Sistemas de EDOs Lineares de Primeira Ordem

1 Introdução

O objetivo destas notas de aula é discutir e resolver sistemas de EDOs lineares onde há duas funções que queremos descobrir, todas elas funções de uma mesma variável independente (que, frequentemente, é o **tempo**).

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, t); \qquad \frac{dy}{dt} = G(x, y, t)$$

Para ser exato, vamos nos concentrar em sistemas cujo lado direito não dependa de t, isto é, sistemas da forma

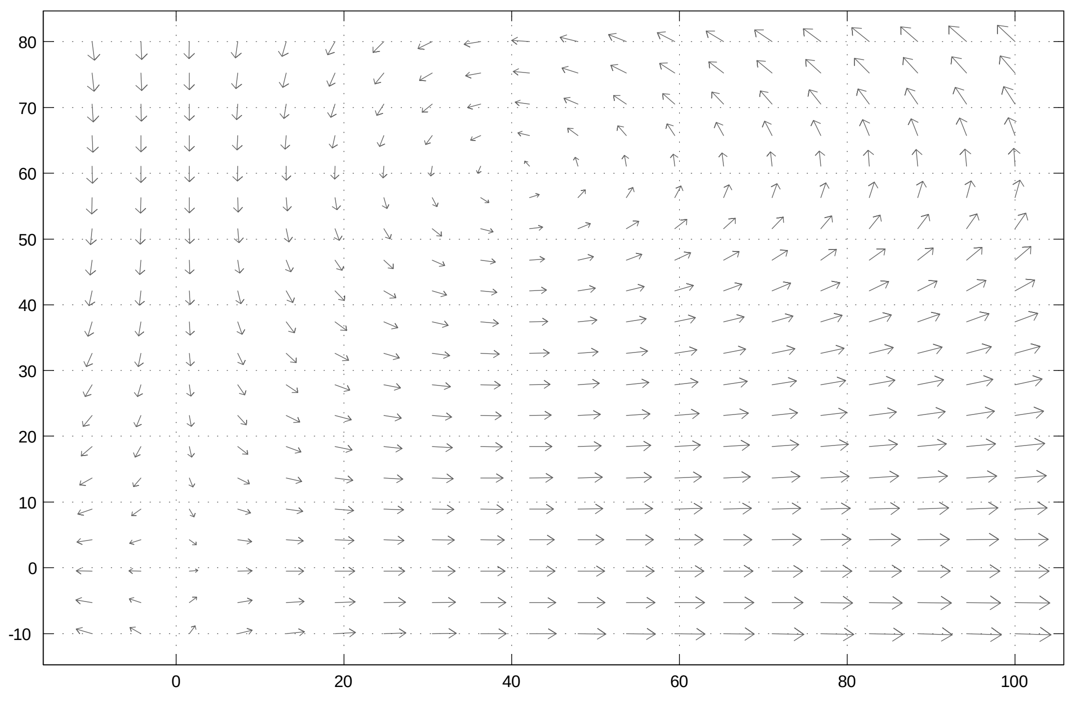
$$\frac{dx}{dt} = F(x, y); \qquad \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Acompanharemos a discussão usando um exemplo clássico em Ecologia Matemática: um sistema predador-presa (veja seção 9.7 do Stewart):

$$\frac{dC}{dt} = 6C - 0.1CL; \qquad \frac{dL}{dt} = -2L + 0.05CL$$

onde $C(t)$ é a população de presas (Coelhos) e $L(t)$ é a população de predadores (Lobos), ambos como funções de t (tempo). Uma solução do sistema acima é um par de funções $(C(t), L(t))$, que pode ser pensada como uma curva parametrizada no plano CL (chamado **Plano de Fase**). Dado um ponto (C, L), sabemos calcular o vetor velocidade da curva-solução $(C(t), L(t))$ neste ponto, a saber, $\left(\dot{C}, \dot{L}\right) = (6C - 0.1CL, -2L + 0.05CL)$. Por exemplo, se tivermos inicialmente 30 coelhos e 40 lobos, teremos $\frac{dC}{dt} = 6C - 0.1CL = 180 - 120 = 60$ coelhos por unidade de tempo e $\frac{dL}{dt} = -2L + 0.05CL = -80 + 60 = -20$ lobos por unidade de tempo no primeiro momento; assim, inicialmente, a população de coelhos sobe e a de lobos cai, e o vetor velocidade aponta na direção $(60, -20)$.

Fazendo o mesmo em cada ponto do plano (note que isto só é possível pois a velocidade não depende de t), podemos desenhar um **Campo Vetorial** que mostra, em cada ponto, o vetor velocidade a ele correspondente:



Plano de Fase (C-L) e Campo Vetorial

A Figura acima (obtida, como as outras, pelo PPLANE, de John Polking, disponível para MatLab no endereço http://math.rice.edu/~dfield/) sugere o Método de Euler para sistemas de EDOs autônomas: dado o sistema

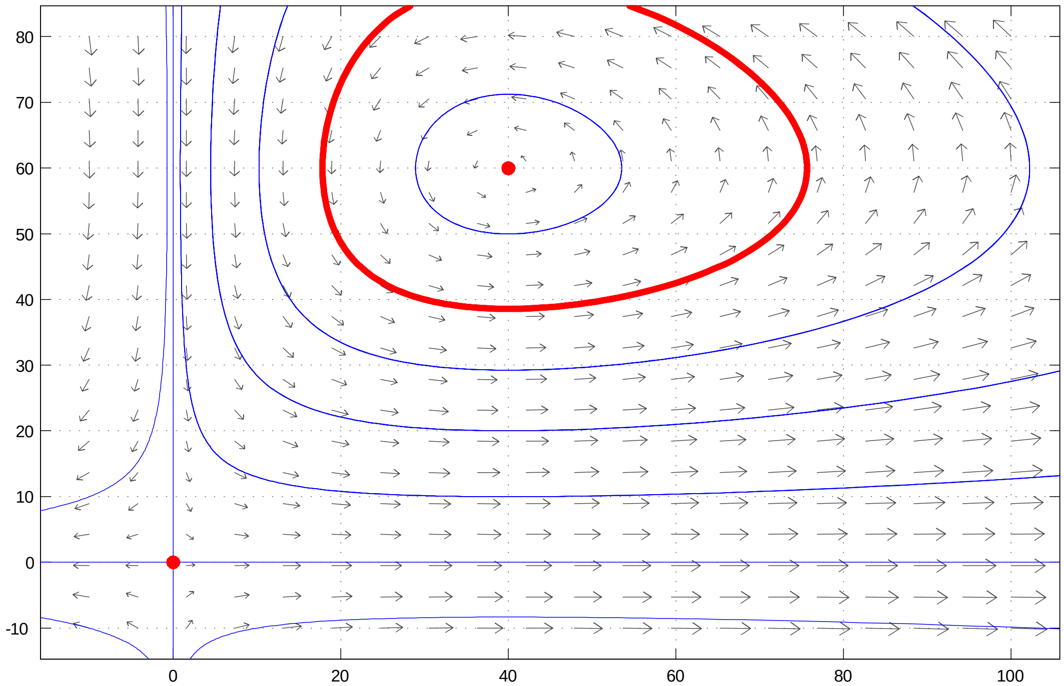
$$\frac{dx}{dt} = F(x, y); \qquad \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

podemos calcular uma solução aproximada começando de (x_0, y_0) e então fazendo para cada n:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t.F(x_n, y_n); \qquad y_{n+1} = y_n + \Delta t.G(x_n, y_n)$$

(isto é, siga a seta a partir de (x_n, y_n) durante Δt unidades de tempo até chegar a (x_{n+1}, y_{n+1})). Quanto menor for o Δt utilizado, mais precisa (e mais trabalhosa) será a solução.

O próprio PPLANE utiliza um algoritmo numérico deste tipo (mas bem mais sofisticado) para calcular e desenhar as curvas-solução. Na figura abaixo, usamos o PPLANE com várias condições iniciais e obtivemos várias soluções. A condição $(30, 40)$ nos dá a curva-solução destacada.



As **soluções de equilíbrio** de um sistema deste tipo serão as soluções constantes, isto é, soluções (C, L) cuja derivada é $(0, 0)$ qualquer que seja t. Elas podem ser encontradas resolvendo o sistema

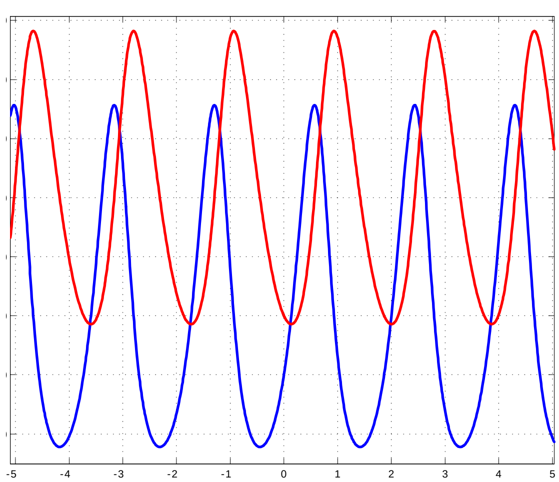
$$F(x, y) = G(x, y) = 0$$

No caso de nosso exemplo, os equilíbrios são as soluções de

$$6C - 0.1CL = -2L + 0.05CL = 0$$

isto é, $(C, L) = (0, 0)$ (faz sentido – se não temos coelhos nem lobos, não há porque eles aparecerem do nada) e $(C, L) = (40, 60)$ (veja na figura acima onde este equilíbrio está). A figura acima destaca a posição destes dois equilíbrios. Mais tarde veremos como classificar estes equilíbrios de acordo com sua estabilidade.

Uma vez resolvido o sistema, é também possível fazer gráficos para $C(t)$ e $L(t)$. Para o exemplo acima, partindo de $C = 30$ e $L = 40$, teríamos:



$C(t)$ é a curva de baixo (azul), a outra é $L(t)$.

Para este sistema em particular, as soluções são periódicas. Note também como as populações não atingem seus máximos simultaneamente: os lobos atingem seus picos algum tempo **após** os picos da população de coelhos. Compare estes gráficos com o gráfico anterior que mostra apenas C versus L, identificando lá os picos aqui mencionados.

2 Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes

Continuaremos nossa análise com um tipo ainda mais específico de sistema de EDOs lineares, a saber

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

onde a, b, c e d são constantes. Note que $x(t) = y(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio (por este motivo o sistema é chamado **homogêneo**).

Considere o vetor do $\mathbb{R}^2$ dado por $v(t) = (x(t), y(t))$. Convença-se de que o sistema acima pode ser reescrito na forma:

$$\dot{v} = Av$$

onde A é a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2.1 Casos onde A é diagonal

Se A for da forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, o sistema é da forma $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = dy \end{cases}$. Neste caso, dizemos que o sistema é **desacoplado** pois podemos resolvê-lo independentemente para x e y. De fato, a solução será

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at} \\ y(t) &= y_0 e^{dt} \end{aligned}$$

Se $a, d \neq 0$, note que $(0,0)$ seria o único equilíbrio do sistema. A solução algébrica é simples, mas é essencial entender seu comportamento a fundo para cada combinação possível de a e d, e especialmente o tipo de equilíbrio que temos em $O = (0,0)$. De fato, há dois tipos principais de equilíbrios:

2.1.1 CASO 1 – Quando a e d são diferentes mas têm o mesmo sinal: nós.

Suponha que $a > d > 0$. Então as trajetórias se afastam da origem, mas suas direções em geral se aproximam assintoticamente da direção horizontal quanto $t \to \infty$ e da direção vertical quando $t \to -\infty$, pois

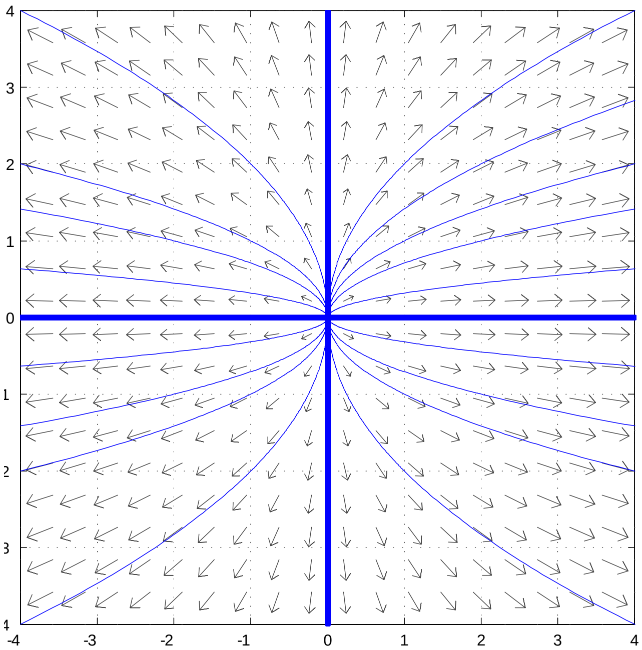
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0}{x_0} e^{(d-a)t} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t\to\infty} y(t)/x(t) = 0 \\ \lim_{t\to-\infty} y(t)/x(t) = \pm\infty \end{cases}$$

Este é o caso descrito na figura abaixo (se $d > a > 0$, a situação é idêntica, trocando "horizontal" por "vertical"). Em ambos estes casos, dizemos que O é um **nó instável** (ou nó repulsor, fonte, "source").

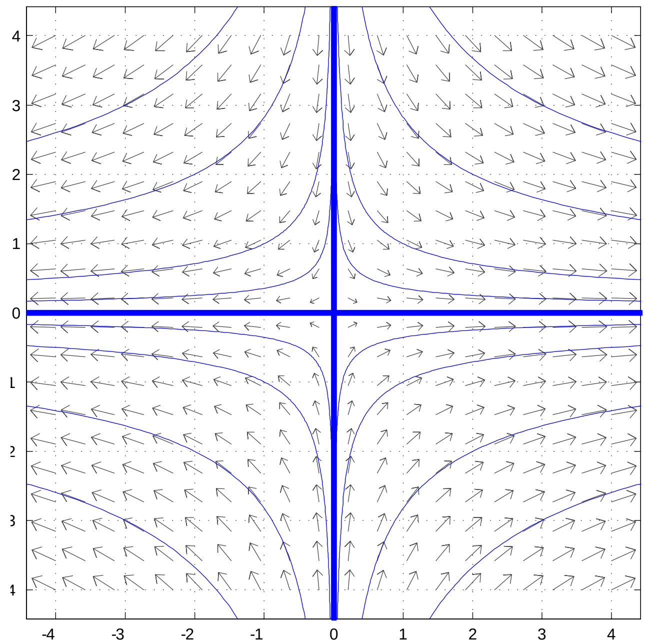
Se a e d forem negativos, novamente a figura é a mesma mas as trajetórias agora se *aproximam* da origem, e dizemos que O é um **nó atrator** (ralo, sorvedouro, "sink").

2.1.2 CASO 2 – Quando a e d têm sinais diferentes: pontos de sela

Suponha agora que $a > 0 > d$. Então as trajetórias "passam ao largo" da origem, se aproximando assintoticamente do eixo horizontal quando $t \to \infty$ e do eixo vertical quando $t \to -\infty$ (se $a < 0 < d$, basta inverter a direção das trajetórias). De qualquer forma, dizemos que O é um **ponto de sela** (um ponto de sela é sempre instável pois quase todas as trajetórias se afastam dele quando t aumenta). Note que, no caso em que $a > 0 > d$, as trajetórias ao longo do eixo y (isto é, trajetórias do tipo $x(t) = 0$ e $y(t) = y_0 e^{dt}$) são as únicas que se aproximam da origem!



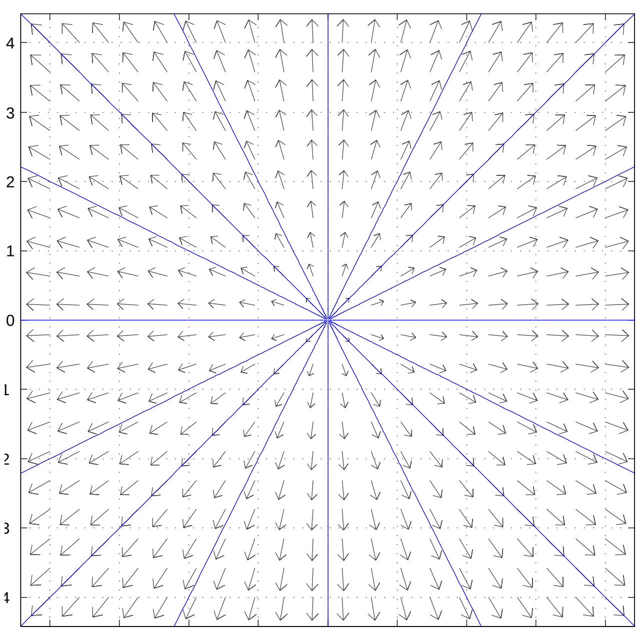
Caso $a > d > 0$: **nó instável**.



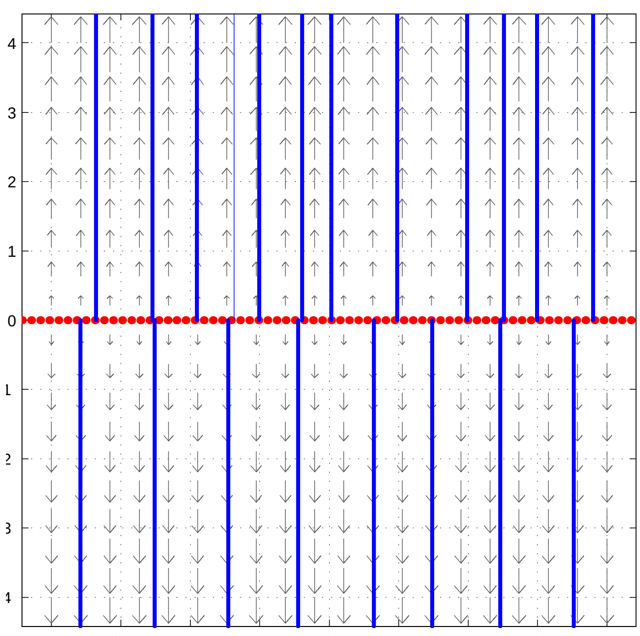
Caso $a > 0 > d$: **ponto de sela**.

Observe que, em ambos os casos acima, há algumas direções especiais, onde as trajetórias "não entortam" (são, de fato, semi-retas). Nos casos acima, elas correspondem aos eixos x e y, isto é, aos vetores e_1 e e_2, que são exatamente os autovetores de A. Nestas direções especiais, a trajetória se aproxima da origem se o autovetor correspondente for positivo, e vice-versa. Veremos na seção seguinte que isto não é uma coincidência (você consegue imaginar o porquê)?

Além destes dois casos principais, poderíamos considerar alguns outros mais raros, isto é, "degenerados", como, *por exemplo*, os das figuras abaixo (no primeiro, todas as trajetórias são semi-retas pois todos os vetores são autovetores e o equilíbrio é chamado de **nó próprio** ou **estrela**; no segundo, as trajetórias se afastam do eixo x onde há vários equilíbrios):



Caso $a = d > 0$: **nó próprio** ou **estrela**.



Caso $d > a = 0$: vários equilíbrios não isolados!

2.2 Casos onde A não é necessariamente diagonal

2.2.1 Caso 1 – Quando A tem dois autovetores L.I.

Suponha que $A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ tenha dois autovetores w_1 e w_2 em $\mathbb{R}^2$. Neste caso, o plano de fase sugere que haja trajetórias em linha reta exatamente nestas duas direções. De fato, começando da posição w_1, o vetor velocidade da curva será $Aw_1 = \lambda_1 w_1$, e não há motivo algum para que a trajetória abandone esta direção.

Será que conseguimos escrever esta solução explicitamente? Se $w_1 = (w_{11}, w_{12})$, a trajetória reta deve ter a forma $v(t) = r(t) w_1$, onde $r(t)$ é uma função real a se determinar (isto é, um número que depende de t). Em outras palavras, esperamos encontrar uma solução da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) w_{11} \\ y(t) &= r(t) w_{12} \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, isto será uma solução se $\dot{v} = Av = A(r(t) w_1) = r(t) Aw_1 = \lambda_1 r(t) w_1$, isto é

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{r}(t) w_{11} = \lambda_1 r(t) w_{11} \\ \dot{y}(t) &= \dot{r}(t) w_{12} = \lambda_1 r(t) w_{12} \end{aligned}$$

É fácil ver que $r(t) = e^{\lambda_1 t}$ satisfaz a ambas as equações. Em outras palavras, o sistema $\dot{v} = Av$ terá a solução

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} w_1$$

onde w_1 é um autovetor associado ao autovalor λ_1 (se o valor inicial fosse $v(0) = w_1$). Analogamente, temos uma outra solução dada por

$$v_2(t) = e^{\lambda_2 t} w_2$$

para o valor inicial $v(0) = w_2$.

Agora, enfim, o que fazer no caso em que $v(0) = v_0$ é um outro vetor qualquer? Oras, se$\{w_1, w_2\}$ for uma base de $\mathbb{R}^2$, então é possível escrever $v(t)$ como combinação linear de w_1 e w_2, assim

$$v(t) = \alpha(t) w_1 + \beta(t) w_2$$

(note como os coeficientes variam com o tempo, fazendo $v(t)$ variar). Usando esta nova base (ao invés da canônica), conseguiremos obter EDOs simples para as funções α e β! De fato, derivando com relação a t, temos

$$\dot{v}(t) = \dot{\alpha}(t) w_1 + \dot{\beta}(t) w_2$$

(note que os vetores w_1 e w_2 são fixos, então não precisamos de uma possível regra do produto). Por outro lado

$$Av = \alpha(t) \lambda_1 w_1 + \beta(t) \lambda_2 w_2$$

Como w_1 e w_2 são L.I., a única maneira de valer a igualdade $\dot{v} = Av$ é termos

$$\dot{\alpha}(t) = \lambda_1 \alpha(t); \quad \dot{\beta}(t) = \lambda_2 \beta(t)$$

Só que estas equações podem ser resolvidas como EDOs de primeira ordem desacopladas! De fato, devemos ter $\alpha(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t}$ e $\beta(t) = \beta_0 e^{\lambda_2 t}$. Assim, a solução $v(t)$ será da forma[1]

$$v(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t} w_1 + \beta_0 e^{\lambda_2 t} w_2.$$

onde $v(0) = \alpha_0 w_1 + \beta_0 w_2$.

Exemplo: Resolva o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= x + 4y \\ x(0) &= -2; y(0) = -1 \end{aligned}$$

[1] Este raciocínio reflete o chamado **princípio da superposição** que é satisfeito pelas EDOs lineares homogêneas: se você tiver duas soluções $v_1(t)$ e $v_2(t)$ do sistema de EDOs, qualquer combinação linear de v_1 e v_2 também será solução, pois

$$\dot{v}_1 = Av_1 \text{ e } \dot{v}_2 = Av_2 \Rightarrow \frac{d(\alpha v_1 + \beta v_2)}{dt} = \alpha \dot{v}_1 + \beta \dot{v}_2 = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = A(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

Seja $A(x,y) = (x-2y, x+4y)$.

Autovalores de A: a equação característica é $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.

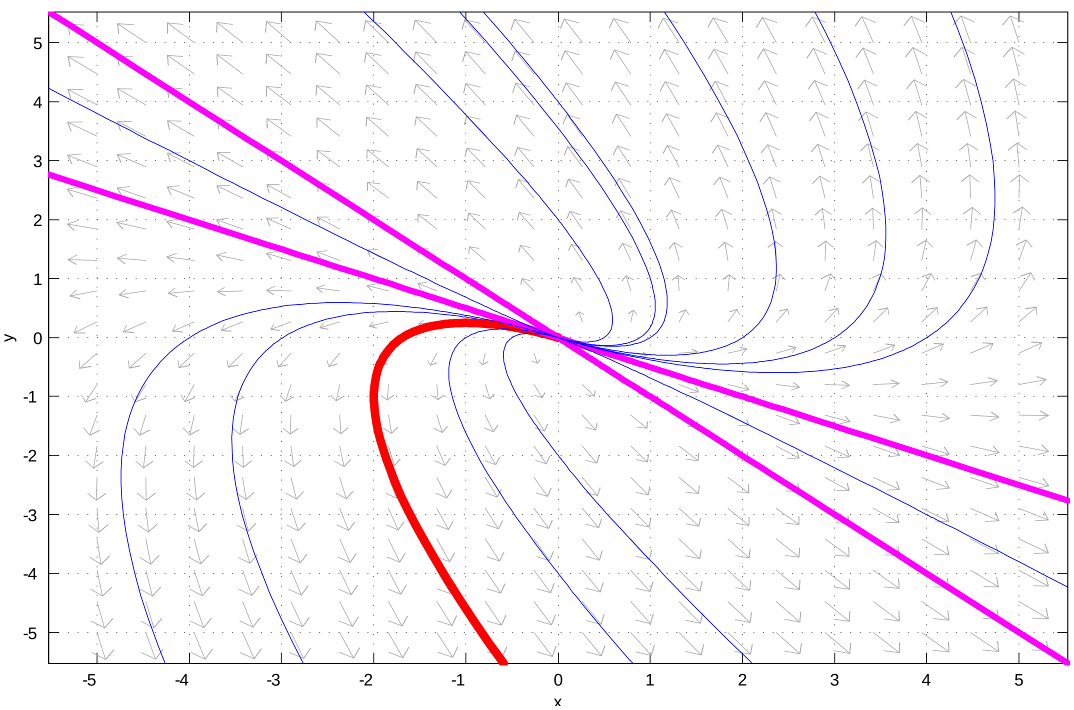
Autovetores de A: Resolva $Aw = \lambda w$ para cada um dos autovalores acima; encontramos, respectivamente, $w_1 = (2,-1)$ e $w_2 = (1,-1)$.

Decomposição de $v(0)$: Escreva $v(0) = \alpha_0 w_1 + \beta_0 w_2$, isto é, $(-2,-1) = \alpha_0 (2,-1) + \beta_0 (1,-1)$. Resolvendo, temos $\alpha_0 = -3$ e $\beta_0 = 4$, isto é,.$v(0) = (x(0), y(0)) = -3w_1 + 4w_2$.

Solução do sistema: juntando tudo, temos que $v(t) = -3e^{2t}w_1 + 4e^{3t}w_2$ é a solução, ou seja

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -6e^{2t} + 4e^{3t} \\
y(t) &= 3e^{2t} - 4e^{3t}
\end{aligned}
$$

Esta solução é esboçada abaixo (a linha mais grossa, em vermelho). Os autovetores w_1 e w_2 correspondem às duas direções marcadas em lilás. Plotamos algumas outras soluções (correspondentes a outros valores iniciais) por pura diversão. **Note a semelhança entre esta figura e a figura que descreve o nó instável mais acima.** A solução vermelha começa (quando $t \to -\infty$) praticamente tangente ao eixo lilás que corresponde ao autovetor $(-2,1)$, passa pelo ponto $(-2,-1)$ quando $t = 0$ e se aproxima (quando $t \to +\infty$) da direção do outro autovetor $(1,-1)$. De fato, as duas figuras são idênticas, trocando os eixo x e y antigos pelos novos autovetores (perceba que, por motivos de clareza, desenhamos aqui apenas um par de soluções no que seriam os novos "1o" e "3o" quadrantes).



Se você entendeu a discussão acima, terá entendido que:

Proposição 1 *Se $A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ tem dois autovetores L.I. correspondentes aos autovetores λ_1 e λ_2, então a solução de*

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= ax + by \\
\dot{y} &= cx + dy
\end{aligned}
$$

será da forma

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\
y(t) &= c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}
\end{aligned}
$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes que dependem de $x(0)$ e $y(0)$ e do sistema.

Cuidado! Os coeficientes c_i não podem ser escolhidos independentemente (em outras palavras, não é **qualquer** par de funções $x(t)$ e $y(t)$ da forma acima que vai resolver o sistema de EDOs). De fato, eles devem satisfazer uma relação que pode ser obtida substituindo $x(t)$ e $y(t)$ em $\dot{x} = ax + by$ (ou em $\dot{y} = cx + dy$), a saber

$$\dot{x} = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = (ac_1 + bc_3) e^{\lambda_1 t} + (ac_2 + bc_4) e^{\lambda_2 t}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (a - \lambda_1) c_1 + bc_3 &= 0 \\ (a - \lambda_2) c_2 + bc_4 &= 0 \end{aligned}$$

Se além disto tivermos condições iniciais $x(0)$ e $y(0)$ podemos juntar estas equações a

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 \\ y(0) &= c_3 + c_4 \end{aligned}$$

e determinar os coeficientes c_i. Em suma, é possível calcular as soluções sem encontrar os autovetores a priori:

Exemplo: Sem calcular autovetores, resolva o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= x + 4y \\ x(0) &= -2; y(0) = -1 \end{aligned}$$

Autovalores e solução geral: Já vimos que os autovalores de $A(x, y) = (x - 2y, x + 4y)$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Assim, a solução será da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) &= c_3 e^{2t} + c_4 e^{3t} \end{aligned}$$

Substituindo em $\dot{x} = x - 2y$, encontramos $2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} = (c_1 - 2c_3) e^{2t} + (c_2 - 2c_4) e^{3t}$, isto é, $c_1 = -2c_3$ e $c_2 = -c_4$. Assim, a solução geral é

$$\begin{aligned} x(t) &= (-2c_3) e^{2t} + (-c_4) e^{3t} \\ y(t) &= c_3 e^{2t} + c_4 e^{3t} \end{aligned}$$

Usando a condição inicial:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(0) = -2 \Rightarrow -2c_3 - c_4 = -2 \\ y(0) = -1 \Rightarrow c_3 + c_4 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow c_3 = 3 \text{ e } c_4 = -4.$$

Conclusão:

$$\begin{aligned} x(t) &= -6e^{2t} + 4e^{3t} \\ y(t) &= 3e^{2t} - 4e^{3t} \end{aligned}$$

é a solução desejada.

Note que é possível descobrir o tipo de equilíbrio que a origem é apenas olhando os autovalores! Por exemplo, no caso acima, como $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, temos um equilíbrio tipo **nó instável, exatamente como no caso diagonal!**

2.2.2 Caso 2 – Quando A tem dois autovalores complexos

Agora, a interpretação geométrica não é tão simples, mas toda a álgebra feita no caso 1 ainda funciona. Em suma, calcule os autovalores complexos λ_1 e λ_2 (que serão conjugados) e seus autovetores correspondentes (complexos) w_1 e w_2. Escreva $v(0) = (x(0), y(0))$ como combinação linear de w_1 e w_2, assim

$$v(0) = \alpha_0 w_1 + \beta_0 w_2$$

(α e β serão complexos). Enfim, exatamente como no caso anterior, a solução será

$$v(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t} w_1 + \beta_0 e^{\lambda_2 t} w_2.$$

Exemplo: Resolva o sistema

$$\dot{x} = -x - y$$
$$\dot{y} = 5x + y$$
$$x(0) = 4; y(0) = 0$$

Autovalores: A equação característica é $\lambda^2 + 4 = 0$ cujas raízes são $\lambda = \pm 2i$ (conjugadas).

Autovetores: Fazendo $Aw = \lambda w$ para ambos os autovalores, encontramos os autovetores complexos $w_1 = (1-2i, -5)$ e $w_2 = (1+2i, -5)$ (que escolhemos como conjugados um do outro).

Decomposição: Escreva $v(0) = (4,0) = \alpha_0 (1-2i, -5) + \beta_0 (1+2i, -5)$ e resolva para α_0 e β_0. Encontramos $\alpha_0 = i$ e $\beta_0 = -i$ (conjugados), isto é, $v(0) = (4,0) = iw_1 - iw_2$.

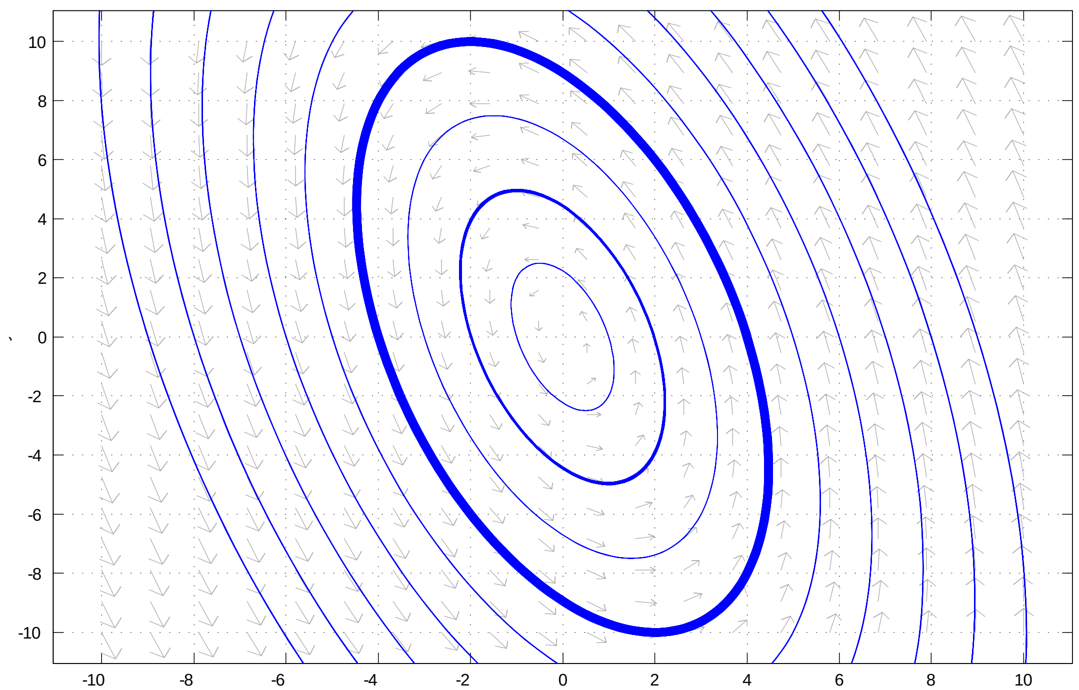
Solução: Juntando tudo na expressão $v(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t} w_1 + \beta_0 e^{\lambda_2 t} w_2$:

$$\begin{aligned} v(t) &= ie^{2it}w_1 - ie^{-2it}w_2 = i(1-2i, -5)e^{2it} - i(1+2i,-5)e^{-2it} = \\ &= (2+i, -5i)(\cos 2t + i \sin 2t) + (2-i, 5i)(\cos 2t - i\sin 2t) = (4\cos 2t - 2\sin 2t, 10 \sin 2t) \end{aligned}$$

ou seja

$$x(t) = 4\cos 2t - 2\sin 2t; \qquad y(t) = 10 \sin 2t$$

Note que aqueles conjugados todos fazem com que as soluções sejam perfeitamente reais. O plano de fase deste sistema segue abaixo (nossa solução é a trajetória mais grossa). Curiosamente, todas as soluções são trajetórias fechadas! Veremos em breve que isto se dá quando os autovalores têm parte real 0 (são imaginários puros).



Se você entendeu a discussão acima...

Proposição 2 *Se $A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ tem dois autovalores complexos $\lambda = m \pm ni$, então a solução de*

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

será da forma

$$x(t) = K_1 e^{(m+ni)t} + K_2 e^{(m-ni)t}$$
$$y(t) = K_3 e^{(m+ni)t} + K_4 e^{(m-ni)t}$$

isto é

$$x(t) = e^{mt}(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt)$$
$$y(t) = e^{mt}(c_3 \cos nt + c_4 \sin nt)$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes que dependem de $x(0)$, $y(0)$ e do sistema.

Novamente, não é qualquer escolha dos coeficientes c_i que resolve a equação. De acordo com esta solução

$$\dot{x}(t) = e^{mt}(m(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt) + (-nc_1 \sin nt + nc_2 \cos nt))$$
$$y(t) = e^{mt}(m(c_3 \cos nt + c_4 \sin nt) + (-nc_3 \sin nt + nc_4 \cos nt))$$

e, em particular

$$\dot{x}(0) = mc_1 + nc_2$$
$$\dot{y}(0) = mc_3 + nc_4$$

Novamente, esta idéia permite que calculemos as soluções sem encontrar os autovetores! Vejamos um exemplo:

Exemplo: Sem calcular autovetores, resolva o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= 5x + 3y \\ x(0) &= 4; y(0) = 0 \end{aligned}$$

Autovalores e solução geral: A equação característica é $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ cujas raízes são $\lambda = 2 \pm 3i$ (conjugadas). Assim, a solução geral será

$$x(t) = e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$
$$y(t) = e^{2t}(c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t)$$

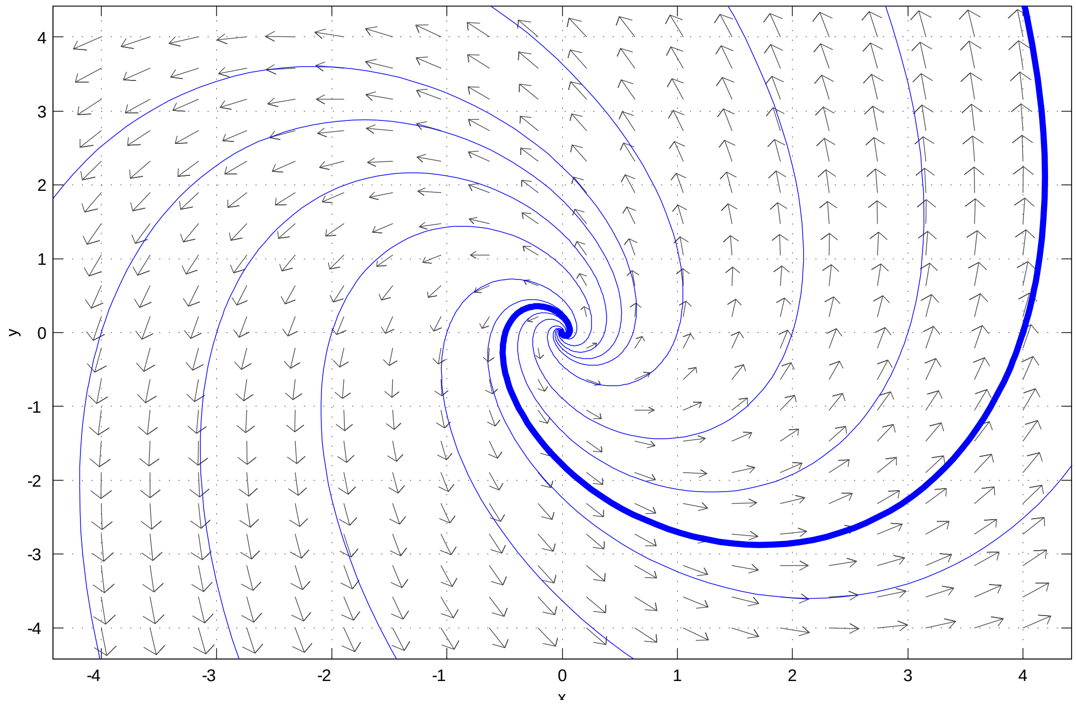
Usando a condição inicial: Como $x(0) = 4$, teremos $c_1 = 4$. Também, note que

$$\left.\begin{array}{r} \dot{x}(0) = 2c_1 + 3c_2 \\ \dot{x}(0) = x(0) - 2y(0) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c_1 + 3c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = -\frac{4}{3}$$

Analogamente, use $y(0) = 0$ para descobrir que $c_3 = 0$ e $\dot{y}(0) = 2c_3 + 3c_4 = 5x(0) + 3y(0) = 20$ para obter $c_4 = 20/3$. Assim, a solução final é

$$x(t) = e^{2t}\left(4 \cos 3t - \frac{4}{3} \sin 3t\right)$$
$$y(t) = e^{2t}\left(\frac{20}{3} \sin 3t\right)$$

que está destacada na figura a seguir. Note como o termo e^{2t} faz a trajetória espiralar para longe da origem.



Em geral, nas fórmulas

$$x(t) = e^{mt}(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt)$$
$$y(t) = e^{mt}(c_3 \cos nt + c_4 \sin nt)$$

o sinal de m determina se as trajetórias espiralam para longe da origem ($m > 0$; o equilíbrio é chamado de **fonte espiral** ou **spiral source**) ou para longe da origem ($m < 0$; **sorvedouro espiral** ou **spiral sink**) – note que $m = 0$ corresponde a trajetórias periódicas de período $T = 2\pi/n$, como nas elipses acima (o equilíbrio é chamado de **centro**).

Para ver se a solução espirala no sentido horário ou anti-horário, é mais fácil voltar ao sistema original e notar que $A(1,0) = (a,c)$ vai para cima exatamente se $c > 0$. Assim, se $c > 0$ as espirais vão no sentido anti-horário e, se $c < 0$, elas vão no sentido horário.

2.2.3 Caso 3 – Quando A tem apenas um autovetor real

Se a equação característica de A tiver uma raiz dupla λ, provavelmente isto significa que A tem apenas um autovetor real (a outra opção seria $A = \lambda I$, caso diagonal já discutido anteriormente).

Enquanto não temos necessariamente uma base de autovetores, é sempre possível[2] encontrar uma base $\{w_1, w_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$Aw_1 = \lambda w_1$$
$$Aw_2 = w_1 + \lambda w_2$$

Escreva o vetor $v(t) = (x(t), y(t))$ na base $\{w_1, w_2\}$:

$$v(t) = \alpha(t) w_1 + \beta(t) w_2$$

Que sistema de equações deve ser satisfeito pelas novas coordenadas $(\alpha(t), \beta(t))$? Ora, queremos que $\dot{v} = Av$, isto é

$$\dot{\alpha}(t) w_1 + \dot{\beta}(t) w_2 = A(\alpha(t) w_1 + \beta(t) w_2) = \alpha(t) \lambda w_1 + \beta(t)(w_1 + \lambda w_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{\alpha} w_1 + \dot{\beta} w_2 = (\alpha\lambda + \beta) w_1 + \beta\lambda w_2$$

Como w_1 e w_2 são L.I., a única opção é termos

$$\dot{\alpha} = \lambda\alpha + \beta$$
$$\dot{\beta} = \lambda\beta$$

[2] A demonstração deste fato está no topo da página 315 do livro de Álgebra Linear do Elon e nada mais é do que um caso particular da Forma Canônica de Jordan.

Pelo menos, podemos resolver a segunda equação – a resposta é $\beta(t) = \beta_0 e^{\lambda t}$. Substituindo isto na primeira, temos

$$\dot{\alpha} - \lambda\alpha = \beta_0 e^{\lambda t}$$

que pode ser resolvida usando o fator integrante $I(t) = e^{-\lambda t}$

$$\frac{d\left(e^{-\lambda t}\alpha\right)}{dt} = \beta_0 \Rightarrow e^{-\lambda t}\alpha = \beta_0 t + \alpha_0 \Rightarrow \alpha(t) = (\alpha_0 + \beta_0 t)\, e^{\lambda t}$$

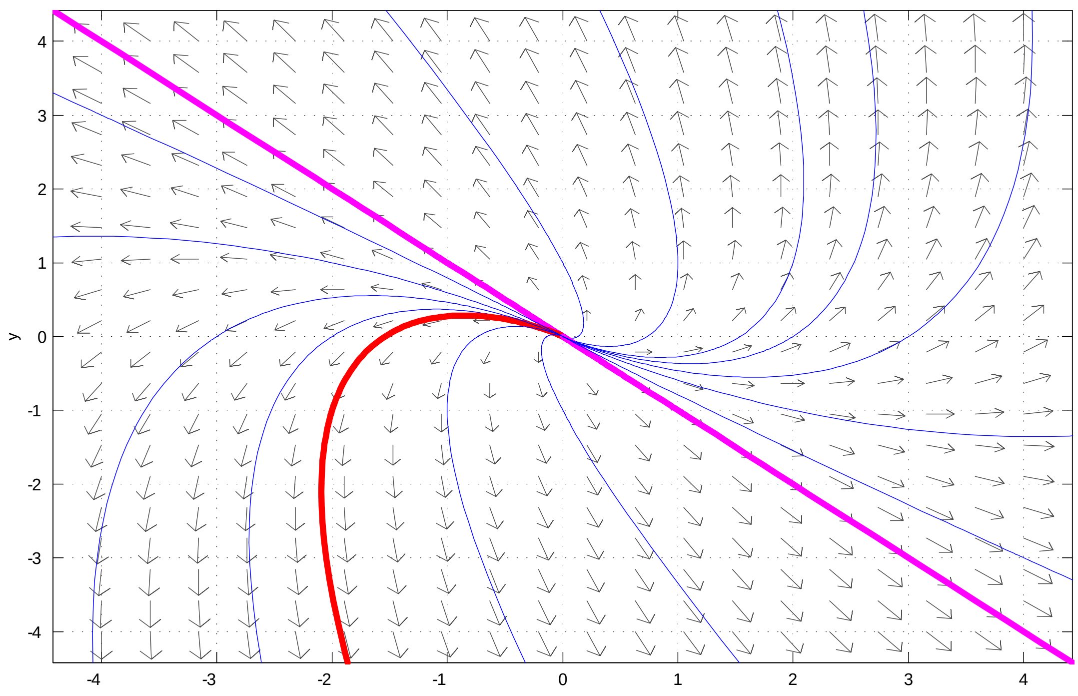
Em suma, a solução será da forma

$$v(t) = (\alpha_0 + \beta_0 t)\, e^{\lambda t} w_1 + \beta_0 e^{\lambda t} w_2$$

(note como $v(0) = \alpha_0 w_1 + \beta_0 w_2$ permite-nos encontrar α_0 e β_0). Vejamos um exemplo:

Exemplo: Resolva o sistema

$$\dot{x} = x - y$$
$$\dot{y} = x + 3y$$
$$x(0) = -2; y(0) = -1$$



Autovalores: A equação característica é $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cuja única raiz dupla é $\lambda = 2$.

Autovetores: Fazendo $Aw_1 = 2w_1$, encontramos um autovetor $w_1 = (1, -1)$ (direção lilás no gráfico acima); a partir daqui, podemos resolver $Aw_2 = w_1 + 2w_2$ e encontrar, por exemplo, $w_2 = (0, -1)$ (há outras soluções).

Decomposição: Escreva $v(0) = (-2, -1) = \alpha_0 (1, -1) + \beta_0 (0, -1)$ e resolva para α_0 e β_0. Encontramos $\alpha_0 = -2$ e $\beta_0 = 3$, isto é, $v(0) = (2, 1) = -2w_1 + 3w_2$.

Solução: Juntando tudo na expressão $v(t) = (\alpha_0 + \beta_0 t)\, e^{\lambda t} w_1 + \beta_0 e^{\lambda t} w_2$:

$$v(t) = (-2 + 3t)\, e^{2t} (1, -1) + 3e^{2t} w_2 (0, -1) = e^{2t} (-2 + 3t, -1 - 3t)$$

ou seja

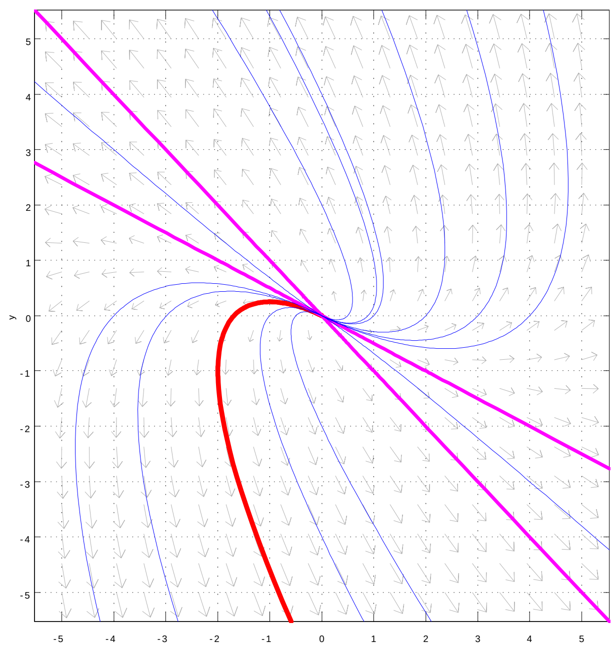
$$x(t) = -2e^{2t} + 3te^{2t}; \quad y(t) = -e^{2t} - 3te^{2t}$$

Analise o plano de fase acima com cuidado (a curva-solução está destacada em vermelho e lilás e a direção do autovetor está destacada em lilás). Note o comportamento das soluções: como

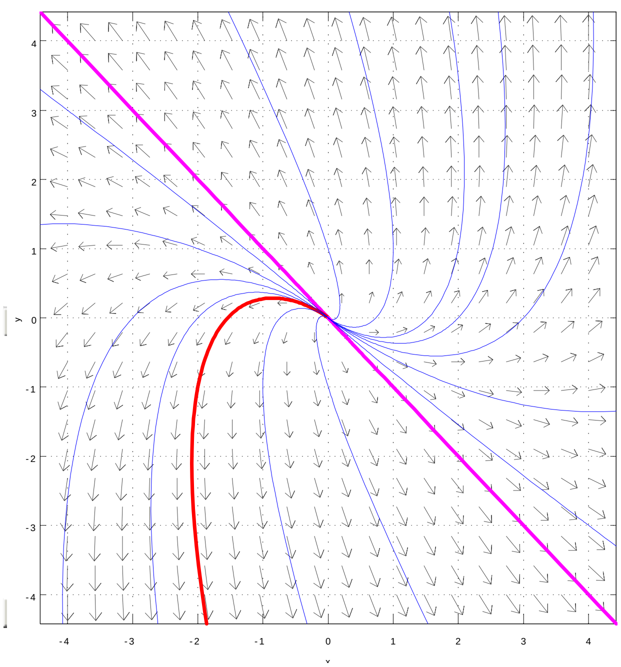
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{-1 - 3t}{-2 + 3t}$$

temos que $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$, isto é, a solução "começa" ($t = -\infty$) tangente à reta do autovetor $w_1 = (1, -1)$ e, à medida que t cresce, volta a tender à direção do autovetor w_1 para o outro lado (quando $t \to +\infty$).

Vale a pena comparar este plano de fase com aquele obtido quando A tem dois autovetores L.I.; não é difícil imaginar os dois autovetores se aproximando em direção, até que, quando os autovetores "coincidem", ficamos com a segunda figura (apenas um autovetor, um autovalor que é raiz dupla). É por este motivo que chamamos o equilíbrio da segunda figura de **nó impróprio** ou **nó degenerado**.



Autovetores L.I.: nó instável



Um autovetor apenas: **nó impróprio**.

A discussão acima leva à seguinte forma geral da solução:

Proposição 3 *Se $A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ tem apenas um autovalor λ (e não é diagonal), então a solução de*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

será da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ y(t) &= c_3 e^{\lambda t} + c_4 t e^{\lambda t} \end{aligned}$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes que dependem de $x(0)$ e $y(0)$.

Consequentemente, teremos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \lambda c_2 t e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(0) = \lambda c_1 + c_2 \\ \dot{y}(t) &= \lambda c_3 e^{\lambda t} + c_4 e^{\lambda t} + \lambda c_4 t e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(0) = \lambda c_3 + c_4 \end{aligned}$$

Conhecer a forma da solução mais uma vez nos permite resolver o sistema sem calcular explicitamente os autovetores.

Exemplo: Sem calcular autovetores, resolva o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + 3y \\ x(0) &= -2; y(0) = -1 \end{aligned}$$

Autovalores e solução geral: A equação característica é $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cujas raiz dupla é $\lambda = 2$. Assim, a solução geral será

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}; \qquad y(t) = c_3 e^{2t} + c_4 t e^{2t}$$

Usando a condição inicial: Como $x(0) = -2$, teremos $c_1 = -2$. Também, note que

$$\left.\begin{array}{r} \dot{x}(0) = 2c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) = x(0) - y(0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c_1 + c_2 = -1 \Rightarrow c_2 = 3$$

Analogamente, use $y(0) = -1$ para descobrir que $c_3 = -1$ e $\dot{y}(0) = 2c_3 + c_4 = x(0) + 3y(0) = -5$ para obter $c_4 = -3$. Assim, a solução final é

$$x(t) = -2e^{2t} + 3te^{2t}; \qquad y(t) = -e^{2t} - 3te^{2t}.$$

3 Resumo: o plano Traço-Determinante

Mais uma vez, ressaltamos que o comportamento "geral" das trajetórias-solução depende apenas dos autovalores calculados: se eles são complexos, as trajetórias espiralam ou são elipses (dependendo do sinal da parte real dos autovalores); se eles são reais e têm sinais distintos, as trajetórias são tipo "sela" (apenas uma trajetória se aproxima assintoticamente da origem, todas as outras se afastam); enfim, se eles são reais com mesmo sinal, as trajetórias revelam um "nó" na origem (que pode ser estável ou instável dependendo do sinal, e pode ser impróprio se os autovalores forem iguais).

Mas todas as condições acima podem ser re-escritas em função apenas do traço e do determinante da matriz 2×2 que representa $A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$! Lembremos que a equação característica é

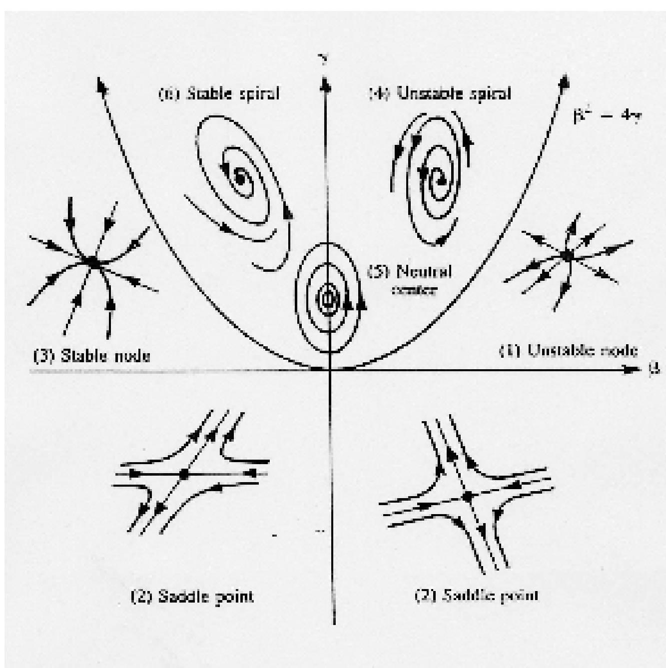
$$\lambda^2 - (TrA)\lambda + DetA = 0$$

isto é, a soma dos autovalores é $TrA = a + d$ e o seu produto é $DetA = ad - bc$.

Esta equação terá raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$, isto é, se $(TrA)^2 - 4(DetA) \geq 0$. Neste caso, é fácil descobrir o sinal das raízes, sem precisar resolver a equação: elas terão sinais distintos exatamente quando $DetA < 0$ (lembre-se, $DetA = \lambda_1\lambda_2$); por outro lado, se $DetA > 0$, as raízes terão o mesmo sinal – e aí olhamos o traço, $TrA = \lambda_1 + \lambda_2$, cujo sinal será o mesmo dos autovalores.

Por outro lado, se as raízes forem complexas (isto é, $(TrA)^2 - 4(DetA) < 0$), então elas serão da forma $\lambda = m \pm ni$. Neste caso, $TrA = \lambda_1 + \lambda_2 = 2m$, isto é, o sinal do traço é o sinal de m. Assim, as espirais serão instáveis se $TrA > 0$, estáveis se $TrA < 0$ e teremos centros quando $TrA = 0$.

A discussão acima pode ser resumida pelo plano traço-determinante (na figura, β é o traço e γ é o determinante):



4 Problemas

1) Resolva os seguintes sistemas de EDOs e faça o gráfico das soluções usando o PPLANE.

a) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 2y \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = x + y \\ x(0) = y(0) = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 9y \\ \dot{y} = -4x - 6y \\ x(0) = 3; y(0) = -1 \end{cases}$

Compare as respostas com o problema 10 da lista de Diferenças Finitas.

2) Encontre um sistema de EDOs do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

cujas soluções sejam $x(t) = 4e^t - 3e^{2t}$ e $y(t) = 2e^t + 2e^{2t}$.

3) Considere a **EDO linear de 2a ordem**

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

a) Faça $y = \dot{x}$ e mostre que a equação acima é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx - ay \end{cases}$$

que pode ser resolvida pelos métodos discutidos nestas notas de aula.

b) Mostre que os autovalores λ_1 e λ_2 correspondentes a este sistema são exatamente as raízes de

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

e, portanto, a solução da equação de 2a ordem terá uma das seguintes formas:

$$\begin{gathered} \text{Se } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ forem reais} : x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \text{Se } \lambda_{1,2} = m \pm ni \text{ forem complexos} : x(t) = e^{mt}(c_1 \cos nt + c_2 \sin nt) \\ \text{Se } \lambda \text{ for raiz dupla} : x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \end{gathered}$$

onde c_1 e c_2 podem ser determinados a partir de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ se estes forem dados.

c) Analise o comportamento das soluções em cada caso − basicamente, o que acontece com $x(t)$ quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$, e como isto depende dos autovalores?

4) Encontre as soluções gerais das seguintes EDOs de 2a ordem (veja exercício 3):

a) $x''(t) = x(t)$.
b) $x''(t) + x(t) = 0$.
c) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$

5) Encontre todas as soluções dos seguintes Problemas de Valor Inicial e Problemas de Contorno:

a) $x''(t) - 2x'(t) - 15x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
b) $x''(t) + x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$.
c) $4x''(t) - x(t) = 0$, $x(2) = 1$, $x'(2) = 2$.
d) $x''(t) - 6x'(t) + 10x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$.
e) $4x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
f) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.
g) $x''(t) - x(t) - 6x(t) = 0$, $x(0) = x(1) = 1$.
h) $y''(t) + y(t) = 0$, $y(0) = y(\pi) = 1$.

Faça os gráficos de cada solução e descreva o seu comportamento quando $t \to \pm\infty$. Se possível, encontre os seus pontos críticos (mínimos e máximos).

6) Para que valores de a a equação $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$, $x(0) = a$, $x'(0) = 1$ tem soluções que satisfazem $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?

7) Encontre um sistema de EDOs da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

cujas soluções sejam periódicas de período 2, isto é, $x(t+2) = x(t)$ e $y(t+2) = y(t)$ para todo t real.

8) Seja $y(t)$ uma solução não-nula da equação $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$. Suponha que $y(t)$ tem duas raízes reais (isto é, $y(t_1) = y(t_2) = 0$ com $t_1 \neq t_2$). Mostre que $a^2 < 4b$.

9) Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 três raízes reais distintas do polinômio $p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$. Mostre que a função

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}$$

(onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias) satisfaz a equação diferencial

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

10) Encontre quatro funções linearmente independentes que satisfaçam $y'''' = y$.

11) Descreva como o diagrama de fase do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= ax + y \end{aligned}$$

muda à medida que a muda (faça vários diagramas usando o PPLANE). Em que valores de a há uma "transição" de um tipo de equilíbrio para outro? (Tais valores de a são chamados de **pontos de bifurcação**)

12) Repita o problema anterior para os sistemas abaixo

a) $\begin{cases} \dot{x} = ax + y \\ \dot{y} = -x + ay \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = ax + y \\ \dot{y} = -x - 4y \end{cases}$

13) Resolva o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y + e^t \\ \dot{y} &= 2x + y - e^t \end{aligned}$$