Sistemas de EDOs: Respostas, Soluções e Dicas para os Problemas

1) a) $\begin{array}{l} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = e^{2t} \end{array}$

b) $\begin{array}{r} x(t) = -e^{2t}(-4\cos t + 4\sin t) \\ y(t) = 4e^{2t}\cos t \end{array}$

c) $\begin{array}{r} x(t) = 3 + 9t \\ y(t) = -6t - 1 \end{array}$

2) Substitua $x(t)$ e $y(t)$ na equação e resolva para a, b, c e d (você pode acelerar as contas notando que $a + d = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3$ e $ad - bc = \lambda_1\lambda_2 = 2$). Resposta:

$$\dot{x} = \frac{10x - 6y}{7}$$
$$\dot{y} = \frac{-2x + 11y}{7}$$

3) a,b) Feitos em sala.

c) Em primeiro lugar, em cada caso, se $c_1 = c_2 = 0$, a solução é identicamente nula e não há o que discutir.

Caso 1: Se λ_1 e λ_2 forem negativos, as soluções $x(t)$ vão de $\pm\infty$ (dependendo de c_1 e c_2) a 0.

Se λ_1 e λ_2 forem positivos, as soluções vão de 0 a $\pm\infty$.

Se $\lambda_1 = 0$, o comportamento da solução depende de λ_2. Se $\lambda_2 < 0$, a solução vai de $\pm\infty$ a c_1; se $\lambda_2 > 0$, a solução vai de c_1 a $\pm\infty$.

Caso 2: se $m > 0$, a solução oscila cada vez mais à medida que $t \to +\infty$ (e cada vez menos quando $t \to -\infty$; de fato, $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$); se $m = 0$, a solução oscila e é periódica; se $m < 0$ a solução oscila muito quando $t \to -\infty$ mas oscila cada vez menos quando $t \to +\infty$, e $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

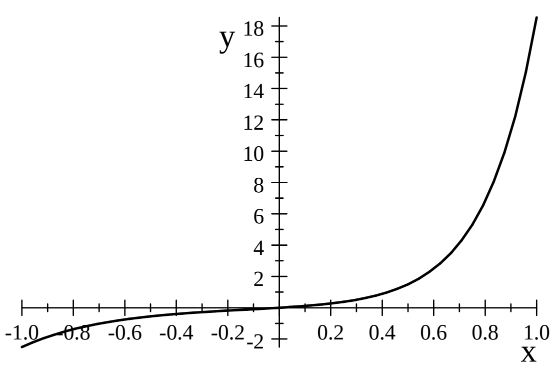
Caso 3: Se $\lambda < 0$, a solução vai de $\pm\infty$ (dependendo do sinal de c_2; se $c_2 = 0$, dependendo do sinal de c_1!) até 0 à medida que t cresce. Se $\lambda > 0$, a situação se inverte. Enfim, se $\lambda = 0$, a equação é $x'' = 0$, cuja solução é uma reta $x(t) = c_1 + c_2 t$. Se $c_2 > 0$, a solução vai de $-\infty$ a $+\infty$; se $c_2 < 0$, a solução vai de $+\infty$ para $-\infty$ e, enfim, se $c_2 = 0$, a solução é constante $x(t) = c_1$.

4) a) $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

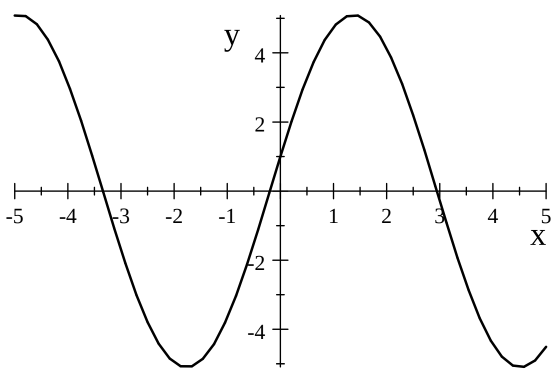
b) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

c) $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$.

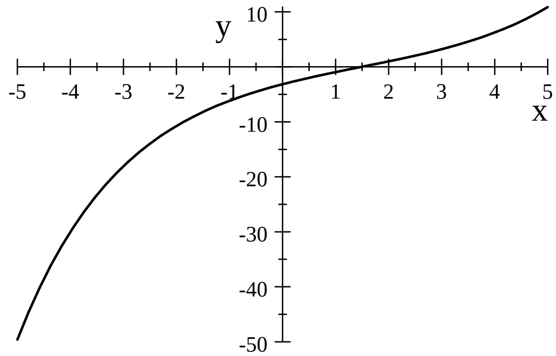
5)

a) 

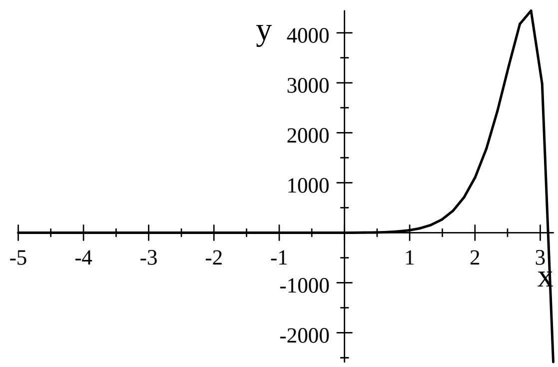
$x(t) = -\frac{1}{8}e^{-3t} + \frac{1}{8}e^{5t}$

b) 

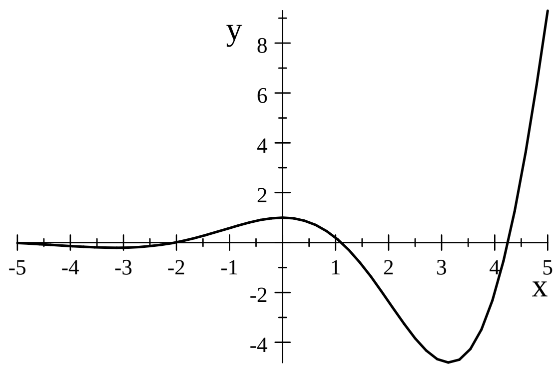
$x(t) = \cos t + 5\sin t$

c) 

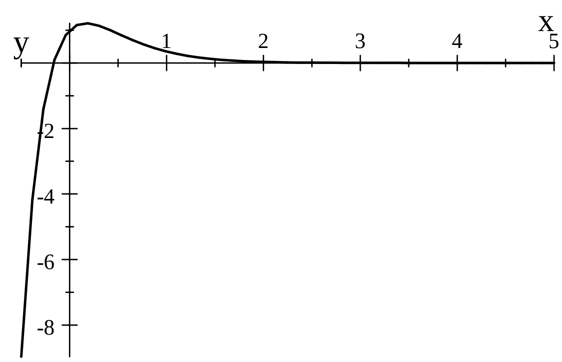
$x(t) = \frac{-3e^{1-t/2}+5e^{-1+t/2}}{2}$

d) 

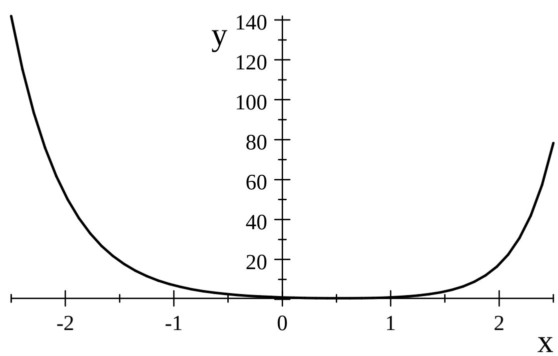
$x(t) = 3e^{3t}\sin t$

e) 

$x(t) = e^{t/2}\left(-\frac{\sin t}{2} + \cos t\right)$

f) 

$x(t) = e^{-3t} + 6te^{-3t}$

g) 

$\frac{1-e^2}{1-e^5}e^{3t} + \frac{1-e^3}{1-e^5}e^{2-2t}$

h) Impossível.

Pontos críticos: (nas respostas a seguir, k denota um inteiro arbitrário)
a) Não há b) $t = k\pi + \arctan 5$ (max local para k par) c) Não há.
d) $t = k\pi - \arctan\frac{1}{3}$ (min para k par) e) $t = k\pi$ (max para k par) f) $t = 1/6$ (máximo global!)
g) Ugh, $t = \frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\frac{e^2+e+1}{e+1} + \frac{2}{5} \simeq 0.537$ (mínimo global!)

6) A solução é da forma $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$. Isto só pode satisfazer $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ se o coeficiente c_1 for nulo, isto é, se $x(t) = c_2e^{-t}$. Mas então $x'(0) = 1 \Rightarrow c_2 = -1$, isto é, $x(t) = -e^{-t}$. Portanto, $a = x(0) = -1$ também.

Outra maneira de fazer é achar logo a solução exata em função de a:

$$x(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}a\right)e^{2t} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}a\right)e^{-t}$$

Como o coeficiente de e^{2t} tem de ser nulo, devemos ter $a = -1$.

7) Soluções periódicas só podem aparecer no caso em que as raízes são complexas com parte real nula, isto é, queremos

$\lambda = \pm ni$. Neste caso, as soluções são da forma

$$x(t) = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt$$
$$y(t) = c_3 \cos nt + c_4 \sin nt$$

Note que o período destas soluções é $\frac{2\pi}{n}$. Como queremos período 2, basta tomar $n = \pi$.

Isto dito, qualquer sistema com autovalores complexos $\lambda = \pm \pi i$ terá suas soluções na forma acima e, portanto, com período 2. Assim, basta escolher qualquer sistema onde $Tr = 0$ e $Det = \pi^2$. Por exemplo, podemos tomar

$$\dot{x} = x - \left(\pi^2 + 1\right) y$$
$$\dot{y} = x - y$$

ou qualquer outro sistema com a seguinte forma

$$\dot{x} = ax - \frac{\pi^2 + a^2}{c} y$$
$$\dot{y} = cx - ay$$

8) Note que a equação característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tem como discriminante exatamente a expressão $\Delta = a^2 - 4b$. Assuma, por contradição, que $a^2 \geq 4b$. Há dois casos a considerar:

a) Caso $a^2 > 4b$ (isto é, $\Delta > 0$ e, portanto, as raízes são ambas reais com $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

Então $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. É fácil ver que se $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$ então $y(t)$ não tem raízes reais (a menos, é claro, que $c_1 = c_2 = 0$, mas y seria a solução nula). Caso c_1 e c_2 sejam não-nulos:

$$y(t) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\lambda_1 t} = -c_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = -\frac{c_1}{c_2} \Rightarrow t = \frac{\ln\left(-\frac{c_1}{c_2}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

e, portanto, y teria no máximo uma raiz real (nenhuma, se $c_1/c_2 > 0$).

b) Caso $a^2 = 4b$ (então $\Delta = 0$ e há apenas uma raiz dupla λ):

Então $y(t)$ é da forma $e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$. Então:

$$y(t) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 t = 0 \Rightarrow t = -\frac{c_1}{c_2}$$

e, portanto, y teria novamente no máximo uma raiz real (nenhuma, se $c_2 = 0$ e $c_1 \neq 0$).

9) Basta substituir $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}$ na equação diferencial, separando os coeficientes em cada exponencial e reagrupando-os como a seguir

$$y''' + ay'' + by' + cy = c_1 p(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} + c_2 p(\lambda_2) e^{\lambda_2 t} + c_3 p(\lambda_3) e^{\lambda_3 t}$$

Como os λ's são as raízes de $p(\lambda)$, obtemos que a expressão acima é nula.

10) Inspirados pelo problema acima, tentemos funções da forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Então, devemos ter

$$\lambda^4 e^{\lambda t} = e^{\lambda t}$$

o que só é possível se $\lambda^4 = 1$, isto é, se $\lambda = \pm 1$ ou $\lambda = \pm i$.

As duas primeiras hipóteses nos dão as funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$. As outras duas nos dão $y(t) = e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$. Como queremos funções reias, rearrumamos estas duas usando combinações lineares, ficando ao invés com

$$y_3(t) = \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it} = \cos t$$
$$y_4(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t$$

Mais uma vez, fomos aos complexos e voltamos para encontrar uma resposta: as funções $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{-t}$, $y_3(t) = \cos t$ e $y_4(t) = \sin t$ satisfazem a equação diferencial.

Para mostrar que elas são L.I., suponha que $f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t = 0$ (para todo t). Então:

$$f(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0$$
$$f'(0) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 + c_4 = 0$$
$$f''(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - c_3 = 0$$
$$f'''(0) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 - c_4 = 0$$

Resolvendo o sistema, obtemos $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Assim, as 4 funções são L.I.

11) Vamos analisar o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= ax + y \end{aligned}$$

A equação característica é da forma $\lambda^2 - 2\lambda + (1 - a) = 0$, cujo discriminante é $\Delta = 4a$. Assim, temos vários casos possíveis:

Caso $a < 0$**:** então as raízes são complexas da forma $1 \pm i\sqrt{|a|}$. Como a parte real é positiva, as soluções erão espirais que se afastam da origem no sentido horário (pois para $(x, y) = (0, 1)$ temos $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, 1)$).

Caso $0 < a < 1$: as raízes são reais distintas da forma $1 \pm \sqrt{a}$, e ambas são positivas pois $a < 1$. Assim, o equilíbrio é um nó instável.

Caso $a > 1$: as raízes são reais distintas da forma $1 \pm \sqrt{a}$, e elas têm sinais distintos pois $a > 1$. Assim, o equilíbrio é do tipo sela.

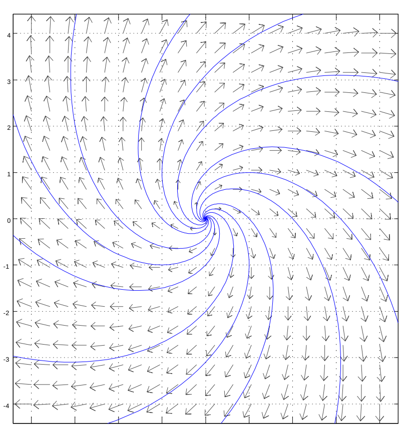
Primeira Transição, $a = 0$: o sistema passa de comportamento espiral para comportamento de nó instável. Para ser exato, quando $a = 0$, temos a raiz dupla $\lambda = 1$, e o equilíbrio é um nó impróprio (cujo único autovetor é o próprio eixo y).

Segunda Transição, $a = 1$: o sistema passa de nó instável para sela. Para ser exato, no momento em que $a = 1$, temos $\dot{x} = \dot{y} = x + y$. Fazendo as contas a partir de uma condição inicial (x_0, y_0), encontramos:

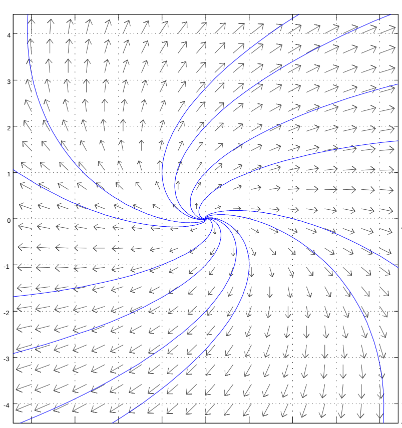
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0 + y_0}{2} e^{2t} + \frac{x_0 - y_0}{2} \\ y(t) &= \frac{x_0 + y_0}{2} e^{2t} + \frac{y_0 - x_0}{2} \end{aligned}$$

Note que as trajetórias satisfazem a condição $y - x = y_0 - x_0$, isto é, todas elas são semi-retas que saem de $\left(\frac{x_0 - y_0}{2}, \frac{y_0 - x_0}{2}\right)$ paralelas à reta $y = x$.

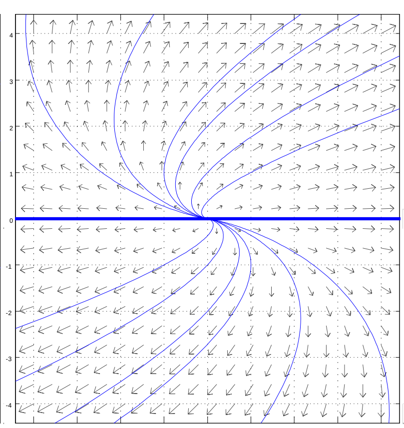
As figuras a seguir (feitas pelo PPLANE) ilustram as diferentes situações e os pontos de bifurcação de $\begin{array}{c} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = ax + y \end{array}$:



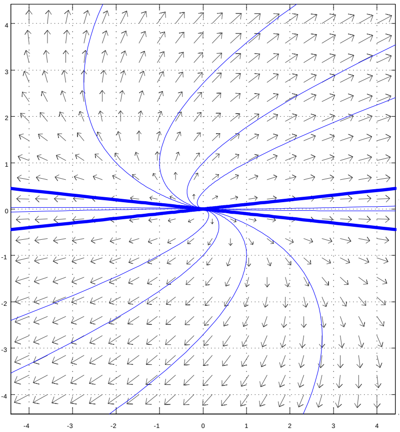
$a = -1$: Espirais instáveis



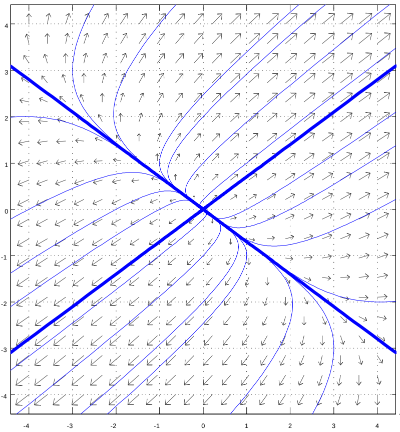
$a = -.25$: Espirais instáveis



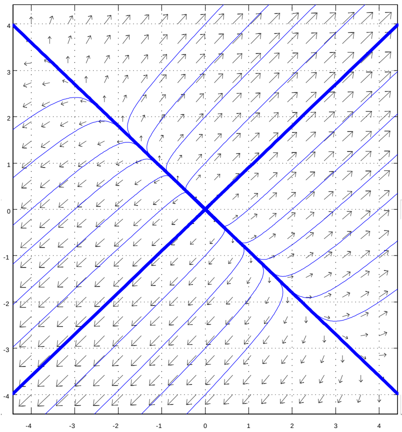
$a = 0$: Nó impróprio



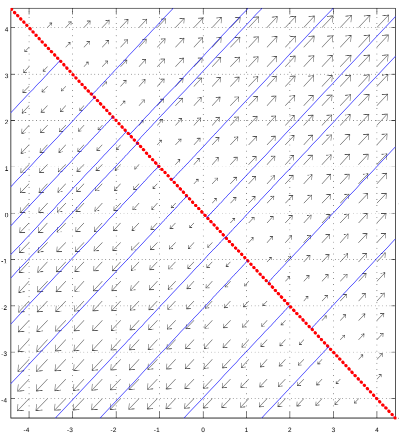
$a = 0.01$: Nó instável



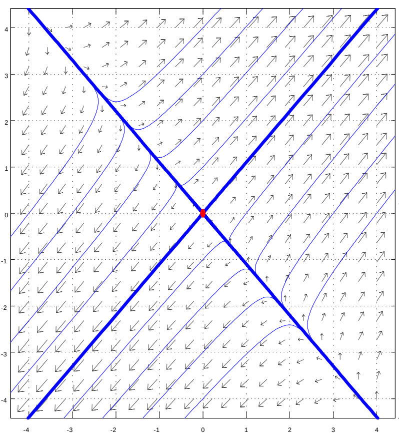
$a = 0.49$: Nó instável



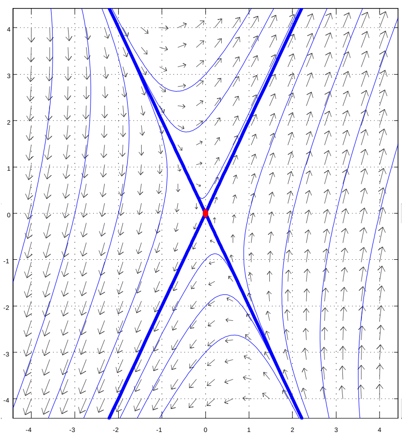
$a = 0.81$:Nó instável



$a = 1$: Vários equilíbrios!



$a = 1.21$: Sela



$a = 4$: Sela

12) a) Vamos analisar

$$\dot{x} = ax + y$$
$$\dot{y} = -x + ay$$

A equação característica é $\lambda^2 - 2a\lambda + \left(a^2 + 1\right) = 0$ e seu discriminante é $\Delta = -4$, sempre negativo. Assim, todas as soluções serão da forma "espiral" (e, aliás, todas no sentido horário, já que para $(x, y) = (1, 0)$ temos $(\dot{x}, \dot{y}) = (a, -1)$).

Os autovalores são $\lambda = a \pm 2i$; isto significa que a periodicidade das soluções não muda – apenas a "velocidade de espiralamento" é que muda. De fato, quando $a < 0$ as espirais são estáveis (vão em direção à origem); quando $a = 0$ temos um equilíbrio do tipo centro (as soluções são de fato $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ e $y(t) = c_2 \cos t - c_1 \sin t$, isto é, são da forma $x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2$, circunferências!); enfim, se $a > 0$ as espirais são instáveis.

b) Vejamos agora

$$\dot{x} = ax + y$$
$$\dot{y} = -x - 4y$$

A eq. característica é $\lambda^2 - (a - 4)\lambda + (-4a + 1) = 0$; temos $\Delta = a^2 + 8a + 12 = (a + 2)(a + 6)$. Assim:

Caso $a < -6$**:** então $\Delta > 0$, as raízes são reais distintas. Seu produto é $1 - 4a > 0$ e sua soma é $a - 4 < 0$, portanto temos $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Conclusão: **nó estável**.

Transição $a = -6$**:** temos $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ com raiz dupla $\lambda = -5$. Conclusão: **nó impróprio estável**.

Caso $-6 < a < -2$: temos $\Delta < 0$ e portanto autovalores complexos. A parte real destes autovalores é $\frac{a-4}{2}$, portanto, é negativa. Conclusão: **espirais estáveis no sentido horário**.

Transição $a = -2$: temos $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ com raiz dupla $\lambda = -2$. Conclusão: **nó impróprio estável.**

Caso $-2 < a < \frac{1}{4}$: raízes reais distintas, cujo produto é $1 - 4a > 0$ e cuja soma é $a - 4 < 0$. Assim, voltamos a ter $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. e um **nó estável**

Transição $a = \frac{1}{4}$: raízes reais, uma delas é 0. Haverá uma reta de equilíbrios em $x + 4y = 0$; como o outro autovalor é $\frac{-15}{4} < 0$, estes equilíbrios atrairão as trajetórias em formato de semi-retas. Assim, **equilíbrios marginalmente estáveis.**

Caso $\frac{1}{4} < a$: raízes reais com produto $1 - 4a < 0$. Assim, temos equilíbrio tipo **sela**.

Deixamos ao leitor experimentar estes valores de a no PPLANE.

13) Resolva o sistema

$$\dot{x} = x + 2y + e^t$$
$$\dot{y} = 2x + y - e^t$$

Uma maneira de resolver isto é apelar para o novo sistema

$$\dot{x} = x + 2y + z$$
$$\dot{y} = 2x + y - z$$
$$\dot{z} = z$$

que pode ser re-escrito como $\dot{v} = Av$ onde $v = (x, y, z)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são as raízes da equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, isto é

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right) = 0$$

que nos dá $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$. Assim, as soluções têm de ser da forma

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t}$$
$$y(t) = c_4 e^t + c_5 e^{-t} + c_6 e^{3t}$$

Jogando estas soluções de volta na equação original, obtemos

$$c_1 e^t - c_2 e^{-t} + 3c_3 e^{3t} = (c_1 + 2c_4 + 1)e^t + (c_2 + 2c_5)e^{-t} + (c_3 + 2c_6)e^{3t}$$
$$c_4 e^t - c_5 e^{-t} + 3c_6 e^{3t} = (2c_1 + c_4 - 1)e^t + (2c_2 + c_5)e^{-t} + (2c_3 + c_6)e^{3t}$$

Para que estas equações valham para todo t, precisamos ter necessariamente

$$c_1 = c_1 + 2c_4 + 1$$
$$c_4 = 2c_1 + c_4 - 1$$
$$-c_2 = c_2 + 2c_5$$
$$-c_5 = 2c_2 + c_5$$
$$3c_3 = c_3 + 2c_6$$
$$3c_6 = 2c_3 + c_6$$

As duas primeiras equações nos dão $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_4 = -\frac{1}{2}$. As outras nos dão apenas duas condições: $c_2 = -c_5$ e $c_3 = c_6$. Assim, a solução mais geral possível é

$$x(t) = ae^{-t} + be^{3t} + \frac{e^t}{2}$$
$$y(t) = -ae^{-t} + be^{3t} - \frac{e^t}{2}$$

(se você preferir, pense nisso como uma solução particular, $x(t) = e^t/2$ e $y(t) = -e^t/2$, mais a solução geral do sistema homogêneo

$$\dot{x} = x + 2y$$
$$\dot{y} = 2x + y$$

que é $x(t) = ae^{-t} + be^{3t}$ e $y(t) = -ae^{-t} + be^{3t}$).