Aritmética"(a versão original é dada como perdida, porém a conhecemos por traduções latinas, conhecida por "Numero Hindorum"), onde a numeração decimal posicional e os métodos de cálculo hindu foram explorados pela primeira vez, com explicações detalhadas e exemplos diversos. Além disso, foi a partir de seu nome que derivaram a palavra "algarismo", para se referir aos símbolos utilizados em um determinado sistema de numeração, e a palavra "algoritmo", utilizada para se referir aos processos operatórios entre números [11].

7.4 Expansão dos Algarismos Indo-Arábicos pela Europa

No século X, o monge francês Gerbert d'Aurillac (945d.C. - 1003 d.C.), eleito papa em 999d.C. sob o nome de Silvestre II, torna-se pioneiro na introdução dos Algarismos de Ghobar na Europa. Ele estudou o sistema de numeração hindu e a aritmética árabe quando esteve na Espanha no período de 967d.C. a 970d.C. e no período de 972d.C. a 987d.C. dirigiu a escola diocesana de Reims, exercendo grande influência nos estudos de matemática e ciência no ocidente.

No entanto, esse primeiro contato com os algarismos utilizados pelos árabes deu-se com certa relutância, pois a igreja católica romana não aceitou facilmente a superioridade da nova notação. Os algarismos introduzidos por Gerbert foram utilizados inicialmente para simplificar o uso do ábaco; as pedras das colunas do ábaco foram substituídas por fichas com os algarismos arábicos de 1 a 9 gravados nelas. Não havia necessidade da utilização do zero para efetuar as operações aritméticas no ábaco de Gerbert.

Durante as cruzadas (1096d.C. - 1276d.C.) o contato com outras culturas, incluindo a cultura árabe, proporcionou aos europeus uma maior aproximação com o sistema indo-arábico e os métodos de cálculo de Al-Khowarizmi. Nesse mesmo período, os conhecimentos de obras de Euclides, Aristóteles, Al- Khowarizmi e outros chegaram a Europa. Aos poucos, com o acesso cada vez maior a conhecimentos de outras culturas, a utilidade do sistema indo-arábico foi ganhando notoriedade pelos europeus.

Em 1202d.C., Leonardo de Pisa (conhecido como Fibonacci) publica seu famoso livro *Liber Abacci* que explica como utilizar os algarismos hindus e o zero para representar qualquer número e também como utilizar esses algarismos na aritmética, se tornando outra importante figura para a difusão do sistema indo-arábico.

Somente no século XVI, após várias mudanças em suas formas devido aos intercâmbios culturais entre árabes e europeus (e também devido ao surgimento de uma classe emergente - a burguesia), os algarismos indo-arábicos foram adotados definitivamente na Europa, com a aparência definitiva que utilizamos nos dias de hoje [10] [11].

Capítulo 8

Notações de Frações ao Longo da História

Os Egípcios foram provavelmente os primeiros a utilizar frações em seu sistema de numeração. Eles tinham uma maneira muito singular de representar as frações. Embora algumas delas como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ possuíssem símbolos específicos (ver figura 8.1), havia uma "regra geral" para a representação das frações unitárias: eram representadas pela composição de um oval colocado sobre um número que representa a quantidade em que foi dividido o todo (que hoje seria o denominador da fração).

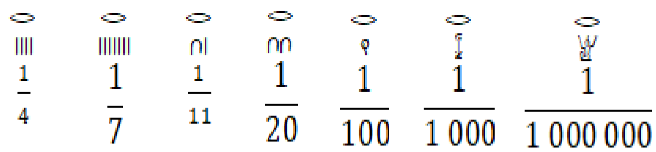

Figura 8.1: Representações de algumas frações unitárias no sistema numérico do antigo Egito.

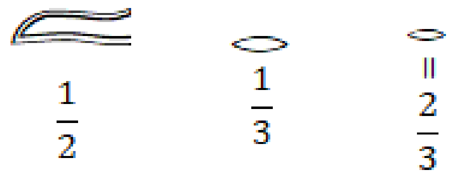

Figura 8.2: Algumas frações utilizadas no sistema de numeração do antigo Egito eram representadas por símbolos específicos que fugiam da regra de notações de frações.

Basicamente, as frações no sistema egípcio eram representadas como somas de frações unitárias. Por exemplo:

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Assim, para representar frações como essas, basta escrever os símbolos correspondentes às frações unitárias que somam o valor da fração, um ao lado do outro (ver figura 8.3).

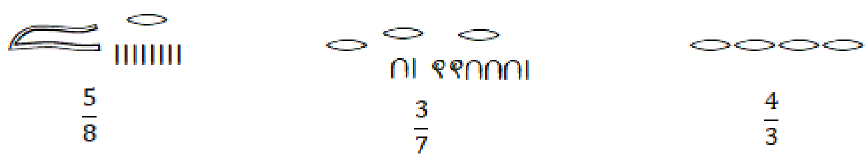

Figura 8.3: Representações de algumas frações no sistema numérico do antigo Egito.

Os babilônicos também conheciam as frações, e as utilizavam em determinadas situações econômicas, como a distribuição de heranças, por exemplo [12]. Suas frações eram unitárias com denominadores com potências de base

60, que eram utilizadas para expressar números decimais. No entanto, embora também utilizassem o princípio posicional nos números fracionários, os babilônicos não possuíam em seu sistema de numeração uma notação própria para as frações: a notação utilizada para representar $2 \times (60) + 2$ era a mesma para $2 \times (60)^{-1} + 2 \times (60)^{-2}$, por exemplo, sendo eliminada a ambiguidade apenas pelo contexto (ver figura 8.4) [3].

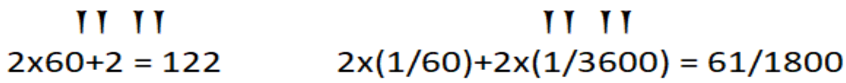

Figura 8.4: A notação de $2 \times (60)^{-1} + 2 \times (60)^{-2}$ era a mesma para $2 \times (60) + 2$ no sistema de numeração babilônico; esse sistema numérico não possuía notação específica para as frações.

Já no sistema de numeração romano, as frações eram representadas em um "subsistema"duodecimal: eram unitárias e possuíam denominador 12 constante, provavelmente devido ao *As*, moeda de cobre romana que era dividida em doze *unciae*. Cada uma das frações de $\frac{1}{12}$ até $\frac{12}{12}$ recebia um nome especial, relacionado a uma moeda romana:

$$\frac{1}{12} = \textit{unciae}$$
$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \textit{sextantis}$$
$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \textit{quadrantis}$$
$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \textit{trientis}$$
$$\frac{5}{12} = \textit{quincuncis}$$
$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \textit{semissis}$$
$$\frac{7}{12} = \textit{septuncis}$$
$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \textit{bessis}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \textit{ dodrantis} \text{ ou } \textit{nonuncii}$$
$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \textit{ dextantis} \text{ ou } \textit{decuncis}$$
$$\frac{11}{12} = \textit{ deuncis}$$
$$\frac{12}{12} = 1 = \textit{ assis}$$

Simbolicamente, essas frações eram representadas por combinações dos símbolos S e $\cdot$, através de um sistema aditivo. As frações de $\frac{1}{12}$ até $\frac{5}{12}$ eram representadas por um ponto $(\cdot)$ para cada unidade do numerador da fração (considerando o denominador 12), a fração $\frac{1}{2}$ era representada pela letra S, e as frações de $\frac{7}{12}$ até $\frac{11}{12}$ eram representadas pela letra S acompanhada de pontos $(\cdot)$, correspondendo ao numerador da fração com denominador 12 (como se o S correspondesse a 6 e cada ponto $(\cdot)$ a 1) [16]:

$$\frac{1}{12} = \cdot$$
$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \cdot\cdot$$
$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \cdot\cdot\cdot$$
$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$\frac{5}{12} = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = S$$
$$\frac{7}{12} = S\cdot$$
$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = S\cdot\cdot$$
$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = S\cdot\cdot\cdot$$
$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = S\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$\frac{11}{12} = S\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Com seu sistema de numeração decimal posicional, os hindus representavam frações de maneira prática, escrevendo um numero acima do outro, semelhante a notação atual das frações, porem sem a barra. A barra que separa o numerador e o denominador na notação atual de frações teria sido introduzida pelos árabes por volta do ano 1000. Já os termos "numerador"e "denominador"só foram definidos apos a notação atual se consolidar. Tais termos teriam sido criados pelo matemático francês Nicole Oresm (1323-1382) [12].

Além disso, os hindus e os árabes evitavam as frações impróprias, escrevendo o que hoje chamamos de números mistos, a parte inteira seguido de uma fração própria.

Assim como nos sistemas de numeração mais antigos (e talvez por influencia delas na cultura árabe), as frações unitárias foram mais utilizadas na aritmética realizada com algarismos indo-arábicos até o início do século XVI. Inclusive, em seu famoso "Liber Abacci", Fibonacci utilizou frações unitárias e descreveu maneiras de representar números fracionários como somas de frações unitárias [3].

Mas, ainda no século XVI, surgem o matemático árabe Al-Kashi (1380-1429) e o matemático francês François Viète (1540-1603) como precursores do uso das frações decimais; Al-Kashi teria sido o "inventor"das frações decimais por ser o primeiro a sugerir que seu uso facilita a resolução de problemas com casas decimais exatas, e Viète também é lembrado por recomendar insistentemente o uso das frações decimais. No entanto, somente com a obra "De Thiende"(1585) do matemático belga Simon Stevin (1548-1620), ocorreu a popularização do uso das frações decimais [3] [12].

8.1 A Notação Decimal de Stevin

Em sua obra "De Thiende"(1585), o matemático belga Simon Stevin (1548-1620) apresenta de forma detalhada uma notação para representar as frações decimais escritas em uma forma decimal, além de regras para efetuar operações aritméticas utilizando essa notação. O livro é dividido em duas partes: na primeira são apresentadas quatro definições cujo objetivo é apresentar ao leitor os números decimais e a notação utilizada na obra, enquanto a segunda parte trata das operações elementares com números decimais [14] [15].

A notação de Stevin consiste em representar a parte inteira e a ordem decimal de cada algarismo do numeral da seguinte maneira [14]:

A parte inteira do numeral é escrita com o símbolo (0) à direita. Por exemplo, o número inteiro 2022 é denotado por

$$2022(0)$$

O símbolo (1) é escrito à direita do algarismo que representa o décimo (chamado por stevin de *eerfte* [15]). Por exemplo, a fração decimal $\frac{3}{10}$, cuja forma decimal na notação atual é $0,3$ é denotada por

$$3(1)$$

O símbolo (2) é escrito à direita do algarismo que representa o centésimo (chamado por stevin de *tweeden*[15]). Por exemplo, a fração decimal $\frac{7}{100}$, cuja forma decimal na notação atual é $0,07$ é denotada por

$$7(2)$$

O símbolo (3) é escrito à direita do algarismo que representa o milésimo (chamado por stevin de *derden*[15]). Por exemplo, a fração decimal $\frac{5}{1000}$, cuja forma decimal na notação atual é $0,005$ é denotada por

$$5(3)$$

O símbolo (4) é escrito à direita do algarismo que representa o décimo de milésimo (chamado por stevin de *vierden*[15]), e assim por diante. Por exemplo, a fração decimal $8\frac{937}{1000}$, cuja forma decimal na notação atual é $8,937$ é denotada por

$$8(0)9(1)3(2)7(3)$$

As operações de adição e subtração utilizadas em "De Thiende"com a notação proposta por Stevin é realizada de maneira muito semelhante às operações de adição e subtração realizadas com a notação atual de números decimais. Assim como no modelo atual, em que os números são dispostos de maneira que a vírgula e as casas decimais de cada termo fique uma sobre a outra, na obra de Stevin, essas operações são realizadas de maneira que cada ordem decimal fique uma sobre a outra. Por exemplo, para efetuar a adição dos números 27(0)8(1)4(2)7(3), 37(0)6(1)7(2)5(3) e 875(0)7(1)8(2)2(3), realizamos o procedimento da figura 8.5, somando as parcelas como números inteiros e obtendo como resultado o número expresso por 941(0)3(1)0(2)4(3) na notação decimal de Stevin [15].

(0)	(1)	(2)	(3)
27	8	4	7
37	6	7	5
875	7	8	2
941	3	0	4

Figura 8.5: Algoritmo da soma dos números 27(0)8(1)4(2)7(3), 37(0)6(1)7(2)5(3) e 875(0)7(1)8(2)2(3).

Também é indicado como proceder nos casos de operações de adição e subtração entre números com quantidades de casas decimais diferentes. Semelhante à maneira como são realizadas tais operações com a notação atual, Stevin indica que as casas faltantes devem ser completadas com zeros. Por exemplo, para efetuar a operação de adição entre os números 8(0)5(1)6(2) e 5(0)7(2), deve-se representar o segundo número mencionado anteriormente por 5(0)0(1)7(2) e realizar o procedimento apresentado na figura 8.6, somando as parcelas como números inteiros e obtendo como resultado o número expresso por 13(0)6(1)3(2) na notação decimal de Stevin [15].

(0)	(1)	(2)
8	5	6
5	0	7
13	6	3

Figura 8.6: Algoritmo da soma dos números 8(0)5(1)6(2) e 5(0)7(2).

Assim como a adição e a subtração, a multiplicação entre números escritos na notação decimal proposta por Stevin é realizada de maneira semelhante ao modo como multiplicamos números decimais na notação atual. Os fatores devem ser multiplicados como se fossem números inteiros, e após obter o produto, deve-se somar o valor numérico da última ordem decimal à direita de cada fator. Essa soma corresponderá a última ordem decimal à direita do último algarismo do produto encontrado, e os demais algarismos, da direita para a esquerda, recebem à direita a notação correspondente à ordem decimal seguinte, em ordem decrescente. Por exemplo, para efetuar a multiplicação entre 32(0)5(1)7(2) e 89(0)4(1)6(2), efetuamos a multiplicação entre os inteiros 3257 e 8946:

$$3257 \times 8946 = 29137122$$

Em seguida, para escrever esse produto na notação decimal de Stevin, efetuamos a soma entre as últimas ordens decimais a direita de 32(0)5(1)7(2) e 89(0)4(1)6(2), no caso, (2) e (2), que somam (4). Portanto, a direita do último algarismo do produto encontrado devemos escrever (4), (3) a direita do penúltimo, e assim por diante, obtendo o número 2913(0)7(1)1(2)2(3)2(4) [15].

Semelhante a operação de multiplicação, a divisão entre números expressos com a notação de Stevin deve ser efetuada inicialmente como uma divisão entre números inteiros, omitindo as representações decimais. Após obter o quociente, deve-se subtrair o valor numérico da última ordem decimal à direita do divisor do valor numérico da última ordem decimal à direita do dividendo. Essa diferença corresponderá a última ordem decimal à direita do último algarismo do quociente encontrado, e os demais algarismos, da direita para a esquerda, recebem à direita a notação correspondente à ordem decimal seguinte, em ordem decrescente. Po exemplo, para efetuar a divisão de 3(0)4(1)4(2)3(3)5(4)2(5) por 9(1)6(2), efetuamos a divisão de 344352 por 96:

$$344352 \div 96 = 3587$$

Em seguida, para escrever o quociente na notação decimal de Stevin, subtraímos a última ordem decimal a direita de 3(0)4(1)4(2)3(3)5(4)2(5) , que é (5), de (2) que é a última ordem decimal a direita de 9(1)6(2), obtendo (3). Portanto, a direita do último algarismo do quociente encontrado devemos escrever (3), a direita do penúltimo devemos escrever (2), e assim por diante, obtendo o número 3(0)5(1)8(2)7(3).

Porém, duas observações sobre a operação da divisão são apresentadas em “De Thiende”: no caso da última ordem decimal à direita do divisor ser maior que a última ordem decimal do dividendo, deve-se acrescentar uma quantidade de zeros equivalente a diferença entre essas ordens a direita do dividendo e efetuar a divisão como uma operação entre inteiros. Por exemplo, para efetuar a divisão de 7(2) por 4(5), devemos acrescentar três zeros após o algarismo 7 e efetuar a divisão de 7000 por 4.

$$7(2) \div 4(5) = 7000 \div 4 = 1750(0)$$

A segunda observação é referente aos casos em que o quociente não pode ser expresso apenas por números inteiros em uma divisão cujo divisor possui uma ordem decimal maior que o dividendo, ou seja, casos em que o resultado da divisão é uma dízima periódica. Nesse caso, Stevin indica que deve-se representar o quociente com quantas casas decimais for conveniente e omitir as demais casas, apresentando a última ordem decimal com uma fração correspondente ao resto da divisão sobre o divisor. Por exemplo, na divisão de 4(1) por 3(2) obtemos a dízima periódica $13,333...$, escrita com a notação atual. De acordo com a observação anterior, o procedimento para efetuar essa divisão indicado em "De Thiende"consiste em acrescentar um zero ao algarismo 4 e efetuar a divisão 40 por 3. Essa divisão inteira sempre apresentará resto 1, portanto, devemos escrever uma quantidade de casas decimais conveniente e, na última representação decimal, escrever a fração $\frac{1}{3}$ [15].

$$4(1) \div 3(2) = 40 \div 3 = 13(0)3(1)3(2)\frac{1}{3}(3)$$

A notação apresentada por Stevin em "de Thiende"foi um importante avanço na representação dos números, pois além de popularizar o uso das frações decimais, foi a primeira vez que as frações puderam ser representadas em uma forma decimal. Ao longo dos anos, outras notações para representar frações em forma decimal surgiram, mas rapidamente caiam em desuso, até a consolidação da notação atual usando vírgula (ou ponto) nos números decimais. Essa notação geralmente é associada a John Napier (1550-1617), pois exigia seu emprego em sua obra, embora não haja consenso entre os historiadores da matemática sobre quem foi o primeiro a utilizar tal notação [14].

Capítulo 9

Números Irracionais

Os números irracionais como são conhecidos atualmente e sua representação decimal em dízimas não periódicas são uma construção recente na matemática, datando do final do século XIX para o início do século XX. No entanto, sabe-se que desde tempos remotos os matemáticos precisaram lidar com conceitos relacionados aos números irracionais como a ideia de incomensurabilidade por exemplo [18].

É comum encontrarmos citações à escola pitagórica e os estudos sobre a diagonal do quadrado, remontando à Grécia do século VI a.C., quando procuramos sobre a descoberta dos números irracionais. Também é muito recorrente encontrarmos afirmações sobre uma crise na matemática daquela época ocasionada pela descoberta de tais números. Na verdade, como veremos a seguir, ao longo da história, os irracionais foram tratados como se não fossem números, porém necessários nas soluções de problemas específicos.

Uma das histórias mais conhecidas sobre a descoberta dos números irracionais diz respeito ao cálculo da medida da diagonal do quadrado cujo lado possui medida igual a uma unidade. De acordo com o famoso teorema de Pitágoras, o valor da medida de tal diagonal deve ser $\sqrt{2}$, um valor até então desconhecido. Supõe-se, então, que tal número seja da forma p/q, com p e q inteiros, primos entre si. Então:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{2} = p \Rightarrow q^2 2 = p^2$$

Logo, p^2 é par, e portanto, p também deve ser par, isto é, $p = 2k$ para algum k inteiro. Então:

$$p^2 = (2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

Logo, q^2 é par, e portanto, q também deve ser par, mas isto é absurdo, pois estamos supondo p e q primos entre si, portanto não podem ser ambos divisíveis por 2. Logo, o valor $\sqrt{2}$ não pode ser expresso como uma razão entre dois números inteiros. E assim os Pitagóricos descobriram que a razão entre o lado de um quadrado e sua diagonal nem sempre poderá ser expressa por uma razão entre inteiros, sendo tais segmentos chamados de incomensuráveis e tal razão, de irracional [17].

Apesar da descoberta da demonstração anterior ser constantemente creditada à escola Pitagórica, não se tem certeza sobre a relação entre o teorema de Pitágoras e a descoberta da incomensurabilidade, pois os chineses ja conheciam o teorema antes e não concluíram a existência de números irracionais. Além disso, trabalhos produzidos no início do século XX consolidaram a crença de que essa descoberta pela escola Pitagórica causou um escândalo lógico na matemática da época, sendo esse novo conhecimento mantido em segredo e alvo de tentativas de descredibilização durante muito tempo (Embora haja controversas - ver "20000 Léguas Matemáticas, Coleção Ciência e Cultura, A.K. Dewdney). Alguns relatos sobre a descoberta da incomensurabilidade que a atribuem ao pitagórico Hípaso de Metaponto dizem que ele foi expulso da escola Pitagórica e condenado a morte (relatos esses de veracidade pouco provável).

O que se sabe na verdade, é que a descoberta da incomensurabilidade significou o surgimento de novos estudos, descobertas e desenvolvimentos na matemática. Como vimos anteriormente, a matemática da escola Pitagórica era essencialmente material e não abstrata. Portanto, acredita-se que a descoberta da incomensurabilidade aconteceu no campo da geometria, relacionada a possibilidade de relacionar grandezas como a razão entre números inteiros.

Com a expansão do Império Árabe, vários conhecimentos de outras culturas foram absorvidos pela ciência desse povo, incluindo as descobertas sobre incomensurabilidade. Assim, os Árabes já admitiam números irracionais como solução de equações. Tais números foram traduzidos do grego "*alogos*"(que significa "sem razão", mas também pode ter o sentido de "inexprimíveis") como "mudos"para os árabes, e ficaram conhecidos nas versões latinas das traduções árabes como "surdos".

Com a tradução dos trabalhos gregos pelos árabes, muitos conhecimentos foram difundidos pela Europa. Durante o século XVI, os irracionais apareciam frequentemente como solução de equações, e eram expressos por aproximações de somas infinitas. Por exemplo, para representar a raiz da equação $x^2 = 2$ (que hoje é escrita como $\sqrt{2}$), Bombeli propôs seguinte aproximação:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Bombeli sabia que a raiz da equação deveria ser um valor entre 1 e 2, portanto, representando a raiz da equação por x (utilizaremos as notações e manipulações algébricas atuais para apresentar as ideias da resolução do problema para facilitar a compreensão do leitor) pode-se escrever $x = 1 + (x-1)$, isto é, a raiz pode ser representada pela unidade mais a diferença entre esse valor e 1. Além disso,

$$x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 2 - 1 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = x + 1$$

Então,

$$\frac{1}{x-1} = x + 1 = 1 + (x-1) + 1 = 2 + (x-1)$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{2 + (x-1)}$$

Substituindo o valor de $x-1$ no denominador infinitamente temos:

$$x - 1 = \frac{1}{2 + (x-1)} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+(x-1)}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}$$

Assim, a raiz da equação é dada por:

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}}$$

No entanto, ainda não havia uma definição precisa sobre tais números. Na verdade, sequer havia a certeza se poderiam ser considerados números [2]. Durante muito tempo, na Idade Média pelos árabes e na Europa durante o Renascimento e até o século $XVIII$, os números irracionais foram percebidos como necessários, mas, ao mesmo tempo, não eram vistos como números; apenas aceitava-se a possibilidade de manipula-los da mesma maneira que os irracionais [18]. No entanto, aos pouco, novos desenvolvimentos a respeito dos irracionais foram surgindo.

Com a publicação da obra de Simon Stevin, "*De Thiende*", em 1585, e a popularização de sua notação decimal para representar frações decimais (apresentada no capítulo anterior), surgiu a possibilidade de aproximar os irracionais pelos racionais de maneira mais evidente, visto que, com a notação de Stevin, podemos acrescentar casas decimais em um número escrito nessa notação. Com o desenvolvimento da representação decimal com uso de vírgula, aparece a ideia de que entre dois números quaisquer pode-se encontrar um terceiro, aumentando o número de casa decimais [2]. A representação decimal foi fundamental para a aceitação dos irracionais como números.

Utilizando a notação atual, definimos um número racional como todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros, com $b \neq 0$. A representação decimal desses números, também utilizando a notação atual, é finita se e somente se b possui apenas 2 e 5 como fatores primos. Caso contrário, a representação decimal será periódica infinita, isto é, da primeira casa decimal até a casa decimal de ordem n, para n tão grande quanto se queira, obtemos um bloco que se repete após a vírgula na representação decimal do número, infinitamente. Tal representação é chamada atualmente de dízima periódica. Cabe também ressaltar o caso das dízimas periódicas compostas, que são as representações decimais periódicas infinitas de números racionais, que possuem uma parte não-periódica. Nesses casos, os blocos que se repetem iniciam a partir da k-ésima casa decimal, para algum k inteiro, $k > 1$. Em suma, um número é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica [18].

Assim, pela definição anterior e pela analise feita anteriormente sobre a descoberta e o desenvolvimento dos números irracionais ao longo da história na matemática, podemos concluir que a representação decimal de um número irracional deve ser infinita e não periódica. Tais representações são conhecidas atualmente como dízimas não periódicas. Isto nos leva as definições atuais mais comuns dos números irracionais: "são números que não podem ser representados como frações de inteiros"; "são números cuja representação decimal é infinita e não-periódica"; "são números reais que não são racionais"[18].

É interessante observar que, mesmo atualmente existindo várias definições para os números irracionais, tais números ainda são definidos pelo que não são; embora finalmente sejam tratados como números e não mais como valores a serem negados, os irracionais ainda são definidos por não se encaixar na definição de outros números mais conhecidos, e não por suas próprias características. Uma grande evidência desse fato é a representação do conjunto dos irracionais feita por alguns autores como a diferença entre o símbolo que representa os reais e o símbolo que representa o conjunto dos números racionais (ver figura 9.1).

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Tal simbologia corresponde a definição dos irracionais como " números reais que nãos são racionais", uma definição mais utilizada na matemática

Figura 9.1: Símbolo do conjunto dos números irracionais utilizado por alguns autores, representando o conjunto dos irracionais como a diferença entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos números racionais.

mais avançada, mas que gera uma circularidade que acaba por não definir satisfatoriamente nem os reais nem os irracionais:

> O que são números irracionais? → São números reais que não são racionais → O que são números reais? → É a união dos números racionais com os números irracionais → O que são números irracionais? [18]

Para evitar tal circularidade, e também para conferir um aspecto mais rigoroso, veremos a seguir alguns procedimentos para definir os números reais sem mencionar os irracionais.

Capítulo 10

Números Reais

Com o século XIX veio a consolidação do rigor matemático e o estabelecimento da matemática "pura". Alguns matemáticos perceberam então a necessidade de definir os números de maneira mais rigorosa. Naquele momento histórico, ocorreu o surgimento e aprofundamento de diversos problemas sobre funções, limites, derivadas de curvas, convergências de séries e, principalmente, distribuição de números reais na reta numérica, que motivaram o questionamento sobre a definição, com rigor, do conjunto dos números reais e suas propriedades, para que os estudos sobre novos assuntos e problemas matemáticos emergentes pudesse evoluir. Até então, não havia preocupação com tal definição, pois, de modo geral, acreditava-se que a reta contivesse todos os números reais, isto é, os números reais eram considerados dados.

Como exemplo, podemos citar Cantor, que a partir de 1870 trabalhou com o problema das séries de Fourier, investigando a série trigonométrica. Em determinado momento, Cantor percebeu a necessidade de descrever os números reais de maneira mais meticulosa e detalhada, sem considerar tais números simplesmente dados como pontos da reta, para seu trabalho avançar. Também podemos citar Dedekind que, no mesmo período em que Cantor publicou seu trabalho sobre esse assunto, refletiu sobre a necessidade de estudar mais a fundo os número reais. Foi o estudo aritmético de Dedekind sobre a caracterização da continuidade que levou à proposição dos famosos "cortes de Dedekind"que proporcionam uma construção formal e rigorosa do conjunto dos números reais [2].

A concretização de uma definição rigorosa do conjunto dos números reais no século XIX veio com Cantor pelas sequências de Cauchy, apresentando uma construção algébrica desse conjunto, e com Dedekind, apresentando uma construção mais voltada para a teoria dos conjuntos, via cortes de Dedekind. A seguir apresentaremos as duas construções do conjunto dos números reais supracitadas.

10.1 Sequências de Cauchy

Uma sequência de Cauchy é uma sequência de números racionais $(x_n)_n$ tais que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall m, n > n_0, |x_n - x_m| < \epsilon$ [21]. Isto é, na sequência de Cauchy a distância entre os termos x_m e x_n, para m e n suficientemente grandes, é tão pequena quanto se queira [18].

A ideia da construção dos números reais por sequências de Cauchy está em observar que um número real qualquer pode ser escrito, em sua forma decimal, como uma expressão da forma:

$$d = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad a_0 \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq a_{i+1} \leq 9; a_{i+1} \in \mathbb{N}$$

Por exemplo, $\sqrt{2} = 1,414235\ldots$ ou $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$. Mais ainda, podemos dizer que um número real pode ser expresso pela expressão:

$$d = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \ldots \quad 0 \leq a_{i+1} \leq 9 \text{ e } a_0 \in \mathbb{N}$$

Assim, cada expressão finita $x_m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \cdots + \frac{a_m}{10^m}$ será uma aproximação finita de d cada vez melhor, quanto maior for o valor de m [18].

Por exemplo, a sequência racional (x_m) a seguir é uma sequência de Cauchy que aproxima-se de $\sqrt{2}$:

$$x_1 = 1 + \frac{4}{10}$$
$$x_2 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}$$
$$x_3 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}$$
$$\cdots$$

De fato, se $m > n$, tomando $\epsilon = \frac{1}{10^n} > 0, m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$x_m = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}$$

e

$$x_n = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$
$$|x_m - x_n| = \left| \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_m}{10^m} \right|$$

$$= \frac{1}{10^{n+1}} \left| a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m-n-1}} \right|$$

Como $0 \leq \left| a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m-n-1}} \right| < 10$, $\forall 0 \leq a_i \leq 9$, $a_i \in \mathbb{N}$, $n+1 \leq i \leq m$ e $\forall n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left| a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m-n-1}} \right| < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} \left| a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m-n-1}} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10^{n+1}} \left| a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^{m-n-1}} \right| < \frac{1}{10^n} = \epsilon$$

Isto é, para m e n suficientemente grandes, a distância entre os termos x_m e x_n é cada vez menor, portanto a sequência (x_m) é de Cauchy. Além disso, a sequência está aproximando $1,414235\ldots$ (notação decimal de $\sqrt{2}$) [18].

Para aproximar através de sequências de Cauchy números racionais com forma decimal finita é trivial, porém, esta ferramenta é muito útil para definir números racionais com forma decimal infinita periódica e, principalmente, os números irracionais. Assim, podemos definir (definição esta dada por Cantor) o conjunto dos números reais em termos de sequências de Cauchy da seguinte maneira:

"Número real é o conjunto de todas as sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que o aproximam"[21].

Para uma demonstração mais abrangente sobre a formação do conjunto dos números reais em termos de sequências de Cauchy, utilizando linguagem de teoria dos conjuntos, e demonstrando que o conjunto de todas as sequências de Cauchy forma um corpo ordenado completo, indicamos [21].

10.2 Cortes de Dedekind

Antes mesmo de haver uma definição rigorosa dos números reais, as ferramentas de cálculo como infinitesimal e diferencial, já eram amplamente utilizadas, sem preocupação com o rigor de suas bases:

"Durante o século XVIII, o cálculo ascendeu à condição de método essencial para a aplicação da matemática ao conhecimento da natureza e tornou-se um conjunto de técnicas extremamente flexível. Mas os fundamentos não eram nada claros, como vários autores apontam. O cálculo do século XVII fez uso de noções como infinitesimal, quantidade evanescente, diferencial, que careciam totalmente de fundamento adequado"[19].

Em um panfleto publicado em 1872, Dedekind observa que o cálculo diferencial frequentemente trata com quantidades contínuas, mas essa continuidade, até então, nunca havia sido explicada ou explorada. Foi a partir desses questionamentos sobre o tratamento que o cálculo diferencial e a matemática da época lidavam com a continuidade de curvas e quantidades que ele começou fazer um estudo aritmético da continuidade, que levou a elaboração dos "Cortes de Dedekind". Ao comparar os números racionais com os pontos da reta, notou que havia mais pontos na reta que racionais. Ele percebeu então que era necessário "completar"os racionais para formar um conjunto contínuo tal como a reta. Como a continuidade dos reais era vista como um dado, não havia até então um questionamento sobre a necessidade de explorar esse problema. Foi Dedekind que trouxe à luz a visão da continuidade como um problema a ser resolvido, e não um dado, no século XIX [2].

Estudando a fundo sobre a relação de ordem dos racionais e verdades tidas como óbvias sobre esses números, Dedekind percebeu que um racional p qualquer divide os racionais em duas classes, A e B, com A contendo todos os números menores que p e B contendo os números maiores que p [2]. Foi a partir dessa percepção que surgiu a ideia dos "cortes de Dedekind", através dos quais é possível "completar"os racionais, definindo com rigor matemático adequado o conjunto dos números reais, conforme Dedekind queria.

A seguir, apresentaremos várias definições e teoremas encontrados em [23], que definem o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo. Em [23], no entanto, não estão explicitados detalhadamente todos os teoremas. No presente trabalho, apresentaremos as demonstrações de todos esses teoremas, tornando esse capítulo o que possui maior rigor matemático e exigindo do leitor algum domínio de demonstrações analíticas e teoria dos conjuntos. Claro que não é esperado do professor do ensino básico apresentar tais demonstrações integralmente aos seus alunos, mas, como mencionado na introdução do trabalho, espera-se que tal conhecimento seja mais um artifício para o professor considerar na elaboração de suas aulas.

Admitiremos conhecida a aritmética dos racionais: A soma, a diferença, o produto e o quociente de dois racionais quaisquer são racionais (excluindo a divisão por zero). São válidas as leis comutativa, associativa e distributiva e a relação de ordem $<$ definida para os racionais, e suas propriedades: se p e q são racionais quaisquer, valem

1. $p = q$ ou $p < q$ ou $q < p$,
2. $p < q$ e $q < r \Rightarrow p < r$,
3. $p > 0$ e $q > 0 \Rightarrow p + q > 0$ e $pq > 0$.

Se A é um conjunto qualquer, escreveremos $x \in A$ para indicar que x é um elemento de A. Se x não é um elemento de A, escrevemos $x \notin A$. o conjunto que não contém nenhum elemento é chamado conjunto vazio (denotado por $\emptyset$), Se um conjunto contém pelo menos um elemento, ele não é vazio.

Definição .1. [23] ***Corte***

Diz-se que um conjunto α de números racionais é um corte se:

1. *α contém pelo menos um racional, mas não contém todos.*

2. *Se $p \in \alpha$ e $q < p$ (q racional), então $q \in \alpha$.*

3. *Em α não existe racional máximo.*

Teorema .1. *Se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$*

Demonstração. Suponha que $q \leq p$, tal que $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$. Se $q = p$, como $p \in \alpha$, $q \in \alpha$, o que contradiz a hipótese $q \notin \alpha$. Se $q < p$, do item 2 da definição .1, $q \in \alpha$, o que também contradiz a hipótese $q \notin \alpha$. Portanto, $p < q$

□

Teorema .2. *Seja r um número racional e α o conjunto de todos os racionais p tais que $p < r$. Então α é um corte e r é a menor cota superior de α.*

Demonstração. Para provar que α é corte, devemos provar que α satisfaz as condições da definição .1.

1. Como existe p racional tal que $p < r$, α é não vazio e também não contém todos os racionais.

2. Se $p \in \alpha$ e $q < p$, então $q < r$. Portanto, $q \in \alpha$.

3. Seja $p < r$. Então,
$$2p < p + r \Rightarrow p < \frac{p+r}{2}$$
e também,
$$p + r < 2r \Rightarrow \frac{p+r}{2} < r$$
Logo, $p < \frac{p+r}{2} < r$. Então, $\frac{p+r}{2} \in \alpha$.

   Está provado que α é corte. Como $r \notin \alpha$ (pois não é possível ocorrer $r < r$), pela definição de α, se tomarmos qualquer q tal que $p < q < r$ com $p \in \alpha$, temos $q \in \alpha$. Como já provamos que α é um corte, existe racional t em α tal que $q < t$, logo, q não pode ser cota superior de α. Portanto, r é a menor cota superior de α.

□

Definição .2. [23] ***Corte Racional***

O conjunto de todos os racionais p tais que $p < r$, tal que r é um racional qualquer (que é um corte, de acordo com o teorema .2), é chamado de corte racional.

Definição .3. [23] ***Relações de ordem***

Sejam α e β cortes. Então:

- $\alpha = \beta$ *se* $p \in \alpha \Rightarrow p \in \beta$ *e* $q \in \beta \Rightarrow q \in \alpha$
- $\alpha < \beta$ *se existe racional p tal que* $p \in \beta$ *e* $p \notin \alpha$
- $\alpha \leq \beta$ *se* $\alpha = \beta$ *e* $\alpha < \beta$
- $\alpha \geq \beta$ *se* $\beta \leq \alpha$
- 0^* *é o conjunto de todos os racionais p tais que $p < 0$ (0^* é corte racional de acordo com o teorema .2).*
- n^* *é o conjunto de todos os racionais p tais que $p < n$, para n racional (n^* é corte racional de acordo com o teorema .2).*
- *Se $\alpha > 0^*$, dizemos que α é positivo.*
- *Se $\alpha \geq 0^*$, dizemos que α não é negativo.*
- *Se $\alpha < 0^*$, dizemos que α é negativo.*
- *Se $\alpha \leq 0^*$, dizemos que α não é positivo.*

Teorema .3. *Sejam α e β cortes. Então $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$*

Demonstração. Se $\alpha = \beta$, então $\forall p \in \alpha, p \in \beta$ e $\forall q \in \beta, \in \alpha$. Isto é, não existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin \beta$ (o que exclui $\alpha > \beta$) e não existe $q \in \beta$ tal que $q \notin \alpha$ (o que exclui $\alpha < \beta$).

Suponha $\alpha \neq \beta$. Então existe $p \in \alpha$ e $p \notin \beta$ ou existe $q \in \beta$ e $q \notin \alpha$. Isto é, $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$.

Suponha que vale $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$. Então, $\exists p \in \beta; p \notin \alpha$ e $\exists q \in \alpha; q \notin \beta$.

Como $p \in \beta$ e $q \notin \beta$, pelo teorema .1, $p < q$. Analogamente, $q \in \alpha$ e $p \notin \alpha$ implica $q < p$, gerando uma contradição. Portanto, apenas uma das afirmações $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ ocorre.

□

Teorema .4. *Sejam α, β, γ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ então $\alpha < \gamma$.*

Demonstração. Como $\alpha < \beta$, então existe p racional tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Como $\beta < \gamma$, então existe q racional tal que $q \in \gamma$ e $q \notin \beta$. Pelo teorema .1, $p \in \beta$ e $q \notin \beta \Rightarrow p < q$. Como $p \notin \alpha$, temos $q \notin \beta \Rightarrow q \geq p \Rightarrow q \notin \alpha$. Então existe q racional tal que $q \in \gamma$ e $q \notin \alpha$, isto é, $\alpha < \gamma$.

□

Teorema .5. *Sejam α, β cortes. Seja γ o conjunto de todos os racionais r tais que $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então, γ é corte.*

Demonstração. Para provar que γ é corte, devemos provar que α satisfaz as condições da definição .1.

1. Como α e β são cortes, existe racional $r = p + q$ tal que $p \in \alpha$ e $q \in \beta$, portanto γ não pode ser vazio. Da mesma maneira, γ não contém todos os racionais, pois existe racional $r' = s + t$, tal que $s \notin \alpha$ e $t \notin \beta$, isto é, $r' \notin \gamma$.

2. Seja $r \in \gamma$, $s < r$, s racional. Então, $r = p + q$, $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Seja t racional tal que $s = t + q$. Então, $s < r \Rightarrow t + q < p + q \Rightarrow t < p$.

   Pelo item 2 da definição de cortes, temos: $p \in \alpha$ e $t < p \Rightarrow t \in \alpha$. Portanto, $s = t+q$, $t \in \alpha$ e $q \in \beta \Rightarrow s \in \gamma$, isto é, $r \in \gamma$ e $s < r \Rightarrow s \in \gamma$.

3. Seja $r \in \gamma$, $r = p + q$, tal que $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Como $p \in \alpha$ e α é corte, existe racional $s \in \alpha$ tal que $s > p$. Como $s \in \alpha$ e $q \in \beta$, então $s + q \in \gamma$. Então, $s > p \Rightarrow s + q > p + q \Rightarrow s + q > r$, $s + q \in \gamma$ e $r \in \gamma$, isto é, r não é racional máximo em γ

Portanto, γ é corte. □

Definição .4. [23] ***Soma de cortes***

O corte γ do teorema .5 é definido como a soma dos cortes α e β, e será denotado como $\alpha + \beta$

Teorema .6. *Sejam α, β e γ cortes. Então:*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

3. $\alpha + 0^* = \alpha$

Demonstração. 1. Seja $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então, $p+q \in \alpha+\beta$ e $q+p \in \beta+\alpha$. Pela comutatividade dos racionais, temos $p+q = q+p \Rightarrow p+q \in \beta+\alpha$ e $q + p = p + q \Rightarrow q + p \in \alpha + \beta$.

   Portanto, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

2. Seja $p \in \alpha$, $q \in \beta$ e $r \in \gamma$. Então, $(p+q)+r \in (\alpha+\beta)+\gamma$ e $p+(q+r) \in \alpha+(\beta+\gamma)$. Pela associatividade dos racionais, temos $(p+q)+r = p+(q+r) \Rightarrow (p+q)+r \in \alpha+(\beta+\gamma)$ e $p+(q+r) = (p+q)+r \Rightarrow (\alpha+\beta)+\gamma$.

   Portanto, $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

3. Seja $r \in \alpha+0^*$. Então, $r = p+q$ tal que $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$. Mas, $q \in 0^* \Rightarrow q < 0$, e pelo item 2 da definição .1, $q < 0 \Rightarrow p+q < p \Rightarrow p+q \in \alpha$, isto é, $r \in \alpha+0^* \Rightarrow r \in \alpha$.

   Seja $r \in \alpha$. Seja $s > r$ (s racional) tal que $s \in \alpha$. Seja $q = r-s$. Então, $r < s \Rightarrow r-s < 0 \Rightarrow q < 0$, isto é, $q \in 0^*$.

   Mas, $q = r-s \Rightarrow r = s+q$, $s \in \alpha$ e $q \in 0^*$. Então, $r \in \alpha+0^*$, isto é, $r \in \alpha \Rightarrow r \in \alpha+0^*$.

   Portanto, $\alpha+0^* = \alpha$

□

Teorema .7. *Seja α um corte e $r > 0$ um racional dado. Então existem racionais p, q tais que $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, q não é a menor cota superior de α e $q-p = r$*

Demonstração. Seja s racional, $s \in \alpha$. Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, seja $s_n = s+nr$.

Observamos que todos os s_n são tais que $s_{n+1}-s_n = (s+nr+r)-(s+nr) = r$, isto é, os intervalos $[s_n, s_{n+1}]$ possuem comprimento igual a r. Então existe um único inteiro m tal que $s_m \in \alpha$ e $s_{m+1} \notin \alpha$.

- Se s_{m+1} não for a menor das cotas superiores de α, consideramos $p = s_m \in \alpha$ e $q = s_{m+1} \notin \alpha$, e temos $q-p = s_{m+1}-s_m = r$.
- Se s_{m+1} for a menor das cotas superiores de α, consideramos $p = s_m + \frac{r}{2} \in \alpha$ e $q = s_{m+1} + \frac{r}{2} \notin \alpha$, e temos $q-p = (s_{m+1}+\frac{r}{2}) - (s_m+\frac{r}{2}) = r$.

□

Teorema .8. *Seja α um corte. Existe um único corte β tal que $\alpha+\beta = 0^*$*

Demonstração. Provaremos primeiro a unicidade de β.

- Unicidade:

  Suponha que existem cortes β_1 e β_2 tais que $\alpha+\beta_1 = 0^*$ e $\alpha+\beta_2 = 0^*$. Então,

  $\beta_1 = 0^*+\beta_1 = (\alpha+\beta_2)+\beta_1 = \alpha+(\beta_2+\beta_1) = \alpha+(\beta_1+\beta_2) = (\alpha+\beta_1)+\beta_2 = 0^*+\beta_2 = \beta_2$

- Existência:

  Seja β o conjunto de todos os racionais p tais que $-p$ é uma cota superior de α (portanto, $-p \notin \alpha$), mas não é a menor das cotas superiores de α. Vamos provar que β é corte:

  1. $\emptyset \neq \beta \neq \mathbb{Q}$ é trivial: de fato, como α é corte, existem racionais p tais que $-p$ é uma cota superior de α mas não a menor (o que significa $\beta \neq \emptyset$) e existem racionais q tais que $-q$ não é cota superior de α ou $-q$ é a menor das cotas superiores de α (o que significa $\beta \neq \mathbb{Q}$).
  2. Se $p \in \beta$ e $q < p$ (q racional), então, $-p < -q$, tal que $-p$ é uma cota superior não mínima de α (por definição de β). Logo, $-q$ é uma cota superior de α, mas não a menor das cotas superiores de α. Portanto, $q \in \beta$.
  3. Para qualquer $p \in \beta$, $-p$ é uma cota superior de α, mas não a menor. Então, existe racional q tal que $-q < -p$, com $-q \notin \alpha$.
     Seja $r = \frac{p+q}{2}$. Como $-q < -p$, temos:
     $-q < -p \Rightarrow p < q \Rightarrow p + q < q + q \Rightarrow p + q < 2q \Rightarrow \frac{p+q}{2} < q \Rightarrow r < q \Rightarrow -q < -r$
     e também,
     $-q < -p \Rightarrow p < q \Rightarrow p + p < p + q \Rightarrow 2p < p + q \Rightarrow p < \frac{p+q}{2} \Rightarrow p < r \Rightarrow -r < -p$.
     Ou seja, $-q < -r < -p$, com $-q \notin \alpha$, isto é, $-r$ é uma cota superior de α, mas não é a menor das cotas superiores de α, portanto, $r \in \beta$. Como $-r < -p \Rightarrow r > p$, β não possui racional máximo.

  Está provado que β é corte.

  Suponha $p \in \alpha + \beta$. Então, $p = q + r$, $q \in \alpha$ e $r \in \beta$. Mas, $r \in \beta \Rightarrow -r \notin \alpha \Rightarrow q < -r \Rightarrow q + r < 0 \Rightarrow p \in 0^*$.

  Suponha $p \in 0^*$. Então, $p < 0$. Mas, $p < 0 \Rightarrow -p > 0$.

  Pelo teorema .7, existem racionais $q \in \alpha$ e $r \notin \alpha$ (onde r não é a menor cota superior de α), tais que $r - q = -p$. Então r é cota superior de α mas não é a menor cota superior de α. Logo, $-r \in \beta$.

  Como $r - q = -p$, temos $-p = r - q \Rightarrow p = q - r = q + (-r)$, $q \in \alpha$ e $-r \in \beta$. Isto é, $p \in \alpha + \beta$.

  Portanto, $\alpha + \beta = 0^*$.

$\square$

Definição .5. [23] ***Simétrico (Inverso Aditivo)***

O corte β do teorema .8 é definido como o simétrico (ou inverso aditivo) de α e será denotado como $-\alpha$.

Teorema .9. *Quaisquer que sejam os cortes α, β e γ, se $\beta < \gamma$ então $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.*

Demonstração. Se $\beta < \gamma$, por definição, existe racional r tal que $r \in \gamma$ e $r \notin \beta$. Então, $\forall p \in \alpha$, $p + r \in \alpha + \gamma$.

Como $r \notin \beta$, então $p + r \notin \alpha + \beta$. Então, existe racional $s = p + r$ tal que $s \in \alpha + \gamma$ e $s \notin \alpha + \beta$. Isto é, $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

□

Teorema .10. *Sejam α e β cortes. Existe um único corte γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$*

Demonstração. Seja o corte $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Então, $\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta$.

Agora provaremos a unicidade do corte γ.

Sejam os cortes γ_1 e γ_2 tais que $\alpha + \gamma_1 = \alpha + \gamma_2 = \beta$. Então,

$\gamma_1 = 0^* + \gamma_1 = ((-\alpha) + \alpha) + \gamma_1 = (-\alpha) + (\alpha + \gamma_1) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma_2) = ((-\alpha) + \alpha) + \gamma_2 = 0^* + \gamma_2 = \gamma_2$.

□

Definição .6. [23]

O corte γ do teorema .10 será denotado por $\beta - \alpha$.

Observamos que os teoremas .5, .6 e .8 garantem que o conjunto dos cortes é um grupo comutativo em relação à operação de adição definida para cortes.

Os teoremas a seguir, vão definir a operação da multiplicação para cortes e mostrar que o conjunto dos cortes satisfaz as propriedades da definição de corpo.

Teorema .11. *Sejam α e β cortes, tais que $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$. Seja γ o conjunto de todos os racionais negativos e de todos os racionais r tais que:*

$r = pq$, com $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$.

Então γ é corte.

Demonstração. Vamos provar que γ satisfaz as condições da definição .1:

1. Por definição, γ claramente não pode ser vazio. E como α e β são cortes, existem racionais $s \notin \alpha$ e $t \notin \beta$, tais que $s \geq 0$ e $t \geq 0$ de maneira que $st \notin \gamma$.

2. Seja $r \in \gamma$ e $s < r$ (s racional).

- $r \leq 0 \Rightarrow s < 0 \Rightarrow s \in \gamma$, por definição de γ.
- Seja $r > 0$. Então, $r = pq$, com $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p > 0$ e $q > 0$.

  Seja t racional tal que $s = tq$. Se $t < 0$, então $tq = s < 0 < r$, isto é, $s \in \gamma$, por definição de γ.

  Se $t \geq 0$, temos $s < r \Rightarrow tq < pq \Rightarrow t < p \Rightarrow t \in \alpha$. Então, $s = tq$, $t \in \alpha$, $q \in \beta$, $t \geq 0$ e $q \geq 0$, isto é, $s \in \gamma$.

3. Seja r racional tal que $r \in \gamma$.

   - Se $r \leq 0$, existe $s \in \gamma$ tal que $s > r$, por definição de γ (γ contém todos os racionais negativos, e se $r = 0$, como $r \in \gamma$, obrigatoriamente temos $\gamma > 0^*$, então existe $s \in \gamma$, tal que $s > 0 = r$).
   - Seja $r > 0$. Então, $r = pq$, com $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p > 0$ e $q > 0$.

     Logo, como α é corte, $\forall p \in \alpha$, $p > 0$, existe $s \in \alpha$ tal que $s > p$. Como $q > 0$, temos,

     $s > p \Rightarrow sq > pq = r$.

     Como $s \in \alpha$ e $q \in \beta$, $s > 0$ e $q > 0$, então $sq \in \gamma$. Portanto, γ não possui racional máximo.

   Portanto, γ é corte.

$\square$

Definição .7. [23] ***Módulo (ou Valor absoluto) de Cortes***

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & , se\ \alpha \geq 0^* \\ -\alpha & , se\ \alpha < 0^* \end{cases}$$

Definição .8. [23] ***Multiplicação de Cortes*** *Sejam α e β cortes.*

$$\alpha\beta = \begin{cases} |\alpha||\beta| & , se\ \alpha < 0^*\ e\ \beta < 0^* \\ -(|\alpha||\beta|) & , se\ \alpha \geq 0^*\ e\ \beta < 0^* \\ -(|\alpha||\beta|) & , se\ \alpha < 0^*\ e\ \beta \geq 0^* \end{cases}$$

Se $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, $\alpha\beta$ é definido como o corte γ do teorema .11.

Agora que já foi definida a operação de multiplicação de cortes, podemos enunciar o seguinte corolário para o teorema .11:

Corolário .1. $\alpha \geq 0^*$ *e* $\beta \geq 0^* \Rightarrow \alpha\beta \geq 0^*$

Demonstração. Suponha que $\alpha\beta < 0^*$. Então existe racional $r \in 0^*$ tal que $r \notin \alpha\beta$, isto é, existe racional $r < 0$ tal que $r \notin \alpha\beta$, o que contradiz a definição de $\alpha\beta$ no teorema .11.

□

Os próximos teoremas a serem provados garantem a validade de algumas propriedades conhecidas dos racionais para cortes. Para provar tais teoremas precisaremos dos seguintes lemas:

Lema .1. *Seja α um corte qualquer. Então:*

- $\alpha = 0^* \Leftrightarrow (-\alpha) = 0^*$
- $\alpha > 0^* \Leftrightarrow (-\alpha) < 0^*$
- $\alpha \geq 0^* \Leftrightarrow (-\alpha) \leq 0^*$

Demonstração.

- Se $\alpha = 0^*$, pelo teorema .6, temos:

  $$\alpha + (-\alpha) = 0^* \Rightarrow 0^* + (-\alpha) = (-\alpha) + 0^* = 0^* \Rightarrow (-\alpha) = 0^*.$$

  Analogamente, se $(-\alpha) = 0^*$, temos $\alpha = 0^*$.

- Se $\alpha > 0^*$, então existe p racional, $p \in \alpha$ e $p \notin 0^*$. Como, $p \notin 0^*$, então $p \geq 0$.

  Suponha $(-\alpha) > 0^*$. Então existe q racional, $q \in (-\alpha)$ e $q \notin 0^*$. Como, $q \notin 0^*$, então $q \geq 0$.

  Logo, $p+q \in \alpha+(-\alpha)$, isto é, $p+q \in 0^*$. Então, $p+q < 0$, contradizendo $p \geq 0$ e $q \geq 0 \Rightarrow p+q \geq 0$.

  Portanto, $(-\alpha) < 0^*$ (Sabemos pelo item anterior que $(-\alpha) = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^*$).

  Se $(-\alpha) < 0^*$, então existe s racional, $s \in 0^*$ e $s \notin (-\alpha)$. Como, $s \in 0^*$, então $s < 0$.

  Suponha $\alpha < 0^*$. Então existe r racional, $r \in 0^*$ e $r \notin \alpha$. Como, $r \in 0^*$, então $r < 0$.

  Logo, $r+s \notin \alpha+(-\alpha)$, isto é, $r+s \notin 0^*$. Então, $r+s \geq 0$, contradizendo $r < 0$ e $s < 0 \Rightarrow r+s < 0$.

  Portanto, $\alpha > 0^*$ (Sabemos pelo item anterior que $\alpha = 0^* \Leftrightarrow (-\alpha) = 0^*$).

- Se $\alpha \geq 0^*$, então $\alpha > 0^*$ ou $\alpha = 0^*$. Logo, pelos itens anteriores, $(-\alpha) < 0^*$ ou $(-\alpha) = 0^*$, isto é, $(-\alpha) \leq 0^*$. Analogamente, se $(-\alpha) \leq 0^*$ temos $\alpha \geq 0^*$.

□

Lema .2. *Sejam α um corte qualquer. Então:*

1. $|\alpha| \geq 0^*$
2. $|\alpha| = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^*$

Demonstração. 1. Pela definição .7, se $\alpha \geq 0^*$, então $|\alpha| = \alpha \geq 0^*$ e se $\alpha < 0^*$, $|\alpha| = -\alpha > 0^*$, de acordo com o lema .1.

2. Pela definição .7, $\alpha = 0^* \Rightarrow |\alpha| = \alpha = 0^*$.

   Seja $|\alpha| = 0^*$. Se $\alpha > 0^*$, pela definição .7, $|\alpha| = \alpha > 0^*$, contradizendo $|\alpha| = 0^*$. Se $\alpha < 0^*$, pela definição .7, $|\alpha| = -\alpha > 0^*$ de acordo com o lema .1, contradizendo $|\alpha| = 0^*$. Portanto, $\alpha = 0^*$.

□

Lema .3. *Para quaisquer cortes α e β temos $|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$*

Demonstração. • Se $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, pela definição .7, $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$. Então:

$$|\alpha\beta| = ||\alpha||\beta||$$

Pelo lema .2, $|\alpha| \geq 0^*$ e $|\beta| \geq 0^*$. Pelo corolário .1 $|\alpha||\beta| \geq 0^*$. Então, pela definição .7:

$$|\alpha\beta| = ||\alpha||\beta|| = |\alpha||\beta|$$

- Se $\alpha < 0^*$ e $\beta < 0^*$, pela definição .8, $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$. Então a prova é análoga ao caso anterior.

- Se $\alpha \geq 0^*$ e $\beta < 0^*$, pela definição .8, $\alpha\beta = -(|\alpha||\beta|)$. Como, de acordo com o lema .2, $|\alpha| \geq 0^*$ e $|\beta| \geq 0^*$, pelo corolário .1, $|\alpha||\beta| \geq 0^*$, então $|\alpha||\beta| = 0^*$ ou $|\alpha||\beta| > 0^*$.

  Pelo lema .1, $|\alpha||\beta| = 0^* \Rightarrow -(|\alpha||\beta|) = 0^*$ e pelo lema .1, $|\alpha||\beta| > 0^* \Rightarrow -(|\alpha||\beta|) < 0^*$. Logo, $-(|\alpha||\beta|) \leq 0^*$.

  Se $-(|\alpha||\beta|) = 0^*$, pelo lema .1, $|\alpha||\beta| = 0^*$. Então:

$$|\alpha\beta| = |-(|\alpha||\beta|)| = |0^*| = 0^* = |\alpha||\beta|$$

  Se $-(|\alpha||\beta|) < 0^*$, então:

$$|\alpha\beta| = |-(|\alpha||\beta|)| = -(-(|\alpha||\beta|))$$

Pela unicidade do teorema .8, $-(-(|\alpha||\beta|)) = |\alpha||\beta|$. Portanto, $|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$.

- Se $\alpha < 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, pela definição .8, $\alpha\beta = -(|\alpha||\beta|)$. Então a prova é análoga ao caso anterior.

□

Lema .4. *Para quaisquer cortes α e β temos $-(\alpha+\beta) = (-\alpha)+(-\beta)$*

Demonstração. Pelo teorema .6, temos:

$$(\alpha+\beta)+((-\alpha)+(-\beta)) = (\alpha+(-\alpha))+(\beta+(-\beta)) = 0^*$$

Pela unicidade do teorema .8, $-(\alpha+\beta) = (-\alpha)+(-\beta)$

□

Teorema .12. *Sejam α e β cortes. Então $\alpha\beta = \beta\alpha$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração nos seguintes casos:

1. Caso $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$.

   Seja r racional. Se $r < 0$, pela definição do produto de cortes, $r \in \alpha\beta$ e $r \in \beta\alpha$.

   Seja $r \geq 0$. Se $r \in \alpha\beta$ então $r = pq$, com $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Mas, $pq = qp \in \beta\alpha$, isto é, $r \in \beta\alpha$. Analogamente, se $r \in \beta\alpha$ então $r \in \alpha\beta$.

2. Caso $\alpha < 0^*$ e $\beta < 0^*$.

   Por definição, $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$. Como, de acordo com o lema .2, $|\alpha| \geq 0^*$ e $|\beta| \geq 0^*$, a demonstração é análoga ao caso anterior.

3. Caso $\alpha \geq 0^*$ e $\beta < 0^*$.

   Por definição, $\alpha\beta = -(|\alpha||\beta|)$ e $\beta\alpha = -(|\beta||\alpha|)$. Como, $|\alpha| \geq 0^*$ e $|\beta| \geq 0^*$, pelo primeiro caso provado temos,

$$\alpha\beta = -(|\alpha||\beta|) = -(|\beta||\alpha|) = \beta\alpha$$

4. Caso $\alpha < 0^*$ e $\beta \geq 0^*$.

   Por definição, $\alpha\beta = -(|\alpha||\beta|)$ e $\beta\alpha = -(|\beta||\alpha|)$. Então, a demonstração é análoga ao caso anterior.

$\square$

Teorema .13. *Sejam α, β e γ cortes. Então $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração deste item nos seguintes casos:

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  Por definição, $\alpha\beta \geq 0^*$ e $\beta\gamma \geq 0^*$. Então, $\forall r < 0$, $r \in (\alpha\beta)\gamma$ e $r \in \alpha(\beta\gamma)$.

  Seja r racional, $r \geq 0$. Se $r \in (\alpha\beta)\gamma$, então $r = st$, com $s \in \alpha\beta$, $t \in \gamma$, $s \geq 0$ e $t \geq 0$. Como $s \in \alpha\beta$ e $s \geq 0$ então $s = pq$, com $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Logo,
  $$r = (pq)t = p(qt).$$
  Isto é, $r \in \alpha(\beta\gamma)$. Analogamente, se $r \in \alpha(\beta\gamma)$ então $r \in (\alpha\beta)\gamma$.

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  De acordo com a definição .8 e também pelo lema .3:
  $$(\alpha\beta)\gamma = -(|\alpha||\beta|)\gamma = -(|\alpha\beta|)\gamma$$
  Pelo lema .2 $|\alpha\beta| \geq 0^*$. Então, pelo lema .1, $-(|\alpha\beta|) \leq 0^*$. Como $\gamma \geq 0^*$, de acordo com a definição .8:
  $$-(|\alpha\beta|)\gamma = -[|-(|\alpha\beta|)||\gamma|] = -[|\alpha\beta||\gamma|]$$
  Pelos lemas .3 e .2 e pelo item anterior temos:
  $$-[(|\alpha\beta|)|\gamma|] = -[(|\alpha||\beta|)|\gamma|] = -[|\alpha|(|\beta||\gamma|)] = -[|\alpha||\beta\gamma|]$$
  Pelo corolário .1, $\beta\gamma \geq 0^*$. Como $\alpha < 0^*$, temos pela definição .8:
  $$-[|\alpha||\beta\gamma|] = \alpha(\beta\gamma)$$
  Isto é, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  Analogamente ao modo como foi provado que $(\alpha\beta)\gamma = -[|\alpha|(|\beta||\gamma|)]$ no caso anterior, concluímos a mesma igualdade nesse caso.

  Pelo lema .2, $|\beta| \geq 0^*$ e $|\gamma| \geq 0^*$. Pelo corolário .1, $|\beta||\gamma| \geq 0^*$. Pelo lema .1, $-(|\beta||\gamma|) \leq 0^*$. Logo, $|-(|\beta||\gamma|)| = -(-(|\beta||\gamma|)) = |\beta||\gamma|$. Então:
  $$-[|\alpha|(|\beta||\gamma|)] = -[|\alpha||-(|\beta||\gamma|)|]$$

  Como $-(|\beta||\gamma|) \leq 0^*$, $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$, temos pela definição .8:
  $$-[|\alpha||-(|\beta||\gamma|)|] = \alpha(-(|\beta||\gamma|)) = \alpha(\beta\gamma)$$

  Isto é, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  De acordo com o lema .3 e as definições .7 e .8:
  $$(\alpha\beta)\gamma = (|\alpha||\beta|)\gamma = (|\alpha\beta|)\gamma = -[(|\alpha\beta|)|\gamma|] = -[(|\alpha||\beta|)|\gamma|]$$

  Pelo lema .2 e pelo caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$, temos:
  $$-[(|\alpha||\beta|)|\gamma|] = -[|\alpha|(|\beta||\gamma|)]$$

  Analogamente ao modo como foi provado que $-[|\alpha|(|\beta||\gamma|)] = \alpha(\beta\gamma)$ no caso anterior, concluímos a mesma igualdade nesse caso. Portanto, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  Como $\gamma \geq 0^*$, pela definição .7, $\gamma = |\gamma|$. Como $\alpha < 0^*$ e $\beta < 0^*$, pela definição .8, $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$. Pelo lema .2 e pelo primeiro caso provado nesse item ($\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$), temos:
  $$(\alpha\beta)\gamma = (|\alpha||\beta|)|\gamma| = |\alpha|(|\beta||\gamma|)$$

  Como já mostrado em um caso anterior, $-(|\beta||\gamma|) \leq 0^* \Rightarrow |-(|\beta||\gamma|)| = |\beta||\gamma|$. Então:
  $$|\alpha|(|\beta||\gamma|) = |\alpha||-(|\beta||\gamma|)|$$

Como $\alpha < 0^*$, $-(|\beta||\gamma|) \leq 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$ pela definição .8:

$$|\alpha|| - (|\beta||\gamma|)| = \alpha(-(|\beta||\gamma|)) = \alpha(\beta\gamma)$$

Isto é, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  Como $\alpha < 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, pela definição .8, $\alpha\beta = -(|\alpha||\beta|)$. Pelo lema .2, $|\alpha| \geq 0^*$ e $|\beta| \geq 0^*$. Pelo corolário .1, $|\alpha||\beta| \geq 0^*$. Pelo lema .1, $-(|\alpha||\beta|) \leq 0^*$. Logo, $| - (|\alpha||\beta|)| = -(-(|\alpha||\beta|)) = |\alpha||\beta|$. Como $\gamma < 0^*$, pela definição .8, temos:

  $$(\alpha\beta)\gamma = -(|\alpha||\beta|)\gamma = | - (|\alpha||\beta|)||\gamma| = (|\alpha||\beta|)|\gamma|$$

  Pelo lema .2 e pelo primeiro caso provado nesse item ($\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$), temos:

  $$(|\alpha||\beta|)|\gamma| = |\alpha|(|\beta||\gamma|)$$

  Analogamente ao modo como foi provado que $|\alpha|(|\beta||\gamma|) = \alpha|(\beta\gamma)$ no caso anterior, concluímos a mesma igualdade nesse caso. Portanto, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  Analogamente ao modo como foi provado que $(\alpha\beta)\gamma = |\alpha|(|\beta||\gamma|)$ no caso anterior, concluímos a mesma igualdade nesse caso.

  Como $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pela definição .8, $|\beta||\gamma| = \beta\gamma$. Como $\alpha \geq 0^*$, pela definição .7, $|\alpha| = \alpha$. Logo:

  $$|\alpha|(|\beta||\gamma|) = \alpha(\beta\gamma)$$

  Isto é, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  Como $\alpha < 0^*$ e $\beta < 0^*$, pela definição .8, $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$. Pelo lema .2 e pelo corolário .1, $|\alpha||\beta| \geq 0^*$. Como $\gamma < 0^*$, pela definição .8, temos:

  $$(\alpha\beta)\gamma = (|\alpha||\beta|)\gamma = -[||\alpha||\beta|||\gamma|] = -[(|\alpha||\beta|)|\gamma|]$$

Pelo lema .2 e pelo primeiro caso provado nesse item ($\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$), temos:

$$-[(|\alpha||\beta|)|\gamma|] = -[|\alpha|(|\beta||\gamma|)]$$

Como já provado em casos anteriores, $|\beta||\gamma| \geq 0^*$. Então, $||\beta||\gamma|| = |\beta||\gamma|$. Como $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pela definição .8, temos:

$$-[|\alpha|(|\beta||\gamma|)] = -[|\alpha|\,||\beta||\gamma||] = \alpha(|\beta||\gamma|) = \alpha(\beta\gamma)$$

Isto é, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

□

Teorema .14. *Seja α um corte qualquer. Então $\alpha 1^* = \alpha$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração do teorema em dois casos:

1. $\alpha \geq 0^*$

   Como $1^* > 0^*$, pela definição .7, $\alpha 1^* = |\alpha||1^*|$.

   Seja $r < 0$, r racional. Então $r \in \alpha$ (pois $\forall r < 0$, $r \in \alpha \geq 0^*$) e $r \in \alpha 1^*$ (como $\alpha 1^* = |\alpha||1^*|$, $|\alpha| \geq 0^*$ e $|1^*| \geq 0^*$ pelo lema .2, então $\forall r < 0$, $r \in \alpha 1^*$ de acordo com a definição .8).

   Seja $r \geq 0$, r racional. Se $r \in \alpha 1^*$, então $r = pq$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p \in \alpha$ e $q \in 1^*$. Então:

$$q \in 1^* \Rightarrow q < 1 \Rightarrow pq < p$$

   Logo, pelo item 2 da definição .1, $r \in \alpha$.

   Se $r \in \alpha$, seja $p \in \alpha$, $p > 0$ tal que $p > r$. Então:

$$p > r \Rightarrow \frac{r}{p} < 1 \Rightarrow \frac{r}{p} \in 1^*$$

   Logo, $r = p\frac{r}{p} \in \alpha 1^*$.

2. $\alpha < 0^*$

   Como $1^* > 0^*$, pela definição .8, $\alpha 1^* = -(|\alpha||1^*|)$.

   Pela definição .7 e pelo lema .1, $|\alpha| = -\alpha \geq 0^*$. Logo, pela unicidade do teorema .8 e pelo caso anterior temos:

$$\alpha 1^* = -(|\alpha||1^*|) = -[(-\alpha)1^*] = -(-\alpha) = \alpha$$

$\square$

Teorema .15. *Sejam α, β e γ cortes. Se $0^* < \alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$, então $\alpha\gamma < \beta\gamma$.*

Demonstração. Se $0^* < \alpha < \beta$, então existe $q \in \beta$ e $q \notin \alpha$, $q > 0$. Como $\gamma > 0^*$, então existe $s \in \gamma$, $s > 0$. Então, pela definição .8, $qs \in \beta\gamma$, $qs > 0$.

Como $q \notin \alpha$, então $qs \notin \alpha\gamma$.

Ou seja, existe $r = qs$ racional tal que $r \in \beta\gamma$ e $r \notin \alpha\gamma$, isto é, $\alpha\gamma < \beta\gamma$. $\square$

Para provar a propriedade distributiva para cortes, precisamos dos seguintes lemas:

Lema .5. *Seja α um corte qualquer. Então, $(-1^*)\alpha = (-\alpha)$*

Demonstração. Pelas definições .7 e .8 e pelos teoremas .12 e .14 desse teorema temos:

$$\alpha \geq 0^* \text{ e } (-1^*) < 0^* \Rightarrow (-1^*)\alpha = -(|-1^*||\alpha|) = -(1^*\alpha) = -(\alpha 1^*) = -\alpha$$

e também,

$$\alpha < 0^* \text{ e } (-1^*) < 0^* \Rightarrow (-1^*)\alpha = |-1^*||\alpha| = 1^*(-\alpha) = (-\alpha)1^* = -\alpha$$

$\square$

Lema .6. *Sejam α e β cortes. Então, $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$*

Demonstração. Pelo lema .5 e pelos teoremas .12 e .13, temos:

$$(-\alpha)\beta = ((-1^*)\alpha)\beta = (\alpha(-1^*))\beta = \alpha((-1^*)\beta) = \alpha(-\beta)$$

E também:

$$(-\alpha)\beta = ((-1^*)\alpha)\beta = (-1^*)(\alpha\beta) = -(\alpha\beta)$$

$\square$

Teorema .16. *Sejam α, β e γ cortes. Então $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração deste item nos seguintes casos:

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  Seja r racional, $r < 0$.

  Seja $r \in \alpha(\beta + \gamma)$. Como $r < 0$, $\frac{r}{2} < 0$. Pela definição .8, $\frac{r}{2} \in \alpha\beta$ e $\frac{r}{2} \in \alpha\gamma$, logo, pela definição .4, $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} \in \alpha\beta + \alpha\gamma$. Como, $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, $r \in \alpha\beta + \alpha\gamma$.

  Seja $r \in \alpha\beta + \alpha\gamma$. Como $\beta \geq 0^*$, pelos teoremas .9 e .6, $\beta + \gamma \geq 0^* + \gamma = \gamma \geq 0^*$. Logo, como $\alpha \geq 0^*$ e $r < 0$, pela definição .8, $r \in \alpha(\beta + \gamma)$.

  Seja r racional, $r \geq 0$.

  Se $r \in \alpha\beta + \alpha\gamma$, então pelas definições .4 e .8:

  $$r = pq + ps, p \in \alpha, q \in \beta, s \in \gamma, p \geq 0, q \geq 0, s \geq 0.$$

  Logo,

  $$r = pq + ps = p(q + s).$$

  Isto é, $r \in \alpha(\beta + \gamma)$.

  Analogamente, se $r \in \alpha(\beta + \gamma)$ provamos que $r \in \alpha\beta + \alpha\gamma$.

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  Como foi mostrado no caso anterior, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^* \Rightarrow \beta + \gamma \geq 0^*$, logo, $|\beta + \gamma| = \beta + \gamma$. Como $\alpha < 0^*$, pela definição .8, temos:

  $$\alpha(\beta + \gamma) = -[|\alpha||\beta + \gamma|] = -[|\alpha|(\beta + \gamma)]$$

  Pelo lema .2, $|\alpha| \geq 0^*$, e como $\beta \geq 0^* \Rightarrow |\beta| = \beta$ e $\gamma \geq 0^* \Rightarrow |\gamma| = \gamma$, pelo caso anterior, temos:

  $$-[|\alpha|(\beta + \gamma)] = -[|\alpha|\beta + |\alpha|\gamma] = -[|\alpha||\beta| + |\alpha||\gamma|]$$

  Então, Pelo lema .4 e pela definição .8, temos:

  $$-[|\alpha||\beta| + |\alpha||\gamma|] = [-(|\alpha||\beta|)] + [-(|\alpha||\gamma|)] = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

  Portanto, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  – subcaso i: $\beta + \gamma \geq 0^*$
  Como $\gamma < 0^*$, pelo lema .1, $-\gamma > 0^*$. Como $\alpha \geq 0^*$, pelo teorema .15 e pelo lema .5, temos:

  $$\beta + \gamma \geq 0^* \Rightarrow \beta \geq -\gamma > 0^*$$

  $$\Rightarrow \alpha\beta \geq \alpha(-\gamma)$$
  $$\Rightarrow \alpha\beta \geq (-\alpha\gamma)$$
  $$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma \geq 0^*$$

  Seja p racional, tal que $p < 0$. Logo, pela definição .8, $p \in \alpha(\beta+\gamma)$, e como $\alpha\beta + \alpha\gamma \geq 0^*$, $\forall p < 0$, $p \in \alpha\beta + \alpha\gamma$.
  Seja p racional, tal que $p \geq 0$. Seja r racional, $r = st$ tal que $s \in \alpha$, $t \in \beta$, $s > 0$ e $t \geq 0$. Então, $r \in \alpha\beta$.
  Seja q racional, $q < 0$ tal que $q \in \alpha\gamma$, $\frac{q}{s} \in \gamma$ e $r \geq -q$. Fazendo $p = r + q$, temos $p \in \alpha\beta + \alpha\gamma$, tal que

  $$p = r + q = st + q = s(t + \frac{q}{s})$$

  Isto é, $p \in \alpha(\beta+\gamma)$. Analogamente, fazendo $p = s(t+\frac{q}{s})$, provamos $p \in \alpha\beta + \alpha\gamma$.

  – subcaso ii: $\beta + \gamma < 0^*$
  Se $\beta+\gamma < 0^*$, pelo lema .1, $-(\beta+\gamma) > 0^*$. Então, pelas definições .8 e .7, temos:

  $$\alpha(\beta + \gamma) = -[|\alpha||\beta + \gamma|] = -[\alpha[-(\beta + \gamma)]]$$

  Pelo lema .4, temos:

  $$-[\alpha[-(\beta + \gamma)]] = -[\alpha[(-\beta) + (-\gamma)]]$$

  Como $\beta \geq 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pelo lema .1, $-\beta \leq 0^*$ e $-\gamma > 0^*$. Como, pelo item 1 do teorema .6 e pelo lema .4, $(-\gamma) + (-\beta) = (-\beta) + (-\gamma) = -(\beta + \gamma) > 0^*$, temos pelo subcaso i:

  $$-[\alpha[(-\beta) + (-\gamma)]] = -[\alpha[(-\gamma) + (-\beta)]] = -[\alpha(-\gamma) + \alpha(-\beta)]$$

Como $\alpha \geq 0^*$, $-\beta \leq 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pelo item 1 do teorema .6, pela definição .7 e pela definição .8, temos:

$$-[\alpha(-\gamma)+\alpha(-\beta)] = -[\alpha(-\beta)+\alpha(-\gamma)] = -[-(|\alpha||-\beta|)+|\alpha||\gamma|]$$

Pelo lema .4,

$$-[-(|\alpha||-\beta|)+|\alpha||\gamma|] = -[-(|\alpha||-\beta|)]+[-|\alpha||\gamma|]$$

Pela unicidade do teorema .8, pela definição .7 e pela definição .8, temos:

$$-[-(|\alpha||-\beta|)]+[-|\alpha||\gamma|] = |\alpha||-\beta|+[-|\alpha||\gamma|] = \alpha\beta+\alpha\gamma$$

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  Pelo item 1 do teorema .6, $\beta+\gamma = \gamma+\beta$. Portanto, a prova desse caso é análoga à do caso anterior.

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  - subcaso i: $\beta+\gamma < 0^*$

    Pelas definições .7 e .8 e pelo lema .4:

    $$\alpha(\beta+\gamma) = |\alpha||\beta+\gamma| = (-\alpha)[-(\beta+\gamma)] = (-\alpha)[(-\beta)+(-\gamma)]$$

    Pelo lema .1, $-\alpha > 0^*$, $-\beta \leq 0^*$ e $-\gamma > 0^*$, logo, pelo caso anterior:

    $$(-\alpha)[(-\beta)+(-\gamma)] = (-\alpha)(-\beta)+(-\alpha)(-\gamma)$$

    Pela definição .7, temos $|\alpha| = -\alpha$, $|\beta| = \beta$ e $|\gamma| = -\gamma$. Então:

    $$(-\alpha)(-\beta)+(-\alpha)(-\gamma) = |\alpha|(-|\beta|)+|\alpha||\gamma|$$

    Pelo lema .6 e pela definição .8, temos:

    $$|\alpha|(-|\beta|)+|\alpha||\gamma| = -(|\alpha||\beta|)+|\alpha||\gamma| = \alpha\beta+\alpha\gamma$$

- subcaso i: $\beta + \gamma \geq 0^*$
  Pelas definições .7 e .8:

$$\alpha(\beta + \gamma) = -[|\alpha||\beta + \gamma|] = -[(-\alpha)(\beta + \gamma)]$$

  Pelo lema .1, $-\alpha > 0^*$. Como $\beta \geq 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pelo caso já provado anteriormente:

$$-[(-\alpha)(\beta + \gamma)] = -[(-\alpha)\beta + (-\alpha)\gamma]$$

  Pela unicidade do teorema .8 e pela definição .7:

$$-[(-\alpha)\beta+(-\alpha)\gamma] = -[(-\alpha)\beta+(-\alpha)(-(-\gamma))] = -[|\alpha||\beta|+|\alpha|(-|\gamma|)]$$

  Pelo lema .6,

$$-[|\alpha||\beta| + |\alpha|(-|\gamma|)] = -[|\alpha||\beta| + (-|\alpha||\gamma|)]$$

  Pelo lema.4 e pela unicidade do teorema .8, temos:

$$-[|\alpha||\beta|+(-|\alpha||\gamma|)] = -(|\alpha||\beta|)+[-(-|\alpha||\gamma|)] = -(|\alpha||\beta|)+|\alpha||\gamma|$$

  Logo, pela definição .8:

$$-(|\alpha||\beta|) + |\alpha||\gamma| = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$.

  Pelo item 1 do teorema .6, $\beta + \gamma = \gamma + \beta$. Portanto, a prova desse caso é análoga à do caso anterior.

- Caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  Como $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pelo teorema .9, $\beta + \gamma < 0^* + \gamma = \gamma < 0^*$. Então pela definição .8, temos:

$$\alpha(\beta + \gamma) = -[|\alpha||\beta + \gamma|]$$

  Como $\beta + \gamma < 0^*$, pela definição .7, $|\beta + \gamma| = -(\beta + \gamma)$. Então, pelo lema .4, temos:

$$-[|\alpha||\beta + \gamma|] = -[|\alpha|[-(\beta + \gamma)]] = -[|\alpha|[(-\beta) + (-\gamma)]]$$

Pelo lema .2, $|\alpha| \geq 0^*$. Como $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pelo lema .1, $-\beta \geq 0^*$ e $-\gamma \geq 0^*$. Então pelo caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$ desse item, temos:

$$-[|\alpha|[(-\beta) + (-\gamma)]] = -[|\alpha|(-\beta) + |\alpha|(-\gamma)]$$

Como $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$, pela definição .7, $|\beta| = -\beta$ e $|\gamma| = -\gamma$. Então, Pelo lema .4 e pela definição .8, temos:

$$-[|\alpha|(-\beta)+\alpha(-\gamma)] = -[|\alpha||\beta|+|\alpha||\gamma|] = [-(|\alpha||\beta|)]+[-(|\alpha||\gamma|)] = \alpha\beta+\alpha\gamma$$

Portanto, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

- Caso $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$.

  Como mostrado no caso anterior, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^* \Rightarrow \beta + \gamma < 0^*$, então $|\beta + \gamma| = -(\beta + \gamma)$. Como $\alpha < 0^*$, pela definição .8, temos:

$$\alpha(\beta + \gamma) = |\alpha||\beta + \gamma| = |\alpha|[-(\beta + \gamma)]$$

  Pelo lema .2, $|\alpha| \geq 0^*$. Pelo lema .1, $(-\beta) \geq 0^*$ e $(-\gamma) \geq 0^*$. Pela definição .7, $|\beta| = (-\beta)$ e $|\gamma| = (-\gamma)$. Então, pelo lema .4 e pelo caso $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$ e $\gamma \geq 0^*$ desse item, temos:

$$|\alpha|[-(\beta+\gamma)] = |\alpha|[(-\beta)+(-\gamma)] = |\alpha|(-\beta)+|\alpha|(-\gamma) = |\alpha||\beta|+|\alpha||\gamma|$$

  Logo, pela definição .8, temos:

$$|\alpha||\beta| + |\alpha||\gamma| = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

  Portanto, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

□

Teorema .17. *Seja α um corte qualquer. Então $\alpha 0^* = 0^*$*

Demonstração. Pelos teoremas .6 e .16, temos:

$$\alpha 0^* = \alpha(0^* + 0^*) = \alpha 0^* + \alpha 0^*$$

Pela unicidade do teorema .8 e pelo item 3 do teorema .6, $\alpha 0^* = 0^*$

□

Teorema .18. *Sejam α e β cortes. Se $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$ então $\alpha\beta = 0^*$.*

Demonstração. Para qualquer corte β, se $\alpha = 0^*$, pelos teoremas .12 e .17, $\alpha\beta = 0^*\beta, = \beta 0^* = 0^*$

Analogamente, para qualquer corte α, se $\beta = 0^*$ então $\alpha\beta = 0^*$. □

Teorema .19. *Seja $p > 1$ um racional dado. Então, para qualquer corte $\alpha > 0^*$, existem racionais r e q tais que, $r \in \alpha$, $r > 0$, $q \notin \alpha$, $q > 0$, q não é a menor cota superior de α e $p = \frac{q}{r}$.*

Demonstração. Seja s racional, $s \in \alpha$, $s > 0$. Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, seja $s_n = s(p^n)$.

Observamos que todos os s_n são tais que $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{s(p^{n+1})}{s(p^n)} = \frac{(sp^n)p}{sp^n} = p$. Então, existe um único inteiro m tal que $s_m \in \alpha$ e $s_{m+1} \notin \alpha$.

- Se s_{m+1} não for a menor das cotas superiores de α, consideramos $r = s_m \in \alpha$ e $q = s_{m+1} \notin \alpha$, e temos $\frac{q}{r} = \frac{s_{m+1}}{s_m} = p$.

- Se s_{m+1} for a menor das cotas superiores de α, consideramos $r = s_m(\sqrt{p})$ e $q = s_{m+1}(\sqrt{p})$. Observamos que,

  $$r = s_m(\sqrt{p}) = (sp^m)p^{\frac{1}{2}} = sp^{m+\frac{1}{2}} < sp^{m+1} = s_{m+1}$$

  Isto é, $r \in \alpha$, pois estamos considerando s_{m+1} como a menor cota superior de α. Observamos também que:

  $$q = s_{m+1}(\sqrt{p}) = (sp^{m+1})p^{\frac{1}{2}} = sp^{m+\frac{3}{2}} > sp^{m+1}$$

  Novamente, por estarmos considerando s_{m+1} como a menor cota superior de α, temos $q \notin \alpha$. Então,

  $$\frac{q}{r} = \frac{s_{m+1}(\sqrt{p})}{s_m(\sqrt{p})} = \frac{s_{m+1}}{s_m} = p.$$

□

Teorema .20. *Seja α um corte, $\alpha \neq 0^*$. Existe um único corte β (denotado por $\frac{1^*}{\alpha}$) tal que $\alpha\beta = 1^*$*

Demonstração. Provaremos primeiro a unicidade de β.

- Unicidade:

  Suponha que existem cortes β_1 e β_2 tais que $\alpha\beta_1 = 1^*$ e $\alpha\beta_2 = 1^*$. Então, pelos teoremas .12, .13 e .14:

  $\beta_1 = \beta_1 1^* = \beta_1(\alpha\beta_2) = (\beta_1\alpha)\beta_2 = (\alpha\beta_1)\beta_2 = 1^*\beta_2 = \beta_2 1^* = \beta_2$

- Existência:

  Se $\alpha < 0^*$, seja β o conjunto de todos os racionais $p < 0$ tais que $\frac{1}{p}$ é uma cota superior de α (portanto, $\frac{1}{p} \notin \alpha$), mas não é a menor das cotas superiores de α.

  Se $\alpha > 0^*$, seja β o conjunto de todos os racionais r não positivos ($r \leq 0$) e de todos os racionais $p > 0$ tais que $\frac{1}{p}$ é uma cota superior de α (portanto, $\frac{1}{p} \notin \alpha$), mas não é a menor das cotas superiores de α.

  Vamos provar que β é corte:

  1. Tanto para $\alpha < 0^*$ quanto para $\alpha > 0^*$, $\emptyset \neq \beta \neq \mathbb{Q}$ é trivial: de fato, como α é corte, existem racionais p tais que $\frac{1}{p}$ é uma cota superior de α mas não a menor (o que significa $\beta \neq \emptyset$) e existem racionais q tais que $\frac{1}{q}$ não é cota superior de α ou $\frac{1}{q}$ é a menor das cotas superiores de α (o que significa $\beta \neq \mathbb{Q}$).
  2. Seja $p \in \beta$ e q racional.

     Para $\alpha > 0^*$, se $q < p < 0$, $q < 0 < p$, $q < 0 = p$ ou $q = 0 < p$, por definição de β, $q \in \beta$.

     Assim, para $\alpha > 0^*$, seja $0 < q < p$, e para $\alpha < 0^*$, seja $q < p < 0$. Então $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$, tal que $\frac{1}{p}$ é uma cota superior não mínima de α (por definição de β). Logo, $\frac{1}{q}$ é uma cota superior de α, mas não a menor das cotas superiores de α. Portanto, $q \in \beta$.
  3. Seja $p \in \beta$ (se $\alpha > 0^*$, seja $p > 0$). Então $\frac{1}{p}$ é uma cota superior de α, mas não a menor. Então, existe racional q tal que $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$, com $\frac{1}{q} \notin \alpha$.

     Seja $r = \frac{p+q}{2}$. Como $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$, temos:

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{p} \Rightarrow p < q$$

$$\Rightarrow p + q < q + q$$

$$\Rightarrow p + q < 2q$$

$$\Rightarrow \frac{p+q}{2} < q$$

$$\Rightarrow r < q$$
$$\Rightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{r}$$

e também,

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{p} \Rightarrow p < q$$
$$\Rightarrow p + p < p + q$$
$$\Rightarrow 2p < p + q$$
$$\Rightarrow p < \frac{p+q}{2}$$
$$\Rightarrow p < r$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r} < \frac{1}{p}.$$

Ou seja, $\frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{1}{p}$, com $\frac{1}{q} \notin \alpha$, isto é, $\frac{1}{r}$ é uma cota superior de α, mas não é a menor das cotas superiores de α, portanto, $r \in \beta$. Como $\frac{1}{r} < \frac{1}{p} \Rightarrow r > p$, β não possui racional máximo.

Está provado que β é corte.

Seja $\alpha > 0^*$. Então, por definição de β, $\beta > 0^*$.

Suponha $p \in \alpha\beta$. Se $p \leq 0$, então $p < 1$, portanto, $p \in 1^*$

Seja $p > 0$. Então, $p = qr$, $q \in \alpha$, $r \in \beta$, $q > 0$, $r > 0$.

Mas, $r \in \beta \Rightarrow \frac{1}{r} \notin \alpha \Rightarrow q < \frac{1}{r} \Rightarrow qr < 1 \Rightarrow p \in 1^*$.

Suponha $p \in 1^*$. Se $p \leq 0$, então, pela definição .8, $p \in \alpha\beta$

Seja $p > 0$. Então, $1 > p > 0$. Logo, $\frac{1}{p} > 1$. Então, pelo teorema .19, existem racionais r e q tais que, $r \in \alpha$, $r > 0$, $q \notin \alpha$, $q > 0$, q não é a menor cota superior de α e $\frac{1}{p} = \frac{q}{r}$. Logo,

$$\frac{1}{p} = \frac{q}{r} \Rightarrow p = \frac{r}{q} = r\frac{1}{q}$$

Como $q \notin \alpha$ e q não é a menor cota superior de α, então $\frac{1}{q} \in \beta$. Portanto, $p \in \alpha\beta$.

Seja $\alpha < 0^*$. Então, por definição de β, $\beta < 0^*$. Logo, pela definição .8, $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$. Como, pela definição .7 e pelo lema .1, $|\alpha| = -\alpha > 0^*$ e $|\beta| = -\beta > 0^*$, a demonstração para o caso $\alpha < 0^*$ é análoga ao caso $\alpha > 0^*$.

Portanto, existe um único corte $\beta = \frac{1^*}{\alpha}$ tal que $\alpha\beta = \alpha\frac{1^*}{\alpha} = 1^*$.

$\square$

Teorema .21. *Se $\alpha \neq 0^*$, para cada corte β existe um único corte γ (denotado por $\frac{\beta}{\alpha}$) tal que $\alpha\gamma = \beta$.*

Demonstração. Seja $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \beta\frac{1^*}{\alpha}$. Então, pelos teoremas .12, .13, .14 e .20, temos:

$$\alpha\gamma = \alpha(\beta\frac{1^*}{\alpha}) = \alpha(\frac{1^*}{\alpha}\beta) = (\alpha\frac{1^*}{\alpha})\beta = 1^*\beta = \beta 1^* = \beta$$

Para provar a unicidade do teorema, suponhamos que existem γ_1 e γ_2 tais que $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2 = \beta$. Então, pelos teoremas .12, .13 e .14:

$$\gamma_1 = \gamma_1 1^* = \gamma_1(\alpha\frac{1^*}{\alpha}) = (\gamma_1\alpha)\frac{1^*}{\alpha} = (\alpha\gamma_1)\frac{1^*}{\alpha} =$$

$$= (\alpha\gamma_2)\frac{1^*}{\alpha} = (\gamma_2\alpha)\frac{1^*}{\alpha} = \gamma_2(\alpha\frac{1^*}{\alpha}) = \gamma_2 1^* = \gamma_2$$

$\square$

Teorema .22. *Quaisquer que sejam os racionais p e q, valem:*

1. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$
2. $p^* + q^* = (p+q)^*$
3. $p^* q^* = (pq)^*$

Demonstração.

1. Se $p < q$ então pela definição .3, $p \in q^*$ e $p \notin p^*$. Logo, também pela definição .3, $p^* < q^*$.

   Se $p^* < q^*$, então pela definição .3, existe racional r tal que $r \in q^*$ e $r \notin p^*$. Então,

   $$r \in q^* \Rightarrow r < q \text{ e } r \notin p^* \Rightarrow r \geq p$$

   Isto é, $p \leq r < q \Rightarrow p < q$

2. Seja $r \in p^* + q^*$. Então, pela definição .4, $r = s + t$, $s \in p^*$ e $t \in q^*$. Então,

   $$s < p \text{ e } t < q \Rightarrow s + t < p + q \Rightarrow r \in (p+q)^*$$

   Seja $r \in (p+q)^*$. Então

   $$r < p + q \Rightarrow p + q - r > 0$$

Sejam,

$$h = p + q - r$$
$$s = p - \frac{h}{2}$$
$$t = q - \frac{h}{2}$$

Observe que, $s < p \Rightarrow s \in p^*$ e $t < q \Rightarrow t \in q^*$. Então, $s + t \in p^* + q^*$. Mas.

$$s + t = p + q - h = p + q - (p + q) + r = r$$

Isto é, $r \in p^* + q^*$. Portanto, $p^* + q^* = (p + q)^*$.

3. Vamos dividir esta prova nos seguintes casos:

   Caso $p^* \geq 0^*$ e $q^* \geq 0^*$

   Se $p^* \geq 0^*$ e $q^* \geq 0^*$, então pelo primeiro item desse teorema, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Logo,

$$p \geq 0 \text{ e } q \geq 0 \Rightarrow pq \geq 0 \Rightarrow (pq)^* \geq 0^*$$

   Seja r racional, $r < 0$. Então, pela definição .8 e por $r \in (pq)^*$, $r \in p^*q^*$ e $r \in (pq)^*$.

   Seja r racional, $r \geq 0$. Se $r \in p^*q^*$, então pela definição .8, $r = st$, $s \in p^*$, $t \in q^*$, $s \geq 0$ e $t \geq 0$. Logo,

$$s < p \text{ e } t < q \Rightarrow st < pq \Rightarrow r \in (pq)^*$$

   Se $r \in (pq)^*$, então $r < pq$. Se $pq = 0$, então $r < 0$. Logo, $r \in p^*q^*$, pela definição .8. Se $pq > 0$, então $r < pq \Rightarrow \frac{r}{pq} < 1$.

   Sejam,

$$h = \frac{r}{pq}; 0 \leq h < 1$$
$$s = p\sqrt{h}; 0 \leq s < p$$
$$t = q\sqrt{h}; 0 \leq t < q$$

   Observe que, $s < p \Rightarrow s \in p^*$ e $t < q \Rightarrow t \in q^*$. Então, pela definição .8, $st \in p^*q^*$. Mas,

$$st = pq(\sqrt{h})^2 = pqh = pq\frac{r}{pq} = r$$

   isto é, $r \in p^*q^*$. Portanto, $p^*q^* = (pq)^*$

- Caso $p^* < 0^*$ e $q^* < 0^*$
  Se $p^* < 0^*$ e $q^* < 0^*$, então pelo primeiro item desse teorema, $p < 0$ e $q < 0$. Logo,

  $$p < 0 \text{ e } q < 0 \Rightarrow pq > 0 \Rightarrow (pq)^* \geq 0^*$$

  Observe que, para qualquer racional r, pelo pelo primeiro item desse teorema, $r \geq 0 \Leftrightarrow r^* \geq 0^*$ e $r < 0 \Leftrightarrow r^* < 0^*$. Então, pela definição .7:

  $$r \geq 0 \Rightarrow r^* \geq 0^* \Rightarrow |r^*| = r^* = |r|^*$$

  e também,

  $$r < 0 \Rightarrow r^* < 0^* \Rightarrow |r^*| = (-r)^* = |r|^*$$

  Isto é, $|r^*| = |r|^*$. Então, pela definição .8:

  $$p^*q^* = |p^*||q^*| = |p|^*|q|^*$$

  Como, $|p| \geq 0$ e $|q| \geq 0$ para quaisquer racionais p e q, pelo caso anterior, temos

  $$|p|^*|q|^* = (|p||q|)^*$$

  Pelo lema .3, como $pq > 0$, temos

  $$(|p||q|)^* = |pq|^* = (pq)^*$$

  Isto é, $p^*q^* = (pq)^*$
- Caso $p^* \geq 0^*$ e $q^* < 0^*$
  Se $p^* \geq 0^*$ e $q^* < 0^*$, então pelo primeiro item desse teorema, $p \geq 0$ e $q < 0$. Logo,

  $$p \geq 0 \text{ e } q < 0 \Rightarrow pq \leq 0 \Rightarrow (pq)^* \leq 0^*$$

  Como foi observado no caso anterior, para qualquer racional r, $|r^*| = |r|^*$. Logo, pelas definições .7 e .8 e pelo primeiro caso demonstrado nesse item, temos

  $$p^*q^* = -(|p^*||q^*|) = -(|p|^*|q|^*) = -(|pq|^*) = -(-(pq)^*) = (pq)^*$$

- Caso $p^* < 0^*$ e $q^* \geq 0^*$
  A prova desse caso é análoga à prova do caso anterior.

$\square$

Teorema .23. *Se α e β são cortes e $\alpha < \beta$, então existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.*

Demonstração. Se $\alpha < \beta$, então, pela definição .3, existe racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$.

Seja $r \in \beta$, tal que $r > p$ (tal r existe por definição de corte). Como $r \notin r^*$ e $r \in \beta$, então, pela definição .3, $r^* < \beta$.

Como $p < r \Rightarrow p \in r^*$, novamente pela definição .3, $\alpha < r^*$.

Portanto, $\alpha < r^* < \beta$.

$\square$

Teorema .24. *Para qualquer corte α, $p \in \alpha \Leftrightarrow p^* < \alpha$.*

Demonstração. Seja $p \in \alpha$. Para qualquer racional p, $p \notin p^*$. Portanto, pela definição .3, $p^* < \alpha$.

Seja $p^* < \alpha$. então, pela definição .3, existe racional q, tal que $q \in \alpha$ e $q \notin p^*$. Mas,

$$q \notin p^* \Rightarrow q \geq p$$

Como $q \in \alpha$, pela definição .1, $p \leq q \Rightarrow p \in \alpha$

$\square$

Definição .9. [23] *Cortes serão chamados, daqui por diante, números reais. Cortes racionais serão identificados com números racionais (e chamados de números racionais). Todos os demais cortes serão chamados números irracionais.*

Teorema .25. [23]

Sejam A e B conjunto de números reais tais que

1. *$\forall\alpha$, α número real, $\alpha \in A$ ou $\alpha \in B$*
2. *$A \cap B = \emptyset$*
3. *$A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$*
4. *se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$*

Então existe um único número real γ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\forall\alpha \in A$ e $\gamma \leq \beta$, $\forall\beta \in B$.

Demonstração.

- Unicidade: Suponhamos que existem γ_1 e γ_2 tais que $\alpha \leq \gamma_1$, $\alpha \leq \gamma_2$, $\forall\alpha \in A$, $\gamma_1 \leq \beta$ e $\gamma_2 \leq \beta$, $\forall\beta \in B$, com $\gamma_1 < \gamma_2$.

  Pelo teorema .23, existe γ_3 racional, tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$.

Como $\alpha \leq \gamma_1$ para qualquer $\alpha \in A$ e $\gamma_1 < \gamma_3$, então $\gamma_3 \notin A$ (pois, se $\gamma_3 \in A$ teríamos $\gamma_3 \leq \gamma_1$).

Analogamente, como $\gamma_2 \leq \beta$ para qualquer $\beta \in B$ e $\gamma_3 < \gamma_2$, então $\gamma_3 \notin B$ (pois, se $\gamma_3 \in B$ teríamos $\gamma_2 \leq \gamma_3$).

Então, γ_3 é um número real racional tal que $\gamma_3 \notin A$ e $\gamma_3 \notin B$, o que contradiz a hipótese 1.

- Existência: seja γ o conjunto de todos os racionais p tais que $p \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$. Vamos provar que γ é corte.

  1. De fato, $\gamma \neq \emptyset$ pois $A \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \emptyset$, $\forall \alpha \notin A$. Seja $\alpha \in A$, $\beta \in B$ e $q \notin \beta$. Como $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$. Mas, $\alpha < \beta$ e $q \notin \beta \Rightarrow q \notin \alpha$. Logo, γ não contém todos os racionais.
  2. Se $p \in \gamma$ e $q < p$, então $p \in \alpha$ e $q < p$. Logo, $q \in \alpha$, $\alpha \in A$. Portanto, $q \in \gamma$.
  3. Se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$, para algum número real $\alpha \in A$. Logo, existe q racional tal que $q > p$, $q \in \alpha$, para algum número real $\alpha \in A$. Então, $q \in \gamma$ tal que $q > p$.

  Portanto, γ é corte.

  Suponhamos que $\gamma < \alpha$, $\forall \alpha \in A$. Então, pela definição .3, existe p racional tal que $p \in \alpha$ e $p \notin \gamma$, o que contradiz a definição de γ. Portanto, $\alpha \leq \gamma$, $\forall \alpha \in A$.

  Suponhamos que $\beta < \gamma$, $\forall \beta \in B$. Então, existe q racional tal que $q \in \gamma$ e $q \notin \beta$. Mas, pela definição de γ, $q \in \gamma \Rightarrow q \in \alpha$. Então, como $q \in \alpha$ e $q \notin \beta$, pela definição .3, $\beta < \alpha$, $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, contradizendo a hipótese 4. Portanto, $\gamma \leq \beta$, $\forall \beta \in B$.

□

Corolário .2. [23]
Nas condições do teorema .25, ou existe em A uma menor cota superior, ou existe em B uma maior cota inferior.

Demonstração. a. Se $\gamma \in A$, então γ é o número real máximo de A, isto é, γ é a menor cota superior de A.

b. Se $\gamma \in B$, então γ é o número real mínimo de B, isto é, γ é a maior cota inferior de B.

Pela hipótese 1 do teorema .25, ocorre a ou b. Pela hipótese 2 do teorema .25, não ocorre a e b.

□

Definição .10. ***Cota superior*** [23] *Seja E um conjunto de números reais. Se existe número real y tal que*

$$x \leq y, \forall x \in E$$

dizemos que E é limitado superiormente e dizemos que y é uma cota superior de E.

Definição .11. ***Supremo*** [23] *Seja E um conjunto de números reais. Dizemos que o número real y é o supremo de E (denotado por $sup(E)$) se:*

1. *y é cota superior de E.*

2. *se x é um número real tal que $x < y$, então x não é cota superior de E, $\forall x$.*

Definição .12. ***Cota inferior*** [23] *Seja E um conjunto de números reais. Se existe número real y tal que*

$$y \leq x, \forall x \in E$$

dizemos que E é limitado inferiormente e dizemos que y é uma cota inferior de E.

Definição .13. ***Ínfimo*** [23] *Seja E um conjunto de números reais. Dizemos que o número real y é o ínfimo de E (denotado por $inf(E)$) se:*

1. *y é cota inferior de E.*

2. *se x é um número real tal que $y < x$, então x não é cota inferior de E, $\forall x$.*

Definição .14. [23] *Seja E um conjunto de números reais. Se E é limitado superiormente e inferiormente, dizemos que E é limitado.*

Teorema .26. [23]

Seja E um conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente. Então, existe $sup(E)$.

Demonstração. Seja A um conjunto de números reais definido da seguinte maneira:

$$\alpha \in A \Leftrightarrow \exists x \in E, \text{ tal que } \alpha < x.$$

Ou seja, A é o conjunto de todos os números reais que não são cotas superiores de E.

Seja B o conjunto de todos os números reais que não estão em A, isto é,

$$\beta \in B \Leftrightarrow x \leq \beta, \forall x \in E.$$

Ou seja, B é o conjunto de todas as cotas superiores de E.

Vamos verificar que A e B satisfazem as hipóteses do teorema .25.

1. $\forall \alpha$, α número real, $\alpha \in A$ ou $\alpha \in B$.

   Trivial: todo número real que não é cota superior de E está em A, e todo número real que é cota superior de E está em B.

2. $A \cap B = \emptyset$.

   Trivial: ou um número real é cota superior de E ou não.

3. $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.

   Como $E \neq \emptyset$, existe $x \in E$ tal que todo número real $\alpha < x$ está em A. Portanto, $A \neq \emptyset$.

   Como E é limitado superiormente, existe y tal que $x \leq y$, $\forall x \in E$. Portanto, y é cota superior de E, então $y \in B$. Logo, $B \neq \emptyset$.

4. se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$.

   Se $\alpha \in A$, então existe $x \in E$ tal que $\alpha < x$. Se $\beta \in B$, então β é cota superior de E, isto é, $x \leq \beta$, $\forall x \in E$. Então, $\alpha < x \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$.

Portanto, pelo corolário .2, ou A possui uma menor cota superior, ou existe em B uma maior cota inferior.

Se $\alpha \in A$, existe $x \in E$ tal que $\alpha < x$. Então, pelo teorema .23, existe α' racional, tal que $\alpha < \alpha' < x$.

Como $\alpha' < x$, $\alpha' \in A$. Então, A não possui máximo, isto é, não existe a menor cota superior de A ($sup(A)$).

Portanto, B possui uma maior cota inferior ($inf(B)$), e como B é o conjunto de todas as cotas superiores de E, a maior cota inferior de B é a menor cota superior de E ($inf(B) = sup(E)$).

□

Teorema .27. [23]

Para cada $x > 0$, real, e para cada $n > 0$, inteiro, existe um único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$.

Demonstração.

- Unicidade: Suponha que existem y_1 e y_2 tais que $y_1^n = x = y_2^n$, com $0 < y_1 < y_2$. Então, $y_1^n < y_2^n$, o que contradiz a hipótese.

- Existência: Seja E o conjunto de todos os t reais positivos tais que $t^n < x$.

  Como para todo $x > 0$, real, $x < x + 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} < 1$, fazendo $t = \frac{x}{x+1}$, temos

$$0 < t^n \leq t < x.$$

Isto é, E não é vazio.

Seja $t_0 = 1 + x$. Observe que $t_0 > 1$, $\forall x > 0$.

Se $t > t_0$, então $t > 1$. Logo,

$$t^n \geq t > t_0 = 1 + x > x.$$

Isto é, $t^n > x$. Então, $t \notin E$. Portanto, $t \leq t_0$, isto é, t_0 é uma cota superior de E.

Como E é não vazio e limitado superiormente, pelo teorema .26, existe $sup(E)$.

Seja $y = sup(E)$.

Suponha $y^n < x$. Então, $x - y^n > 0$. Além disso,

$$0 < y \Rightarrow y < 1 + y \Rightarrow y^n < (1+y)^n \Rightarrow (1+y)^n - y^n > 0.$$

Seja h, real, tal que $0 < h < 1$ e $h < \frac{x-y^n}{(1+y)^n - y^n}$. Designando por $\binom{n}{m}$ o coeficiente de z^m no desenvolvimento do binômio $(1+z)^n$, temos:

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} h + \binom{n}{2} y^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} h^n \\
&\leq y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} h + \binom{n}{2} y^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n} h \\
&= y^n + h[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}] \\
&= y^n + h[(y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} 1 + \binom{n}{2} y^{n-2} 1^2 + \cdots + \binom{n}{n} 1^n) - y^n] \\
&= y^n + h[(y+1)^n - y^n] = y^n + h[(1+y)^n - y^n] \\
&< y^n + \left[\frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}\right] [(1+y)^n - y^n] \\
&= y^n + [x - y^n] = x \\
&\Rightarrow (y+h)^n < x \Rightarrow (y+h) \in E.
\end{aligned}$$

Mas, como $(y+h) > y$, existe $y' \in E$, $y' = (y+h) > 0$, tal que $y' > y$, o que contradiz $y = sup(E)$.

Suponha $y^n > x$. Então, $y^n - x > 0$. Além disso,

$$0 < y \Rightarrow y < 1 + y \Rightarrow y^n < (1+y)^n \Rightarrow (1+y)^n - y^n > 0.$$

Seja k, real, tal que $0 < k < 1$, $k < y$ e ainda $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$. Observe que,

$$k < y \Rightarrow y - k > 0 \text{ e } k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n} \Rightarrow -k > -\left[\frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}\right].$$

Então:

$$(y-k)^n = y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} k + \binom{n}{2} y^{n-2} k^2 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} k^n$$

$$= y^n - k\left[\binom{n}{1} y^{n-1} - \binom{n}{2} y^{n-2} k + \cdots - (-1)^n \binom{n}{n} k^{n-1}\right]$$

$$= y^n - k\left[\left(\frac{\left(y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} k + \binom{n}{2} y^{n-2} k^2 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} k^n\right) - y^n}{k}\right)\right]$$

$$= y^n - k\left[\left(\frac{(y-k)^n - y^n}{k}\right)\right].$$

Como $0 < k < 1 \Rightarrow \frac{1}{k} > 1$, temos

$$y^n - k\left[\left(\frac{(y-k)^n - y^n}{k}\right)\right] > y^n - k\left[(y-k)^n - y^n\right]$$

$$> y^n - \left[\frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}\right]\left[(y-k)^n - y^n\right]$$

$$= y^n - (y^n - x) = x.$$

Isto é, $(y-k)^n > x$. Como, para todo $t \in E$, $t^n < x$, temos

$$0 < t^n < x < (y-k)^n \Rightarrow 0 < t < (y-k), \forall t \in E.$$

Ou seja, $(y-k)$ é uma cota superior de E, tal que $(y-k) < y$ (pois, $0 < k < 1$), o que contradiz $y = sup(E)$.

Portanto, $y^n = x$.

$\square$

Capítulo 11

Conclusão

Começando com uma abordagem mais voltada para a narração de relatos históricos, ora confirmando, ora desmentindo alguns "mitos"e "lendas"difundidos na história da matemática e culminando com uma vasta sequência de definições e demonstrações matemáticas de teoremas que definem rigorosamente o conjunto dos números reais pelos cortes de Dedekind, nesse trabalho, analisamos do ponto de vista histórico a necessidade do surgimento de novos sistemas de numeração e novas notações para os números, através de diferentes culturas em diversos momentos históricos. Também analisamos a dificuldade da representação de frações antes do surgimento da notação proposta por Simon Stevin, o dilema histórico dos números irracionais e a necessidade de definir rigorosamente o conjunto dos números reais.

Esperamos que tal conteúdo possa enriquecer o professor de matemática do ensino fundamental e médio (e, por que não, também do ensino superior) disposto a complementar suas aulas inserindo aspectos históricos e culturais ao abordar os conteúdos matemáticos inseridos no currículo escolar.

Em futuros projetos, esperamos abranger e complementar os conteúdos aqui apresentados, apresentando o surgimento e evolução do estudo do infinito matemático através do ponto de vista histórico.

Bibliografia

[1] D'Ambrosio, Ubiratan. *Educação Matemática: da Teoria à Prática.* 2ª edição, Campinas - SP; Papirus, 1997.

[2] Roque, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[3] Boyer, Carl Benjamin. *História da matemática.* Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[4] Oliveira, Daniela Santos. *Números e sistemas de numeração.* Monografia (Especialização - Programa de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Matemática) - Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo. Orientador: Antonio Sérgio Cobianchi - Lorena: 2008.

[5] Rômulo Calado Pantaleão Camara. *https://docs.ufpr.br/ mariana-kleina/Material3.pdf* . Universidade Federal do Vale do São Francisco - Colegiado de Engenharia da Computação (Notas de aula).

[6] Gonçalves, Carlos Henrique Barbosa. *Notas sobre a Recepção da Matemática Mesopotâmica na Historiografia.* Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.14 n.3, pp.322-335, 2012.

[7] Gonçalves, Carlos Henrique Barbosa. *Observações sobre A Tradução de Textos Matemáticos Cuneiformes.* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, Brasil, vol. 24, núm. 38, pp. 1-15, abril, 2011.

[8] Saboya, Maria Clara Lopes. *Pitágoras: Todas as coisas são números*; Educação, Gestão e Sociedade: revista da Faculdade Eça de Queirós, ISSN 2179-9636, Ano 5, número 19, agosto de 2015. www.faceq.edu.br/regs

[9] Duarte, Carlos Lisboa. Gonçalves, Hegildo Holanda. Nóbrega, Nádia Pinheiro. *Tudo é número: uma análise conceitual da ideia de número em Pitágoras*; Revista Princípia: Divulgação Científica e tecnológica do IFPB, Nº 33, joão Pessoa, maio 2017.

[10] MENDONÇA, Raquel Gomes Rosa de. *Um retrato histórico da adoção do sistema numérico indo-arábico pela Europa Ocidental e o papel do Liber abaci.* 2021. 141f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional); Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

[11] PAIVA, Nayara Viana. *Sistema de Numeração Hindu-Arábico.* (Licenciatura Plena em Matemática) Universidade Estadual do Ceará - UECE, Faculdade de educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Quixadá - CE, 2010.

[12] CELESTINO, Kamila Gonçalves. *As Frações em algumas Civilizações Antigas.* Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO, Encontro Paranaense de Educação Matemática, Unioeste de Cascavel, 21 a 23 de setembro de 2017.

[13] AIRES, Aparecido. *Simon Stevin e a Representação dos Números Não Inteiros.* Programa de Pós-Graduação em Educação - UFMT; IV Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade ISSN 1982-3657.

[14] DIAS, Sandy da Conceição. *Simon Stevin e os números Decimais.* Universidade do estado do Pará - XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: Desafios e Possibilidades, SBEM, São Paulo-SP, 13 a 16 de julho de 2016.

[15] Lopes, Thiago Beirigo. Jucá, Rosineide de Sousa. Sá, Pedro Franco de. *Contribuições de Simon Stevin para o Desenvolvimento da Notação Decimal para Números Não Inteiros.* Boletim Cearense de educação e História da Metmática - Volume 8, Número 22, 06 - 18, 2021.

[16] Maher, David W .; Makowski, John F. *Literary Evidence for Roman Arithmetic with Fractions Archived* 27 de agosto de 2013 na Wayback Machine, Classical Philology 96 (2011): 376?399.

[17] Trzaskacz, Alcides José. Hrentchechen, Karolina Barone da Silva. *Irracionais na História da Matemática.* Revista ESPACIOS. ISSN 0798 1015 Vol. 38 (n°60) Ano 2017 - Pág. 2

[18] Broetto, Geraldo Claudio. dos Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira. *Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática.* Vitória, ES; edifes, 2017.

[19] Dedekind, Richard. *¿QUE SON Y PARA QUÉ SIRVEN LOS NÚMEROS? Y OTROS ESCRITOS SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA.* Ediciones de la Universidad Autônoma de Madrid - Alianza Editorial

[20] Dedekind, Richard. *ON CONTINUITY AND IRRATIONAL NUMBERS.* From the german by W. W. Berman. Pages, 115. Cloth, 75 cents net (3s. 6d. net).

[21] Silva, Bruno Pereira da. *Construção dos Números Reais por Sequências de Cauchy e por Cortes de Dedekind.* Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza - Mestrado Profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT). Dissertação (Mestrado). Orientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro. UFPB - João Pessoa, 2018.

[22] Xavier, Valmir Heráclito Nascimento. *Construção do Corpo dos Números Reais Via Cortes de Dedekind.* Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza - Programa de Pós-Graduação em Matemática. Dissertação (Mestrado). Orientação: Miriam da Silva Pereira. UFPB - João Pessoa, 2017.

[23] Rudin, Walter. *Princípios de análise Matemática.* Eliana Rocha Henriques de Brito (Trad.), Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971. 296 p.

[24] Mattos, Guylherme de Barros. *A Construção dos Números.* Guylherme de Barros Mattos; Carlos Henrique Pereira do Nascimento, orientador; Marina Ribeiro Barros Dias, coorientadora. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)- Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, 2021.