Fevereiro 2004
Ralph Costa Teixeira

Soluções da Lista (Lógica)

1) A seguinte seqüência resolve o problema (a linha de cima representa quem está de um lado do rio, a de baixo quem está do outro lado, e os parênteses mostram quem acaba de atravessar o rio):

1	2	3	4	5	6
AaBbCc	AaBC	AaB(b)C	ABC	A(a)BC	Aa
	(bc)	c	(ab)c	bc	(BC)bc
7	8	9	10	11	12
Aa(Bb)	ab	ab(c)	a	a(b)	
Cc	(AB)Cc	ABC	ABC(bc)	ABCc	ABC(ab)c

No caso em que A é polígamo, a solução é análoga; em primeiro lugar, leve todas as 11 esposas para o outro lado do rio, uma a uma (como nos passos 1-4 acima); até chegar a:

…	22	23	24	25	26
…	ABC	ABC(c)	Cc	(Bb)Cc	bc
...	a_1...$a_9$bc	a_1...a_9b	(AB)a_1...a_9b	Aa_1...a_9	Aa_1...a_9(BC)

Agora, qualquer esposa de *A* pode ir buscar *b* e *c* em 4 viagens de barco, como nos passos 8-12 do item anterior.

2) A chave do problema é perceber que *A* e *B* são muito lentos e devem viajar juntos para economizar tempo – mas nenhum deles deve voltar com a lanterna! Assim, quando *A* e *B* cruzarem a ponte, *C* ou *D* já devem estar lá para trazer a lanterna de volta. Em suma, a seguinte seqüência resolve o problema:

Tempo:	2 min	4 min	14 min	15 min	17 min
ABCD	AB	AB(C)	C	C(D)	
	(CD)	D	(AB)D	AB	AB(CD)

3)
a. 3 meias são suficientes (na pior hipótese, as 2 primeiras meias terão cores distintas, mas a terceira tem de combinar com alguma das 2 primeiras).
b. 25 meias (na pior hipótese, as primeiras 24 meias são da mesma cor).
c. 26 meias (na pior hipótese, as 24 primeiras são azuis e precisamos de mais duas).

4) Retire uma fruta da caixa que tem o **rótulo "laranjas e bananas**". Suponha que a fruta retirada é uma laranja:
a. Então, esta é a *caixa das laranjas*; não pode ser "bananas" (pois tiramos uma laranja de lá) nem "laranjas e bananas" (o rótulo tem de estar errado, certo?);
b. Portanto, a caixa com o **rótulo "bananas"** tem de ter *laranjas e bananas* (não pode ser *das laranjas* pois já a encontramos, e não pode ser bananas porque seu rótulo está errado);
c. Enfim, a caixa com o **rótulo "laranjas"** tem de ter *bananas*.

Caso a fruta retirada seja uma banana, o raciocínio é análogo, trocando as palavras "bananas" e "laranjas".

5) Há várias soluções. Por exemplo, comece colocando 6 diamantes em cada prato; o prato mais leve certamente tem o diamante falso. Na segunda pesagem, divida estes 6 em dois grupos de 3 para descobrir em que grupo de 3 está o diamante falso. Enfim, destes 3 diamantes, pese o primeiro com o segundo; o mais leve é o falso, a menos que eles tenham o mesmo peso, quando o terceiro é o falso.

Em outras palavras, se "***E***" representa (o prato da esquerda é mais leve), "***D***" representa (o prato da esquerda é mais leve), e "=" representa (pratos equilibram), e 1,2,3,4,...,12 são os diamantes, a estratégia é:

Pesar 1,2,3,4,5,6 contra 7,8,9,10,11,12
- Se ***E***, pese 1,2,3 contra 4,5,6
  - Se ***E***, pese 1 contra 2
    - Se ***E***, 1 é o falso.
    - Se ***D***, 2 é falso.
    - Se =, 3 é falso.
  - Se ***D***, pese 4 contra 5
    - Se ***E***, 4 é falso.
    - Se ***D***, 5 é falso.
    - Se =, 6 é falso.
- Se ***D***, pese 7,8,9 contra 10,11,12
  - Se ***E***, pese 7 contra 8
    - Se ***E***, 7 é o falso.
    - Se ***D***, 8 é falso.
    - Se =, 9 é falso.
  - Se ***D***, pese 10 contra 11
    - Se ***E***, 10 é falso.
    - Se ***D***, 11 é falso.
    - Se =, 12 é falso.

Esta estratégia, quando levada a cabo, gera a seguinte tabela de possibilidades:

Diamante Falso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Resultado das 3 pesagens	***EEE***	***EED***	***EE=***	***EDE***	***EDD***	***ED=***	***DEE***	***DED***	***DE=***	***DDE***	***DDD***	***DD=***

Vale a pena notar que outras possibilidades, como, por exemplo, ***D=D*** ou ***=EE*** simplesmente jamais ocorrem com esta estratégia.

a. Coloque 9 diamantes em cada prato, deixando 9 de fora. O prato mais leve contém o diamante falso, ou ambos têm o mesmo peso e o grupo de fora contêm o diamante falso. De qualquer forma, após uma pesagem, limitamos o problema a um grupo de 9 diamantes.

Destes 9, coloque 3 em cada prato (deixando 3 de fora). Novamente, o prato mais leve contém o diamante falso, ou então, no caso de equilíbrio, o grupo que ficou de fora é que o contém. De qualquer forma, após a segunda pesagem, o problema fica limitado a 3 diamantes.

Enfim, pese um destes com outro para determinar o diamante mais leve (em caso de igualdade, o que ficou de fora é o falso).

Com a mesma notação do item anterior, esta estratégia, quando levada a cabo, determina uma tabela que associa às combinações ***EEE***, ***EED***, ***EE=***, etc. os números de 1 a 27. Com a numeração correta, teríamos a seguinte tabela de possibilidades:

Diamante Falso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	26	27
Resultado das 3 pesagens	***EEE***	***EED***	***EE=***	***EDE***	***EDD***	***ED=***	***E=E***	***E=D***	***E==***	**...**	***==D***	***===***

6) Sejam ABCDEFGHIJKL os 12 diamantes. Indiquemos por “+” o fato de que o diamante falso é mais pesado e por “-“ o fato de ele ser mais leve. Há, de fato, 24 hipóteses possíveis: A+, B+, C+, ..., L+, A-, B-, C-, ..., L- (e **apenas** uma delas é verdadeira).

Comece pesando ABCD contra EFGH. Temos duas hipóteses essencialmente distintas:

a. Os pratos pesam o mesmo

Neste caso, o diamante falso é um dos 4 de fora e ficamos apenas com as possibilidades I+, I-, J+, J-, K+, K-, L+ e L-. Pese IJ contra AK (já sabemos que A é um dos diamantes verdadeiros).

Se os pratos pesarem o mesmo, L é o diamante falso (L+ ou L-). Basta pesá-lo contra um outro para descobrir se ele é mais leve ou mais pesado que os demais.

Se IJ forem mais pesados, sobram apenas I+, J+ e K-. Pese I contra J. O mais pesado dos dois é o falso, a menos que eles equilibrem, caso em que temos K- (K é falso e mais leve).

Se IJ forem mais leves, sobram I-, J- e K+. Pese I contra J. O mais leve é o falso, ou os pratos se equilibram, e então K+.

b. Os pratos se desequilibram

Sem perda de generalidade, suponha que ABCD sejam mais pesados do que EFGH (a outra hipótese é análoga). Ficamos assim com as possibilidades A+, B+, C+, D+, E-, F-, G-, H-. Pese ABE contra CDF.

Se os pratos equilibram, G ou H é falso (G- ou H-). Pese G contra H e o mais leve é o falso.

Se ABE é mais pesado, temos A+, B+ ou F-. Pese A contra B e o mais pesado é o falso (ou, no equilíbrio, F-: F é o falso e mais leve).

Se CDF é mais pesado, temos C+, D+ ou E-. Pese C contra D e o mais pesado é o falso (ou, no equilíbrio, E-: E é o falso e mais leve).

7) Sejam m e n os números que Marcos pensou (digamos, $m \geq n$). Faça uma tabela com “todas” as possibilidades para m e n e considere a conversa que Alcides teria com Beatriz em cada caso (denotaremos por “s” a frase “Eu sei quem são os números m e n” e por “n” a frase “Ainda não sei quem são m e n”.).

Alcides vê a soma. Se ela for 2 ou 3, Alcides sabe os números (1 e 1 no primeiro caso e 1 e 2 no segundo). Qualquer outra soma faz com que Alcides fique em dúvida, pois qualquer soma maior que 4 pode ser alcançada de várias maneiras. A tabela começa então assim:

m / n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	s	s	n	n	n	n	n	n	...
2		n	n	n	n	n	n	n	...
3			n	n	n	n	n	n	...
4				n	n	n	n	n	...
5					n	n	n	n	...
6						n	n	n	..
7							n	n	...
8								n	...

A seguir, Beatriz olha o produto. Se o produto for 1, 2 ou um número primo *p*, Beatriz saberá que os números são 1 e 1, 1 e 2 ou 1 e *p*, respectivamente. Caso contrário, Beatriz ainda é incapaz de decidir qualquer coisa, pois haverá várias opções e todas elas vêm com um “n” do Alcides. A tabela da conversa fica assim:

m / n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	ss	ss	ns	nn	ns	nn	ns	nn	...
2		nn	nn	nn	nn	nn	nn	nn	...
3			nn	nn	nn	nn	nn	nn	...
4				nn	nn	nn	nn	nn	...
5					nn	nn	nn	nn	...
6						nn	nn	nn	..
7							nn	nn	...
8								nn	...

Como continuar a tabela? Nos casos “ss”, a conversa acabou. Nos casos “ns”, Alcides será capaz de deduzir que os números são 1 e *p*, e portanto descobri-los a partir da soma que tem em mãos (assim, os casos correspondentes a 1 e *p* com *p* primo maior do que 2 levam à conversa “nss”). Enfim, em todos os outros casos do tipo “nn” Alcides vê a soma que tem em mãos e ainda é incapaz de decidir em que “casa” ele está na tabela acima – com uma exceção: se a soma fosse 4, Alcides decidiria que *(m,n)=(1,3)* ou *(m,n)=(2,2)*, e seria capaz de distinguir entre as duas opções baseado na conversa até aqui (que, no primeiro caso, é “ns”, mas, no segundo, é “ss”). Assim, com a resposta de Alcides, a tabela se torna:

m / n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	ss	ss	nss	nnn	nss	nnn	nss	nnn	...
2		nns	nnn	nnn	nnn	nnn	nnn	nnn	...
3			nnn	nnn	nnn	nnn	nnn	nnn	...
4				nnn	nnn	nnn	nnn	nnn	...
5					nnn	nnn	nnn	nnn	...
6						nnn	nnn	nnn	...
7							nnn	nnn	...
8								nnn	...

Agora é a vez de Beatriz. Se o produto for 1, 2 ou primo, já sabemos o que acontece. Se Beatriz tem algum outro produto em mãos, ela tem de considerar várias hipóteses, e, como mostra a tabela acima, em todas elas a conversa foi “nnn” até aqui – com uma exceção: se o produto for 4, Beatriz tem como decidir entre as únicas possibilidades *(m,n)=(2,2) ou (1,4)* observando a tabela acima (que indica a conversa “nns” no primeiro caso e “nnn” no segundo). Então, temos:

m / n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	ss	ss	nss	nnns	nss	nnnn	nss	nnnn	...
2		nnss	nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	...
3			nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	...
4				nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	...
5					nnnn	nnnn	nnnn	nnnn	...
6						nnnn	nnnn	nnnn	...
7							nnnn	nnnn	...
8								nnnn	...

Agora, Alcides olha suas várias hipóteses e, provavelmente, todas elas têm a mesma conversa "nnnn" – Alcides será incapaz de decidir quem são *m* e *n*. As poucas exceções (veja as diagonais sombreadas) são os casos onde alguém já descobriu algum número. Em particular, se a soma for 5, as únicas possibilidades *(m,n)=(1,4) e (2,3)* têm diálogos distintos até aqui! Neste caso, Alcides diria que sabe quem são os números!

m / *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	ss	ss	nss	nnnss	nss	nnnnn	nss	nnnnn	...
2		nnss	nnnns	nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	...
3			nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	...
4				nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	...
5					nnnnn	nnnnn	nnnnn	nnnnn	...
6						nnnnn	nnnnn	nnnnn	...
7							nnnnn	nnnnn	...
8								nnnnn	...

Enfim, no próximo passo Beatriz não saberá coisa alguma, a menos que o produto seja 6 (as possibilidades de *(m,n)=(1,6) ou (2,3)* são diferenciadas pelo diálogo). A partir daí, nem Alcides nem Beatriz seriam capazes de alcançar conclusões novas. A tabela final é:

m / *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	sis	ss	nss	nnnss	nss	nnnnnss	nss	nnnnn...	...
2		nnss	nnnnss	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	...
3			nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	...
4				nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	...
5					nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	...
6						nnnnn...	nnnnn...	nnnnn...	...
7							nnnnn...	nnnnn...	...
8								nnnnn...	...

Como a conversa foi "nnnnss", os números são 2 e 3.

8) a.

A	B	AUB	$(AUB)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

b.

A	B	AUB	B^c	$(AUB) \cap B^c$	$A \cap B^c$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F

c.

A	B	C	B∩C	AU(B∩C)	AUB	AUC	(AUB)∩(BUC)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

d.

A	B	C	A^c	$A^c \cap B$	C^c	$A \cap C^c$	$(A^c \cap B) \cup (A \cap C^c)$	AUB	$A \cap C$	$(A \cap C)^c$	$(A \cup B) \cap (A \cap C)^c$
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F

e.

p	q	r	s	pvq	rvs	(pvq)(rvs)	pr	ps	qr	qs	pr v ps v qr v qs
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Os diagramas de Venn ficam por conta do leitor.

9) Comece por um diagrama com 3 conjuntos e faça uma linha que divida todas as 8 regiões existentes ao meio. Como fazer isto? A critério do leitor... ☺

10)
a. Sócrates não é alto ou não é mortal.
b. Platão não é grego e não é romano.
c. Setembro (às vezes) não chove ou comer rã não faz suar.
d. Não jantamos e vamos ao cinema.
e. Eu conheço metade de vocês metade do que eu gostaria, ou não gosto de menos da metade de vocês a metade do que vocês merecem.

11)
a. Escreveremos as soluções como pares ordenados *(x,y)*:

$$\begin{cases} x(x-y)=0 \\ (y-1)(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ ou \ x=y \\ y=1 \ ou \ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x=0 \ e \ y=1) \ ou \\ (x=0 \ e \ x=-y) \ ou \\ (x=y \ e \ y=1) \ ou \\ (x=y \ e \ x=-y) \end{matrix}$$

$$S=\{(0,1),(0,0),(1,1)\}$$

b.

$$\begin{cases} x^2+xy-3x=0 \\ y^2-xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\ ou\ x+y-3=0 \\ y=0\ ou\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x=0\ e\ y=0)\ ou \\ (x=0\ e\ x=y)\ ou \\ (x+y-3=0\ e\ y=0)\ ou \\ (x+y-3=0\ e\ x=y) \end{matrix}$$

$$S=\left\{(0,0),(3,0),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$$

c. Como *x e y* são não-nulos, podemos cancelá-los nas duas últimas equações:

$$\begin{cases} xy\neq 0 \\ y^2-xy=0 \\ x^2+xy+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ y(x-y)=0 \\ x(x+y+3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=-\frac{3}{2}$$

Testando esta solução, vemos que ela de fato resolve o problema. Então $S=\left\{\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\right\}$.

d. É mais simples dividir o problema em dois casos antes de começar:

Caso 1: $\lambda=0$

Então, o sistema se torna:

$$\begin{cases} 0(x-1)=0 \\ 0(y-1)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \{x^2+y^2=1$$

Caso 2: $\lambda\neq 0$

Neste caso, podemos cancelar o λ das duas primeiras equações, obtendo:

$$\begin{cases} \lambda(x-1)=0 \\ \lambda(y-1)=0 \\ x^2+y^2+\lambda=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ x^2+y^2+\lambda=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

Enfim, escrevendo a solução na forma (x,y,λ) temos $S=\{(1,1,-1)\}\cup\{(a,b,0)\mid a^2+b^2=1\}$

e. $\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x^2-6x+8<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1\ ou\ x>3 \\ 2<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4$

$S=(3,4)$

f. $\begin{cases} xy<0 \\ x^2-4x+3>0 \\ (x-2)(y-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x<0\ e\ y>0)\ ou\ (x>0\ e\ y<0) \\ x<1\ ou\ x>3 \\ (x<2\ e\ y<1)\ ou\ (x>2\ e\ y>1) \end{cases}$

A melhor maneira de enxergar estas condições é desenhá-las no plano cartesiano. Se você realmente quer fazer abrindo as 8 possibilidades, você vai escrever:

Caso 1: *(x<0 e y>0) e x<1 e (x<2 e y<1)*, isto é, *x<0 e 0<y<1*.
Caso 2: *(x<0 e y>0) e x<1 e (x>2 e y>1)* é impossível (afinal, *x<0 e x>2*).
Casos 3 e 4: *(x<0 e y>0) e x>3 e blá-blá* são impossíveis.
Caso 5: *(x>0 e y<0) e x<1 e (x<2 e y<1)*, isto é, *0<x<1 e y<0*.
Caso 6: *(x>0 e y<0) e x<1 e (x>2 e y>1)* é impossível (*x<1 e x>2*).

Caso 7: *(x>0 e y<0) e x>3 e (x<2 e y<1)* é impossível (*x>3 e x<2*).
Caso 8: *(x>0 e y<0) e x>3 e (x>2 e y>1)* é impossível (*y<0 e y>1*).

Juntando tudo, temos *(x<0 e 0<y<1) ou (y<0 e 0<x<1)*. No plano cartesiano, serão duas faixas retangulares, uma horizontal (vértices (0,0) e (0,1), ilimitada à esquerda) e uma vertical (vértices (0,0) e (1,0), ilimitada para baixo).

12) Juntando as duas primeiras equações, temos: $2xy^3 = 3x^2y^2$ (Eq. (1)).
Há 3 casos a considerar:

a. Caso *x=0*.
Então o sistema é equivalente a $\lambda = 0 \ e \ y = 5$, dando a solução (0,5,0).
b. Caso *y=0*.
Então o sistema é equivalente a $\lambda = 0 \ e \ x = 5$, dando a solução (5,0,0).
c. Caso contrário, isto é, $x \neq 0 \ e \ y \neq 0$
Então podemos cancelar xy^2 dos dois lados da equação (1) acima, obtendo $2y = 3x$, isto é, $y = \frac{3x}{2}$. Substituindo na última, $x + \frac{3x}{2} = 5 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$ e $\lambda = 2(2)(3)^3 = 108$. Não é difícil ver que (2,3,108) é, de fato, solução do sistema.

Juntando tudo, conclui-se que $S = \{(0,5,0),(5,0,0),(2,3,108)\}$.

13) De qualquer uma das duas primeiras equações, nota-se que $\lambda \neq 0$. Então $1 = \lambda y = \lambda x \Rightarrow x = y$. Substituindo na terceira, tem-se $x=y=1$ (e, portanto, $\lambda=1$) ou $x=y=-1$ (e, portanto, $\lambda=-1$). Verifica-se que ambas as "trincas ordenadas" servem, então $S = \{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$ (as trincas estão na ordem (x,y,λ)).

14)

a. A primeira equação é impossível (delta<0), portanto o sistema é impossível. $S = \varnothing$.

b. A segunda equação é equivalente a *y=3* ou *y=5*. Assim:
i. Caso *y=3*, da primeira equação tem-se $4x^2 - 4x + 3 = 0$, cujo delta é negativo e não tem soluções.
ii. Caso *y=5*, da primeira equação tem-se $4x^2 - 4x + 5 = 0$, que é impossível (delta<0).
Então, $S = \varnothing$.

c. A terceira equação é equivalente a *x=z* ou *x=-z*.
i. Caso *x=z*, as duas primeiras equações são equivalentes a
$$\begin{cases} 2x - xy = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-y) = 0 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$
pois a segunda equação garante que $x \neq 0$ pode ser cancelado na primeira. Este caso gera a solução (1,2,1).
ii. Caso *x=-z*, as duas primeiras equações são equivalentes a
$$\begin{cases} -xy = 0 \\ 2x + 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x(1+2y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$
pois novamente a segunda equação garante que $x \neq 0$. Este caso gera a solução (2,0,-2).
Enfim, $S = \{(1,2,1),(2,0,-2)\}$.

d. A primeira equação é uma identidade e acrescenta restrição alguma ao sistema. A segunda pode ser escrita como $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)$, isto é, $x = y \ ou \ x = -y \ ou \ x^2 + y^2 = 1$. A solução do sistema é o conjunto de todos os pares que satisfazem ao menos uma destas equações: $S = \{(a,a),(a,-a) \mid a \in R\} \cup \{(b, \pm\sqrt{1-b^2}) \mid -1 \leq b \leq 1\}$. Graficamente, no plano *x-y*, são as bissetrizes dos quadrantes principais, união com a circunferência de centro na origem e raio 1.

e. $\begin{cases} xy \geq 0 \\ (y-1)(y-3) \leq 0 \\ (x-2)(x+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \geq 0 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ x \geq 2 \text{ ou } x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ x \geq 2 \text{ ou } x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$

Onde a segunda equivalência é válida pois a segunda equação garante que $y > 0$. No plano *x-y*, a solução é uma faixa retangular infinita: $S = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geq 2 \; e \; 1 \leq y \leq 3\} = [2, \infty) \times [1,3]$.

f. A segunda equação equivale a $(\lambda - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (pois todo quadrado é não-negativo). A terceira nos dá:

$$-y = \sqrt{y+6} \Rightarrow y^2 = y + 6 \Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ou } y = -2$$

Testando ambas as raízes, vê-se que *y=-2* é a única solução. Sob estas hipóteses, a primeira equação é equivalente a $(x+1)(-2+2) \leq 0$, que é válida para todo *x*. Assim, $S = \{(x, -2, 2) \mid x \in R\}$.

15) O texto diz que se nenhuma das condições ocorrerem (inclusive a invasão do Rio), a união **não intervirá.** O artigo não diz nada sobre o que pode acontecer caso alguma das condições ocorram! Assim, a União não tem a obrigação legal de intervir (mas pode fazê-lo).

16) $\sqrt{x} + m = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - m \Rightarrow x = x^2 - 2mx + m^2 \Leftrightarrow x^2 - x(2m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2m + 1 \pm \sqrt{4m+1}}{2}$

Como nem todas as implicações são reversíveis, ainda não sabemos se ambas as soluções são válidas! Note que a implicação "problemática" é reversível exatamente quando *x-m* é não negativo, então basta verificar quais das soluções satisfazem $x - m \geq 0$. De fato, para qualquer m positivo, temos $\dfrac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2} - m = \dfrac{1+\sqrt{4m+1}}{2} > 0$ mas $\dfrac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2} - m = \dfrac{1-\sqrt{4m+1}}{2} < 0$. Portanto, a única solução é $x = m + \dfrac{1+\sqrt{4m+1}}{2}$.

17) a. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^4 + y^4 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x^4 + y^4 = 32 \end{cases}$ e, portanto, $S = \varnothing$.

b. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 4 \end{cases}$

Note que, se *x=0* e *y+z=4*, todas as três equações são satisfeitas. Assim, $S = \{(0, a, b) \mid a + b = 4\} = \{(0, a, 4-a) \mid a \in R\}$.

18) a.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \bar{q})$	$\bar{p}$	$((p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}$
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V

b.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

c.

A	B	C	B∩C	AU(B∩C)	AUB	(AUB)∩C	AU(B∩C)=(AUB)∩C	$A\subset C$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V

19) Pela contra-positiva:

$$x<0\Rightarrow\begin{cases}x^5,2x^3,2x<0\\x^4,5x^2>0\end{cases}\Rightarrow x^5-x^4+2x^3-5x^2+2x-1<0$$

C.Q.D.

20) Por contradição: suponha que $\begin{cases}y^4-8x^7+z=yz\\z^2-x^5-yz=1\\x=1\ e\ y=2\end{cases}$. Então, substituindo x e y nas 2 primeiras equações, $\begin{cases}16-8+z=2z\\z^2-1-2z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=8\\z^2-2z=2\end{cases}\Rightarrow ABSURDO$. Portanto, $\begin{cases}y^4-8x^7+z=yz\\z^2-x^5-yz=1\end{cases}\Rightarrow x\neq 1\ ou\ y\neq 2$.

21)
a. Às vezes chove e eu não me molho.
b. Todos os políticos do Brasil são desonestos.
c. Todo matemático usa óculos.
d. Há alguém que não sabe lógica e passa neste curso.

22)
a. VERDADEIRA, basta tomar $y=1$.
b. VERDADEIRA, basta tomar $y=1$.
c. VERDADEIRA, basta tomar $y=x$.
d. FALSA. Se fosse verdadeira, teríamos (tomando $x=1$) $1y=1$ e (tomando $x=2$) $2y=4$ simultaneamente, o que é absurdo.

23)
a. FALSA. Para todo número real x, $x^2\neq -1$
b. FALSA. Existe um número inteiro n, tal que $n^2\leq n$ (de fato, $n=0$, por exemplo).
c. FALSA. Existe um real x, tal que $x\leq 1$ e $x^2\geq 1$.(de fato, $x=-2$, por exemplo).
d. VERDADEIRA. A negação seria: Existe número real x tal que para todo natural n tem-se $n\leq x$.
e. FALSA. Para todo natural n, existe número real x tal que $n\leq x$.

24)
a. FALSA. Contra-exemplo: $x=-5$. Existe um x real tal que $x^2>x\ e\ x\leq 1$.
b. VERDADEIRA (cancele x em ambos os lados).
c. VERDADEIRA.
d. FALSA. Contra-exemplo: $n=2$. Existe um n natural tal que n é par mas n é primo.
e. VERDADEIRA.
f. VERDADEIRA (por exemplo, $y=3$).

25)

a. FALSA. Para todo *y* real, $y+3 \geq y$.
b. FALSA. Existe um *x* real tal que $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ (de fato, *x=1*).
c. VERDADEIRA. Por exemplo, *x=2*.
d. VERDADEIRA. Por exemplo, *x=10*.
e. VERDADEIRA. Se $N \leq 0$, basta tomar *x=1*. Caso contraio, tome, por exemplo, $x = 2\sqrt[6]{N}$.
f. VERDADEIRA. Basta tomar $y = 3x - x^2$.
g. FALSA. Existe um *y* real tal que, para todo *x* real, $x^2 - 3x + y \neq 0$. (Por exemplo, *y=5*).
h. VERDADEIRA. Basta tomar $y = 0$.

26) Suponha que há *N* brasileiros no mundo. A cada um deles associamos o seu número de amigos, que claramente será um número entre *0* e *N-1*. Note que um brasileiro com 0 amigos não conhece ninguém, enquanto um brasileiro com *N-1* amigos conhece todas as outras pessoas do grupo.

Porém, se há um brasileiro "eremita" (0 amigos), não pode haver um brasileiro "super-popular" (N-1 amigos), já que estes não se conheceriam! Assim, ao considerar a função *f* que leva cada brasileiro em seu número de amigos, há apenas duas hipóteses a considerar:

a. A imagem de *f* está contida em {0,1,2,...,N-2}.
b. A imagem de *f* está contida em {1,2,...,N-1}.

Em qualquer caso, temos N brasileiros e apenas N-1 possibilidades para o valor de *f*. Assim, há dois brasileiros que têm o mesmo número de amigos (ou, se você preferir, *f* não é injetiva)!

27) Suponha, por contradição, que há finitos números primos, digamos, $p_1, p_2, ..., p_n$. Considere o número $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$. Note que *N* deixa resto *1* na divisão por cada um daqueles primos. Portanto, *N* não possui fatores primos, o que é um absurdo (todo natural maior que *1* possui decomposição única em fatores primos). Conclusão: há infinitos números primos.

28) Suponha, por contradição, que $\sqrt{2} \in Q$. Claramente, $\sqrt{2} \neq 0$, então é possível escrever $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são inteiros primos entre si. Então $m = \sqrt{2}n \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ é par} \Rightarrow m \text{ é par} \Rightarrow m = 2k$ para algum *k* inteiro. Portanto, $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par}$. Mas *m* e *n* são pares e primos entre si! **ABSURDO!**

Conclusão: $\sqrt{2} \notin Q$

29) Suponha, por absurdo, que *p+qx* é racional. Então podemos escolher *a* e *b* inteiros (*b* não nulo) tais que $p + qx = \frac{a}{b}$. Aliás, como *p* e *q* são racionais, *q* **diferente de zero,** podemos escrever *p=c/d* e *q=e/f* onde *c,d,e,f* são inteiros (*d*, ***e*** e *f* não nulos). Portanto (note como usamos que $e \neq 0$ ao dividir por *e*):

$$\frac{c}{d} + \frac{e}{f}x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{\frac{e}{f}} = \frac{f(ad - bc)}{bde}$$

e *x* seria uma fração com inteiros no numerador e denominador, isto é, *x* seria racional, o que é um absurdo.

Conclusão: *p+qx* deve ser irracional.

30) Seja *n* um inteiro ímpar qualquer. Então podemos escrever $n = 2k + 1$ para algum *k* inteiro. Assim $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4k(k+1)$. Como *k* e *k+1* são inteiros consecutivos, pelo menos um deles é par! Assim, $n^2 - 1$ é divisível por 8, isto é, n^2 deixa resto 1 na divisão por 8.

31) Considere agora a equação $ax^2+bx+c=0$, cujas raízes são $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$. Não é difícil ver que estas raízes são racionais se e somente se o determinante b^2-4ac for um quadrado perfeito. Mas b^2 deixa resto 1 na divisão por 8, e, como a e c são ímpares, $4ac$ deixa resto 4 na divisão por 8. Portanto, b^2-4ac é um número ímpar, que deixa resto 5 na divisão por 8. Como o resto não é 1, o número ímpar b^2-4ac não pode ser um quadrado perfeito!

Teste Fev 2003

1)

a. Existe um x real tal que $x^2-8x+15=0$.

VERDADEIRA. De fato, $x=3$ resolve a equação.

b. Para todo x real, $x^2+2\geq x^2+1$.

VERDADEIRA. $x^2+2\geq x^2+1 \Leftrightarrow 2\geq 1$, que é verdadeira para qualquer x real.

c. Para todo n natural, $sin(n\pi)=0$.

VERDADEIRA. Os ângulos da forma $n\pi$ são côngruos aos ângulos de 0 e 180 graus, cujos senos são nulos.

d. Para quaisquer x e y reais, tem-se $xy<0 \Rightarrow x<0 \; ou \; y>0$.

FALSA. De fato, existem x e y reais tais que $xy<0 \; e \; x\geq 0 \; e \; y\leq 0$; basta tomar, por exemplo, $x=1$ e $y=-1$.

e. Para quaisquer x e y reais, tem-se $xy=1 \Rightarrow x=1 \; ou \; y=1$.

FALSA. De fato, existem x e y reais tais que $xy=1 \; e \; x\neq 1 \; e \; y\neq 1$; basta tomar, por exemplo, $x=2$ e $y=1/2$.

f. Para todo y real, existe x real tal que $x^2-(y+2)x+(y+1)=0$.

VERDADEIRA. Basta tomar $x=1$ ou $x=y+1$ (que são as raízes da equação acima).

g. Existe x real tal que, para todo y real, $y(3x+2y)=5y^2$.

FALSA. Para todo x real, existe y real tal que $y(3x+2y)\neq 5y^2$. De fato, a equação acima é equivalente a $y=0$ ou $y=x$; assim, como contra-exemplo, basta tomar $y\neq 0 \; e \; y\neq x$.

(Nota: não podemos tomar $x=y$ com intuito de provar que a afirmação é verdadeira pois x não pode depender de y – cuidado com a ordem!)

2)

a. $\begin{cases} x^2-(2-y)x+1=0 \\ y^2=2y \\ z^4=x^4+y^4 \end{cases}$

Da segunda equação, $y=0 \; ou \; y=2$.

CASO 1: Se $y=0$, substituindo na primeira equação, temos que $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$. Enfim, substituindo ambos x e y na terceira, temos que $z^4=1 \Leftrightarrow z=\pm 1$. Portanto, temos duas ternas neste caso: *(1,0,1)* e *(1,0,-1)*.

CASO 2: Se $y=2$, substituindo na primeira equação, temos que $x^2+1=0$, que não tem solução real.

Enfim, juntando tudo, concluímos que:

$$S=\{(1,0,1),(1,0,-1)\}$$

b. $\begin{cases} xy=16 \\ 2\sqrt{-y}-8=y \\ (x+zx-zy+4)^2=0 \end{cases}$

Começamos pela segunda equação. Temos:

$$2\sqrt{-y}=y+8 \Rightarrow -4y=y^2+16y+64 \Leftrightarrow y^2+20y+64=0 \Leftrightarrow y=-4 \; ou \; y=-16.$$

Testando ambas as respostas, vê-se que *y=-16* não serve, enquanto *y=-4* é solução. Substituindo na primeira equação, conclui-se que *x=-4* também. Enfim, colocando os valores de *x* e *y* na última equação, tem-se

$$(-4-4z+4z+4)^2=0 \Leftrightarrow 0=0$$

e, portanto, não há condição imposta a *z*. Enfim:

$$S=\{(-4,-4,z);z\in R\}$$

3)

a. Se Buenos Aires é a capital do Brasil, então Manaus é capital do Amazonas.
VERDADEIRA (pois a hipótese da implicação é falsa).

b. Existe um *x* real tal que $x^2 \geq -1$.
VERDADEIRA. Exemplo: *x=0*.

c. Para todo *n* natural, *n* é par ou *n* é primo.
FALSA. Contra-exemplo: *n=9*.

d. Para quaisquer *x* e *y* reais, tem-se $xy<100 \Rightarrow x<10 \ ou\ y<10$.
VERDADEIRA, já que a contra-positiva $x\geq 10 \ e\ y\geq 10 \Rightarrow xy\geq 100$ é claramente verdadeira.

e. Para quaisquer *x* e *y* reais, tem-se $x^3-1=0 \Rightarrow x=1 \ ou\ y=1$.
VERDADEIRA, já que $x^3-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow x=1 \ ou\ y=1$.

f. Para todo *y* real, existe *x* real tal que $e^x=y^2$.
FALSA. Contra-exemplo: *y=0* (para o qual não existe *x* correspondente).

g. Existe *x* real tal que, para todo *y* real, $\ln(x^2-xy)=0$.
FALSA. Teríamos $x^2-xy=1$ para todo *y*, o que implica em $x^2=1 \ e\ x=0$, e tal *x* não existe.

4) $\begin{cases} x^2y+xy^2=e^{\ln x+\ln y} \\ \ln(x+y)=(\ln x)(\ln y) \end{cases}$.

Da primeira equação, $x^2y+xy^2=xy$ e ambos *x* e *y* têm de ser positivos (para que os logaritmos existam); assim, podemos cancelar *xy* de ambos os lados e concluir que $x+y=1$. Substituindo na segunda equação, descobrimos que $(\ln x)(\ln y)=0 \Rightarrow \ln x=0 \ ou\ \ln y=0 \Rightarrow x=1 \ ou\ y=1$. Mas em qualquer um destes casos, a outra variável teria de ser 0 (já que *x+y=1*), o que é absurdo (pois *ln0* não existe). Assim, o sistema não tem solução!

5) Se o sistema tivesse soluções reais, da primeira equação, concluiria-se que $y=e^{e^x}>e^x>x$ (usando a propriedade dada duas vezes, com $a=e^x$ e depois com *a*=*x*). Analogamente, da segunda conclui-se que *x*>*y*. Então temos $x>y>x$, um ABSURDO!

Conclusão: o sistema não tem soluções! C.Q.D.