# Notas de Lógica Básica

Ralph Costa Teixeira

2013

## 0.1 Aula 1: Enunciados e Conectivos

### 0.1.1 Enunciados Abertas e Fechadas

Sem ser formal, enunciados abertos são aqueles que têm variáveis "livres", isto é, que podem ser substituídas por valores dentro de um certo universo $U$. Enunciados fechados não têm variáveis livres.

**Exemplo 1**

| ***Fechados*** | ***Abertos*** |
|---|---|
| *2 é par* | $x$ *é par* |
| *2 é primo* | $x$ *é primo* |
| *4 é ímpar* | $x^2 - 8x + 1 = 0$ |
| $\sqrt{2}$ *é irracional* | $x^3 + x^2 \leq 2$ |
| $3 \leq 3$ | $y \leq x$ |

Cada enunciado fechado tem exatamente um de dois valores lógicos: Verdadeiro (V) ou Falso (F).

Cada enunciado aberto $p(x)$ tem um *conjunto-verdade*, que é o conjunto dos valores de $x$ que o tornam verdadeiro:

$$V = \{x \in U \mid p(x)\}$$

**Exemplo 2** *Tomando $x$ como uma variável no universo $U = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ (números naturais):*

$$\begin{aligned} p(x) &: x \text{ é par} \Rightarrow V = \{0, 2, 4, 6, ...\} \\ q(x) &: x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow V = \emptyset \\ r(x) &: x^3 + x^2 \leq 2 \Rightarrow V = \{0, 1\} \end{aligned}$$

**Comentário 3** *Desafio: dado um conjunto $A$ qualquer, sempre existe um enunciado aberto cujo conjunto-verdade é $A$? A resposta é positiva mas um pouco "decepcionante": tome $p(x) : x \in A$.*

### 0.1.2 Novos Enunciados a Partir de Antigos (conectivos)

Usando "e", "ou" e "não", podemos criar novos enunciados a partir de outros.

**Exemplo 4**

| | | |
|---|---|---|
| 2 *é par* | *e* | 2 *é primo* |
| 2 *é par* | *ou* | 4 *é ímpar* |
| 2 *é par* | *ou* | 2 *é primo* |
| 2 *não é par* | | |

O valor lógico do novo enunciado é determinado (a partir dos antigos) pelas tabelas abaixo:

**Definição de "não":**

| $p$ | $\bar{p}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

(lê-se $\bar{p}$ como "não $p$").

**Definição de "e", "ou":**

| $p$ | $q$ | $p$ e $q$ | $p$ ou $q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | F |

Em outras palavras:

"$p$ e $q$" significa "ambas as sentenças são verdadeiras"

"$p$ ou $q$" significa "pelo menos uma das sentenças é verdadeira"

**Comentário 5** *Note que o "ou lógico" inclui a possibilidade de p e q serem ambas verdadeiros! Na língua comum, "ou" tem significado ambíguo que depende do contexto. Por exemplo, "Jantarei ou irei ao cinema" é frequentemente interpretado como "Farei apenas UMA destas opções"; já na frase "eu te dou 10 reais se você lavar a louça ou der comida para o cachorro", fica implícito que se você fizer ambos, receberá os 10 reais. Para evitar a ambiguidade, há truques de linguagem:*
*A construção "ou isso ou aquilo", com a repetição, ajuda a caracterizar o "ou exclusivo".*
*A construção "isso e/ou aquilo" é feia, mas caracteriza o "ou lógico". Outra opção é "Isso, ou aquilo, ou ambos".*

Com estas definições, "e", "ou", "não" são operações algébricas entre valores lógicos (como soma e multiplicação são operações algébricas entre valores numéricos).

**Proposição 6** *Valem as seguintes propriedades*

$$\begin{aligned} \bar{\bar{p}} &= p \text{ (A negação da negação é o enunciado original)} \\ (p \text{ ou } p) &= (p \text{ e } p) = p \text{ (Logicamente, de nada adianta repetir } p \text{ num "e" ou num "ou")} \\ p \text{ ou } \bar{p} &= V \text{ (Sempre vale um enunciado ou sua negação...)} \\ p \text{ e } \bar{p} &= F \text{ (...mas nunca valem ambos ao mesmo tempo!)} \end{aligned}$$

**Proposição 7** *"Ou" e "e" são distributivas uma com relação à outra*

$$\begin{aligned} p \text{ e } (q \text{ ou } r) &= (p \text{ e } q) \text{ ou } (p \text{ e } r) \\ p \text{ ou } (q \text{ e } r) &= (p \text{ ou } q) \text{ e } (p \text{ ou } r) \end{aligned}$$

**Exemplo 8** *Você sabe que um carro é um Uno, mas não se lembra se é 97 ou 98. Então o carro é*

$$UNO \text{ e } (97 \text{ ou } 98) = (UNO \text{ e } 97) \text{ ou } (UNO \text{ e } 98)$$

*Isto é, é um UNO 97 ou um UNO 98.*

**Exemplo 9** *Para ganhar um beijo, você tem que elogiar sua namorada (E), ou levar ela para ambos jantar (J) e cinema (C). Assim, a condição para ganhar um beijo é*

$$E \text{ ou } (J \text{ e } C) = (E \text{ ou } J) \text{ e } (E \text{ ou } C)$$

*Então, para ganhar o beijo, as condições "elogio ou jantar" e "elogio ou cinema" tem que ser ambas satisfeitas (com elogio, você garante ambas de uma vez; sem elogio, você terá que garantir uma com jantar e outra com cinema). Note que esta última construção é muito incomum em linguagem natural, portanto difícil de interpretar.*

**Proposição 10** *As negações de enunciados compostos podem ser feitas assim:*

$$\begin{aligned} \overline{(p \text{ } ou \text{ } q)} &= \bar{p} \text{ } e \text{ } \bar{q} \\ \overline{(p \text{ } e \text{ } q)} &= \bar{p} \text{ } ou \text{ } \bar{q} \end{aligned}$$

**Exercício 11** *Negue (e interprete!) os seguintes enunciados:*
*i) Ela é bonita e simpática.*
*ii) Ele é estudante ou trabalha.*
*iii) Você passa no vestibular ou apanha.*
*iv) Eu não liguei mas*[1] *mandei um telegrama.*

Em geral, a frase "$p_1$ e $p_2$ e $p_3$ ... e $p_n$" significa "todos os $n$ enunciados são verdadeiros". Portanto, sua negação é "pelo menos um dos $n$ enunciados é falso". Em símbolos:

$$\overline{(p_1 \text{ e } p_2 \text{ e ... e } p_n)} = \bar{p}_1 \text{ ou } \bar{p}_2 \text{ ou ... ou } \bar{p}_n$$

Analogamente, "$p_1$ ou $p_2$ ou ... ou $p_n$" significa "pelo menos um destes $n$ enunciados é verdadeiro". Portanto, ele só pode ser falso se *todos* os $n$ enunciados forem falsos. Em símbolos:

$$\overline{(p_1 \text{ ou } p_2 \text{ ou...ou } p_n)} = \bar{p}_1 \text{ e } \bar{p}_2 \text{ e ... e } \bar{p}_n$$

**Comentário 12** *As demonstrações de todas as propriedades acima citadas são feitas simplesmente analisando todos os casos possíveis de valores lógicos para os enunciados $p$, $q$ e $r$. São apenas* $2.2.2 = 8$ *casos, que podem ser organizados numa* tabela-verdade *como a seguinte:*

| $p$ | $q$ | $r$ | $q$ e $r$ | $p$ ou $(q$ e $r)$ | $p$ ou $q$ | $p$ ou $r$ | $(p$ ou $q)$e$(p$ ou $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V | V | V | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | F | V | F | F |
| F | F | V | F | F | F | V | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

*As três primeiras colunas têm as 8 possibilidades para $p$, $q$ e $r$. A partir daí, as outras colunas são obtidas mecanicamente de acordo com a definição de "e" e "ou". Como a 5a coluna é idêntica à última, vem*

$$p \text{ } ou (q \text{ } e \text{ } r) = (p \text{ } ou \text{ } q) \text{ } e \text{ } (p \text{ } ou \text{ } r)$$

*quaisquer que sejam os valores de $p$, $q$ e $r$.*

**Exemplo 13** *Como*

$$xy = 0 \text{ é o mesmo que } (x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

*então*

$$xy \neq 0 \text{ é o mesmo que } (x \neq 0 \text{ e } y \neq 0)$$

[1] Note que, *logicamente*, "mas" significa exatamente o mesmo que "e"!

**Exemplo 14** *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x\,(x-y)=0 \\ (y-1)\,(x+y)=0 \end{cases}$$

***Primeira Solução:*** *Note que a chave significa "e". Assim, temos*

$$\begin{cases} x\,(x-y)=0 \\ (y-1)\,(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} (x=0 \ \ ou \ x=y) \\ e \\ (y=1 \ \ ou \ x=-y) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} (x=0 \ \ e \ y=1) \\ ou \\ (x=0 \ \ e \ x=-y) \\ ou \\ (x=y \ \ e \ y=1) \\ ou \\ (x=y \ \ e \ x=-y) \end{array}$$

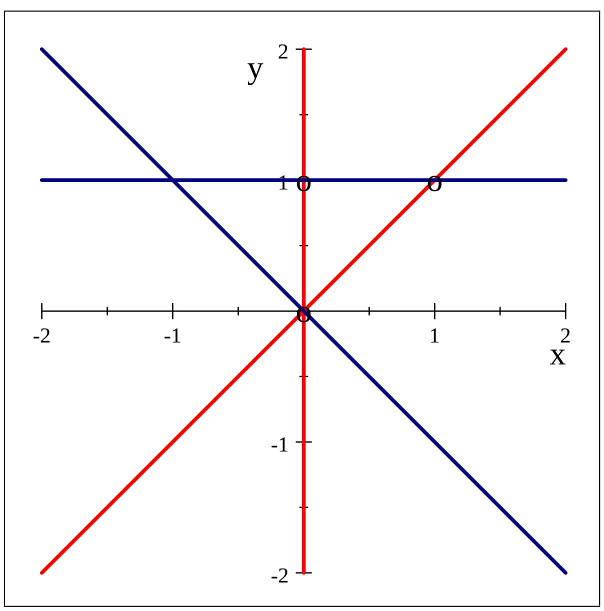
*Assim, o conjunto solução é*

$$S=\{(0,1)\,,(0,0)\,,(1,1)\}$$

***Segunda Solução:*** *A primeira equação sugere dividir o problema em dois casos: $x=0$ (Caso 1) OU $x\neq 0$ (Caso 2).*
*Caso 1: Se $x=0$, o sistema passa a ser $0=0$ e $y\,(y-1)=0$, isto é, $y=0$ ou $y=1$. Assim temos as soluções $(0,0)$, $(0,1)$.*
*Caso 2: Se $x\neq 0$, podemos cortar $x$ na primeira equação e ficar com $x=y$. Substituindo na segunda, vem $(y-1)\,2y=0$, isto é, $y=1$ ou $y=0$ (esta não serve, pois seria então $x=y=0$). Daqui temos a solução $x=y=1$.*
*Juntando os dois casos (era um OU outro), temos*

$$S=\{(0,1)\,,(0,0)\,,(1,1)\}$$

***Graficamente:***



**Comentário 15** *No exemplo anterior, você deve ter notado que, se $A$ é o conjunto-verdade da sentença lógica $p$, e $B$ é o conjunto-verdade da sentença lógica $q$, então*

$$\text{o conjunto-verdade de } (p \text{ e } q) \text{ é } A \cap B$$
$$\text{o conjunto-verdade de } (p \text{ ou } q) \text{ é } A \cup B$$

*o que conecta a lógica com a teoria dos conjuntos.*

## 0.2 Aula 2: Implicações e Equivalências

### 0.2.1 Implicação Lógica

**Definição 16** ***Definição de*** $\Rightarrow$: *Dados dois enunciados $p$, $q$ a* implicação $p \Rightarrow q$ *é definida pela tabela abaixo:*

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

*Diz-se "p implica q" ou "p, logo q" ou "se p, então q" ou "p é suficiente para q" ou "q é necessário para p". Diz-se que $p$ é a* hipótese *da implicação, e $q$ é a* tese.

**Exemplo 17** *Seu pai diz: "Se você passar no vestibular, eu te dou um carro". Então p é "passar" e q é "ganhar carro". Logicamente, ele está dizendo que:*
*Pode ser que você passe no vestibular e ganhe um carro (linha 1 da tabela);*
*Pode ser que você não passe no vestibular e não ganhe o carro (linha 4);*
***Pode ser que você não passe no vestibular e ganhe o carro (linha 3)*** *– você pode ganhar o carro por outros motivos, sei lá, porque lavou a louça ou tratou bem a sua mãe.*
*O que ele está dizendo é que a seguinte situação é impossível: você passar e não ganhar o carro (linha 2). Se isto acontecer, a implicação é falsa e seu pai mentiu.*
*Em outras palavras, seu pai está dizendo o que vai acontecer SE você passar; ele não está dando nenhuma informação do que vai acontecer se você NÃO passar!*

**Exemplo 18** *"Todo homem é mortal", ou seja, "se homem, então mortal". Pode haver homens (linha 1), pedras (linha 4) e cavalos (linha 3), nada disso faz a implicação ser falsa. Para derrubar a implicação (linha 2), você teria que apresentar um homem imortal.*

**Exemplo 19** *"Quem é italiano, é europeu". Verdadeira. Pode haver no mundo italianos (1), franceses (3) e brasileiros (4). Agora, se você arrumar um italiano não europeu (2), a implicação seria falsa.*

**Exemplo 20** *"Se homem, então não pode dar à luz". Verdadeira. Pode haver homens (1), mulheres férteis (4) e bules de café (3). Agora, o Arnold Schwarzenegger no filme Júnior (2) faria a implicação ser falsa.*

**Exemplo 21** *"Penso, logo existo". Pense nisso.*

**Exemplo 22** *"Se $m$ é ímpar, então $m^2$ é ímpar". Verdadeira, qualquer que seja $m$ natural.*

**Exemplo 23** $x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$. *Verdadeira, independente de* $x$. *Note que* $x = 2$ *e* $x = 1$ *também fazem a IMPLICAÇÃO SER VERDADEIRA! Aliás, tomando* $x \neq -1$ *nem interessa o que tem do lado direito da implicação – FALSO IMPLICA QUALQUER COISA!*

Em suma, cuidado para não confundir: $p \Rightarrow q$ não é $p$, nem $q$, muito menos $p$ e $q$. "Se você passar eu te dou um carro" não significa necessarimente que você vai passar, nem ganhar um carro. Dizer que $x = 7 \Rightarrow x^2 = 49$ não significa que $x = 7$, nem que $x^2 = 49$.

Agora, realmente, para JULGAR se uma implicação $p \Rightarrow q$ é verdadeira ou não, BASTA analisar os casos em que $p$ é verdadeira (pois, se $p$ é falsa, $p \Rightarrow q$ é automaticamente verdadeira). Por este motivo é que acostumamos a ler implicações fingindo que a hipótese é verdadeira[2].

### 0.2.2 Equivalência Lógica

**Definição 24** ***Definição de*** $\Leftrightarrow$ . *Dados dois enunciados* $p$, $q$, *a* equivalência $p \Leftrightarrow q$ *é definida pela tabela:*

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

*ou seja,* $p$ *é (logicamente) equivalente a* $q$ *quando ambas têm o mesmo valor lógico. Diz-se também "*$p$*, se, e somente se,* $q$*" ou "*$p$ *é necessário e suficiente para* $q$*".*

**Exemplo 25** *Seu pai diz "Você passa no vestibular se, e somente se, eu te der um carro". Agora sim: se você passar, você leva o carro; se você não passar, seu pai está garantindo que você não vai ganhar um carro dele – não adianta lavar a louça. Em outras palavras, para ganhar um carro* ***basta (é suficiente)*** *passar, mas para ganhar um carro* ***é necessário*** *passar.*

**Proposição 26**

$$((p \Rightarrow q) \;\; e \;\; (q \Rightarrow p)) = (p \Leftrightarrow q)$$

*Ou seja, mostrar que dois enunciados* $p$, $q$ *são equivalentes é mostrar que* $p \Rightarrow q$ *(a chamada IDA) e que* $q \Rightarrow p$ *(a VOLTA).*

### 0.2.3 Implicações e Álgebra

Vejamos como as implicações e equivalências aparecem na resolução de equações simples.

**Exemplo 27** *Considere a seguinte maneira "estranha" de resolver a equação* $2x - 1 = 2x + 1$ *nos reais:*

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 2x + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2x-1)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

[2] Há vários raciocínios extensos e úteis onde cada "termo" é completamente FALSO (mas as implicações são verdadeiras), como veremos mais tarde na técnica de "redução ao absurdo".

*Note que $x = 0$ não é solução da equação original. Analise com cuidado: qual o erro lógico da sequência acima?*
*Resposta: não há erro lógico algum! Todas as implicações valem (independentemente do $x$ escolhido). O passo "polêmico" de elevar ao quadrado dos dois lados é perfeitamente válido: $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ sim senhor (não vale a volta, mas nunca dissemos isto). O erro seria achar que isto é "resolver" a equação original; "resolver" significa achar todas as soluções e* ***nenhum outro valor*** *para $x$.*
*Então atenção: usando implicações chegamos apenas a* ***candidatos à solução****. Para completar o problema, temos que testar os valores candidatos encontrados e ver quais servem. Este "teste" tem de ser feito mesmo que você tenha certeza absoluta de todos os seus cálculos! Então façamos isto*

$$x = 0 \Rightarrow 2x - 1 = -1 \neq 1 = 2x + 1$$

*Com isto, mostramos que o único candidato não presta, então o conjunto solução é $S = \emptyset$.*

**Exemplo 28** *Resolva (no universo dos reais) a equação $x + \sqrt{x} = 6$. Temos:*

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x} &= 6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = (6 - x)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 9 \end{aligned}$$

*Então os candidatos à solução são apenas 4 e 9. Agora temos de testar estes candidatos:*

$$\begin{aligned} x &= 4 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 4 + 2 = 6 \text{ (ok)} \\ x &= 9 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 9 + \sqrt{9} = 12 \text{ (não serve)} \end{aligned}$$

*Portanto, $S = \{4\}$. Note que o problema não é o "domínio" da função $\sqrt{x}$! Afinal, $\sqrt{9}$ existe. O problema é que fizemos tudo com implicações lógicas, então temos que garantir a volta de algum jeito – por exemplo, testando as soluções diretamente!*

**Exemplo 29** *Resolva $2x - 1 = 0$.*

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

*Tecnicamente, isto não termina o problema. Como o reciocínio foi feito por implicações, você agora tem que testar $x = \frac{1}{2}$ na equação original! Testou? Funcionou? Ok, então agora sim, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.*
*Uma segunda solução seria escrever*

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

*Neste caso, você não precisa testar $\frac{1}{2}$ na equação original – a volta está garantida no próprio raciocínio, pois vale a recíproca de cada implicação.*

Esperamos ter deixado claro com esses exemplos porque é importante distinguir entre $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ no seu raciocínio.

**Exercício 30** *Você está acostumado a fazer vários passos para resolver equações. Por exemplo:*
*i) Somar constantes a ambos os lados:* $x = y \Rightarrow x + a = y + a$
*ii) Multiplicar por uma constante:* $x = y \Rightarrow ax = ay$
*iii) Resolver uma quadrática:* $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
*iv) Multiplicar por uma variável:* $p(x) = q(x) \Rightarrow xp(x) = xq(x)$.
*v) Elevar ambos os lados ao quadrado:* $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$.
*vi) Somar duas igualdades de um sistema: por exemplo,* $(2x + y = 5$ *e* $4x - y = 3) \Rightarrow 6x = 8$.
*Todos são válidos como implicações. Em quais vale também a volta?*

**Exercício 31** *Voltemos a* $x + \sqrt{x} = 6$ *– poderíamos escrever também*

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x} &= 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 - x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = (6-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 9 \end{aligned}$$

*Note que todos os passos têm volta, exceto o que passa da primeira para a segunda linha (que pode ter introduzido "raízes estranhas"). A volta deste passo vale se* $6 - x \geq 0$ *– e é por isso que* $x = 9$ *falha*[3]*!*

**Exercício 32** *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^4 + y^4 = 32 \end{cases}$$

*Multiplicando a primeira equação por* $x^2 - y^2$, *vem*

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 0 \\ x^4 + y^4 = 32 \end{cases}$$

*Somando, vem* $2x^4 = 32 \Rightarrow x = \pm 2$. *Subtraindo,* $2y^4 = 32 \Rightarrow y = \pm 2$. *Este raciocínio está certo? Qual o conjunto solução do sistema?*

### 0.2.4 Negações de implicações e contrapositiva

Um alerta: dizer que $p \Rightarrow q$ nem sempre significa que $p$ "causa" $q$, nem que $p$ vem "antes" de $q$. Logicamente, dizer que $p \Rightarrow q$ significa apenas que, se soubermos que $p$ é verdadeira, podemos garantir que $q$ é verdadeira também. Da lógica, é só isso.

**Exemplo 33** *Se chover no meu quintal, então o chão dele fica molhado. Neste caso p é "chove" e q é "molha". Do contexto, diríamos que p causa q e que p vem antes de q, mas o que interessa logicamente é que, se você tiver a informação de que "chove", você pode concluir com certeza a veracidade de "molha".*

**Exemplo 34** *Agora, construa uma implicação lógica (sempre verdadeira) usando p =beber e q =ressaca. Note que "se beber então ressaca" não presta! Uma resposta correta*[4] *é "Se ressaca, então bebeu", ou seja, a implicação sempre verdadeira é* $q \Rightarrow p$, *apesar de (i) p ser a "causa" de q e (ii) p acontecer "antes" de q. Os conceitos de causa e precedência vêm do contexto, e não da lógica. Tudo que a implicação faz é dizer que, se você encontrar um fulano de ressaca, você pode concluir com certeza que ele bebeu.*

[3] Observe que a volta vale até mesmo para $x < 0$. Tecnicamente, esta implicação específica falha apenas para $x = 9$.

[4] Outra resposta correta é "Se não beber, então não ressaca".

**Exemplo 35** *"Se italiano, então europeu". Não faz muito sentido dizer que um é a causa do outro, nem que um vem antes do outro.*

Olhando a tabela de $p \Rightarrow q$, você deve notar que ela é válida sempre que $p$ for falsa ou $q$ for verdadeira. De fato, você poderia demonstrar com uma tabela que:

**Proposição 36**

$$(p \Rightarrow q) = (\bar{p} \text{ } ou \text{ } q)$$

**Exemplo 37** *"Passar no vestibular implica ganhar um carro" é o mesmo que "Não passar ou ganhar um carro".*
*"Se você for embora, então eu não falo mais com você" é o mesmo que "Não vá embora ou não falo mais com você".*
*"Se você não vier, eu desisto" é o mesmo que "Venha ou eu desisto"*

Então, qual é a negação de $p \Rightarrow q$? Talvez seja uma surpresa o fato de que esta negação **não é outra implicação.** Olhando o último resultado acima, fica fácil ver que

$$\overline{(p \Rightarrow q)} = (p \text{ e } \bar{q})$$

ou seja, uma implicação é falsa apenas na 3a linha de sua tabela-verdade!

**Exemplo 38** *"Papai, se eu passar no vestibular, você me dá um carro?". A negação é: "Não, meu filho. Você passa no vestibular E eu não te dou um carro."*
*"Se você for homem, tem que assistir FX". Negação: "Sou homem E não assisto FX".*

**Definição 39** *A* contrapositiva *da implicação $p \Rightarrow q$ é a implicação $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.*

**Proposição 40** *A contrapositiva*[5] *de $p \Rightarrow q$ é **equivalente a** $p \Rightarrow q$.*

Para provar isto, faça a tabela, ou note que

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) &= (\bar{p} \text{ ou } q) \\ (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) &= (\bar{\bar{q}} \text{ ou } \bar{p}) \end{aligned}$$

que são claramente iguais.

**Exemplo 41** *A contrapositiva de "se passar, então ganha carro" é "se não ganhar carro, então não passou". Note que elas são **equivalentes**.*

**Exemplo 42** *A contrapositiva de "se beber, não dirija" é "se dirigir, não beba". Ambas significam "não dirija ou não beba". Logicamente, são equivalentes! Quando dizemos ambas as frases uma após a outra, é por ênfase*[6]*.*

**Exemplo 43** *Aqui estão algumas contrapositivas de implicações verdadeiras que vimos mais acima: "Se for imortal, não é homem."; "Se não é europeu, então não é italiano"; "Se der à luz, não é homem."; "Se não existo, então não penso."; "Se $m^2$ é par, então $m$ é par."; "Se $x^2 \neq -1$, então $x \neq -1$".*

[5] Pois é, o nome "contrapositiva" é péssimo, pois a contrapositiva é LOGICAMENTE IDÊNTICA à implicação original.

[6] "Se (for) dirigir não beba" sugere que você planeje não beber quando for dirigir; "se beber (tiver bebido) não dirija" sugere que, caso você tenha bebido (planejado ou não), evite dirigir em seguida. Porém, estas nuances não fazem parte do sentido estritamente lógico da frase! Português é muito mais do que simples lógica!

## 0.3 Aula 3: Demonstrações

### 0.3.1 Demonstrações Diretas

**Proposição 44**

$$\begin{array}{rrcl} i) & ((p \Rightarrow q)\ \ e\ \ (p \Rightarrow r)) & = & (p \Rightarrow (q\ \ e\ r)) \\ ii) & ((p \Rightarrow r)\ \ e\ \ (q \Rightarrow r)) & = & ((p\ \ ou\ q) \Rightarrow r) \\ iii) & ((p \Rightarrow q)\ \ e\ \ (q \Rightarrow r)) & \Rightarrow & (p \Rightarrow r) \end{array}$$

Uma demonstração formal seria feita com tabelas-verdade. O que significam as expressões acima?

- Sempre que $p$ vale, $q$ tem que valer. Sempre que $p$ vale, $r$ tem que valer. Então, sempre que $p$ vale, ambas $q$ e $r$ têm que valer.
  Por outro lado, se $p$ implica ambas $q$ e $r$, então $p$ implica $q$, e $p$ implica $r$.

- Sempre que $p$ vale, $r$ vale. Sempre que $q$ vale, $r$ vale. Então BASTA UMA dentre $p$ e $q$ para garantir que $r$ vale.
  Vice-versa: se basta uma de duas condições para valer $r$, então cada uma delas é suficiente para $r$.

- Esta propriedade é que permite o "encadeamento lógico". Suponha que $p_1$ implica $p_2$, que implica $p_3$, que implica $p_4$. Então $p_1$ implica $p_4$.

A última propriedade é a mais importante. Tipicamente, uma demonstração, um raciocínio lógico, é uma sequência de implicações verdadeiras (como as resoluções de equações que vimos mais cedo). Note que costuma-se escrever

$$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow ... \Rightarrow p_n$$

Mas, tecnicamente, o que queremos dizer é

$$(p_1 \Rightarrow p_2)\ \text{ e }\ (p_2 \Rightarrow p_3)\ \text{ e }\ (p_3 \Rightarrow p_4)\ \text{ e...e }\ (p_{n-1} \Rightarrow p_n)$$

o que nos permite concluir que

$$p_1 \Rightarrow p_n$$

**Exemplo 45** *Mostre que todo número ímpar ao quadrado deixa resto* 1 *na divisão por* 8.
*Seja $n$ um número ímpar. Então ele pode ser escrito como $n = 2k+1$ para algum $k$ inteiro. Assim*

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

*Agora, $k$ é par ou $k+1$ é par. Então $k(k+1)$ é par, e $4k(k+1)$ é divisível por* 8*. Portanto, $n^2 - 1$ é divisível por* 8*, como queríamos demonstrar.*

### 0.3.2 Redução ao Absurdo

**Exemplo 46** *Suponha que ela gosta de mim. Se ela gosta de mim, então* ***ela teria ligado hoje****. Não tenho mensagens no meu celular, e eu não falei com ela, então* ***ela não ligou hoje****. Absurdo! Conclusão: ela não gosta de mim*[7]*. :(*

Este é um exemplo da técnica de "redução ao absurdo": suponha que você quer demonstrar um certo enunciado $p$. A técnica consiste em
i) Supor $\bar{p}$, isto é, supor que $p$ é **falsa**;
ii) A partir de $p_1 = \bar{p}$, e usando sempre implicações corretas, fazer um raciocínio...
iii) ...com o objetivo de chegar a uma afirmação $p_n$ que é obviamente falsa (o tal do ABSURDO).

Se chegamos a um absurdo, o que está errado? Como o raciocínio (as implicações) estão todas corretas, então a única coisa "errada" é a hipótese de que $p$ é falsa. Assim, $p$ deve ser verdadeira, como queríamos demonstrar.

Em suma: se $p \Rightarrow F$ (implicação verdadeira), então $p = F$!

**Exemplo 47** *Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.*
*Se $\sqrt{2}$ fosse racional, então seria possível escrevê-la como fração irredutível de numerador e denominador inteiros, assim*

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \text{ com } m, n \text{ sem fator comum}$$

*Então*

$$m = \sqrt{2}n \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ é par} \Rightarrow m \text{ é par}$$

*Então podemos tomar $m = 2p$ com $p$ inteiro. Vem*

$$4p^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2 \Rightarrow n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par}$$

*Mas $m$ e $n$ são pares e sem fator comum? ABSURDO! O que está errado, é o raciocínio? Não: o que está errada é a hipótese de que $\sqrt{2}$ seria racional. Conclusão: $\sqrt{2}$ é irracional, C.Q.D.*

## 0.4 Aula 4: Quantificadores

### 0.4.1 Definição e Negação

Lembre que apenas enunciados fechados são $V$ ou $F$. Enunciados abertos, isto é, com variáveis que podem ser substituídas por valores, tecnicamente não são $V$ nem $F$ (mas têm conjuntos-verdade). Um quantificador torna um enunciado aberto num fechado.

**Exemplo 48** *O enunciado $x^2 = 16$ pode ser $V$ ou $F$ dependendo de $x$. Mas, a partir dele, podemos construir dois enunciados novos*

$$\begin{aligned} \text{Para todo } x &\in \mathbb{R},\ x^2 = 16. \\ \text{Existe } x &\in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 = 16. \end{aligned}$$

*Note que o primeiro é falso – não é qualquer $x$ real que satisfaz a equação – mas o segundo é verdadeiro (tome $x = 4$ ou $x = -4$).*

[7] Mas é porque eu sou pobre.

Em suma, "para todo $x$, $p(x)$" significa que todos os valores de $x$ no universo em estudo tornam $p(x)$ verdadeiro; "existe $x$ tal que $p(x)$" significa que há pelo menos um valor de $x$ no universo que torna $q(x)$ verdadeiro. Mais em suma e em símbolos[8]:

$$\begin{aligned} \forall x, p(x) \text{ significa } V(p) &= \mathcal{U} \\ \exists x \text{ tq } p(x) \text{ significa } V(p) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

**Exemplo 49** *No universo dos reais:*

$$\begin{aligned} \textit{Para todo } x,\ x^2 &\geq 0 \textit{ é VERDADEIRA} \\ \textit{Para todo } x,\ x^2 &= 16 \textit{ é FALSA} \\ \textit{Para todo } x,\ x^2 &< -1 \textit{ é FALSA} \\ \textit{Existe } x \textit{ tal que } x^2 &\geq 0 \textit{ é VERDADEIRA} \\ \textit{Existe } x \textit{ tal que } x^2 &= 16 \textit{ é VERDADEIRA} \\ \textit{Existe } x \textit{ tal que } x^2 &< -1 \textit{ é FALSA} \end{aligned}$$

*Note que estes enunciados são fechados – não há variáveis "livres"[9].*

A negação de enunciados com quantificadores é simples.

**Exemplo 50** *"Todo homem é mortal". Negação: "Existe homem imortal".*
*"Há políticos honestos". Negação: "Todo político é desonesto".*
*"Todo carioca é brasileiro". Negação: "Existe carioca não brasileiro".*
*"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 1$". Negação: "$\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < 1$".*
*"$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq x$". Negação: "$\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < x$".*

Em suma

$$\begin{aligned} \overline{\forall x,\ p(x)} &= \exists x \text{ tq } \overline{p(x)} \\ \overline{\exists x \text{ tq } p(x)} &= \forall x,\ \overline{p(x)} \end{aligned}$$

Em particular, para mostrar que uma frase do tipo $\forall x$, $p(x)$ é falsa, basta mostrar que existe um $x$ que faz $p(x)$ ser falsa – basta apresentar um $x$! Este $x$ é dito o *contra-exemplo* da frase $\forall x$, $p(x)$.

**Exercício 51** *Quais dos seguintes enunciados são verdadeiros[10]? Para os falsos, apresente contra-*

[8] Aqui, $V(p)$ é o conjunto-verdade do enunciado aberto $p(x)$.

[9] Você pode subsituir $x = 3$ na sentença $x^2 \geq 0$, mas não faz sentido substituir $x = 3$ na sentença "Para todo $x$, $x^2 \geq 0$".

[10] *Tecnicamente,* $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ não é "verdadeiro" nem "falso", pois não é fechado. *Tecnicamente*, o enunciado $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ é que é verdadeiro! Isto dito, é costume dizer que uma implicação é "verdadeira" se ela vale para todos os valores de suas variáveis no universo em questão.

Por exemplo, a frase $x = 4 \Rightarrow x^2 = 25$ é verdadeira ou falsa? Tecnicamente, a resposta é "nem um nem outro, depende de $x$". Afinal, ela é verdadeira quando $x = 5$, $x = -5$ e $x = 312$. Ela é falsa apenas quando $x = 4$! Assim, a frase "$\forall x, x = 4 \Rightarrow x^2 = 25$" é que é falsa, e é por isso que este passo não é usado em raciocínios lógicos (mas, se você souber por algum motivo que $x \neq 4$, esta implicação estaria correta!).

*exemplo.*

$$\begin{aligned}
\forall x &\in \mathbb{R},\ x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \\
\forall x &\in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow x = -1 \\
\forall x, y &\in \mathbb{R},\ (x+y)^2 = x^2 + y^2 \\
\forall x, y &\in \mathbb{R},\ x.y.0 = 0 \\
\forall x, y &\in \mathbb{R},\ \sqrt{xy} = \sqrt{x}.\sqrt{y} \\
\forall x, y &\in \mathbb{R},\ (x > 0 \ e\ y > 0) \Rightarrow \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}
\end{aligned}$$

**Exercício 52** *Quais dos seguintes são verdadeiros? Apresente exemplos para os verdadeiros.*

$$\begin{aligned}
\exists x, y &\in \mathbb{R}\ tq\ \sqrt{xy} = \sqrt{x}.\sqrt{y} \\
\exists x, y &\in \mathbb{R}\ tq\ (x+y)^2 = x^2 + y^2
\end{aligned}$$

### 0.4.2 Ordem de quantificadores

Vejamos alguns exemplos onde ambos os quantificadores aparecem no mesmo enunciado:

**Exemplo 53** *Seja $C$ o conjunto de alunos da sua turma. Considere os seguintes enunciados*

$$\begin{aligned}
\forall x &\in C,\ \exists y \text{ tal que } y \text{ namora } x \\
\exists y \text{ tal que } \forall x &\in C,\ y \text{ namora } x
\end{aligned}$$

*No primeiro enunciado, estamos dizendo que para cada aluno $x$ da sala tem um namorado(a) $y$. Todos estão felizes e sem problemas.*
*No segundo enunciado, estamos dizendo que existe uma pessoa $y$ que namora todo mundo da sala. É isso mesmo: seria o mesmo fulano(a) que namora todo mundo. Viu a diferença?*

Em Português, a palavra "cada" ao invés de "todo" ajuda a diferenciar as duas situações – mas as sentenças ficam ambíguas quando há mais de dois quantificadores na mesma frase. Em Matemática, a ordem dos quantificadores é que determina o significado: na primeira frase, como o $y$ é "apresentado" depois do $x$, temos que $y$ **pode depender de** $x$. Na segunda frase, como $y$ vem antes, ele não pode depender de $x$ – tem que ser o mesmo $y$ para todo mundo.

**Exemplo 54** *Considere*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y \geq x$$

*Esta frase é verdadeira – "para cada $x$, há pelo menos um $y$ que é maior ainda". De fato, basta tomar $y = x + 1$ (podemos tomar $y$ dependendo de $x$). Você pode pensar nisto como um "joguinho": você fala $x$, eu falo o $y$, e ganha quem falar o maior número. Pela ordem da frase, você fala $x$ primeiro – então, qualquer que seja o número que você falar, eu consigo ganhar, pois há um número $y$ maior ainda.*

**Exemplo 55** *Agora, considere*

$$\exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall x \in \mathbb{R},\ y \geq x$$

*Agora o $y$ não pode depender de $x$. Então queremos saber se "existe algum número constante $y$ que é maior que todos os reais ao mesmo tempo"?Este $y$ não existe*[11]*! Se fosse um jogo, eu não consigo falar um $y$ que ganhe de todos os $x$ possíveis, porque eu tenho que falar primeiro!*

Em geral, a regra é que cada variável apresentada por um "existe" pode depender apenas das variáveis apresentadas anteriormente.

**Exemplo 56** *Quais dos seguintes enunciados são verdadeiros? Procure expressá-los em Português de várias maneiras distintas.*

$$\begin{aligned}\forall x &\in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \textit{ tal que } xy = 0 \\ \exists y &\in \mathbb{R} \textit{ tal que } \forall x \in \mathbb{R},\ xy = 0 \\ \forall x &\in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \textit{ tal que } y^2 = x \\ \exists y &\in \mathbb{R} \textit{ tal que } \forall x \in \mathbb{R},\ y^2 = x\end{aligned}$$

[11] Note que $\infty$ não é número real. E $\infty + 1$ também não.