

Problemas de Lógica

Problemas Clássicos

- 1) Três maridos A , B e C e suas respectivas esposas a , b e c devem atravessar um rio usando um barco que comporta apenas 2 pessoas. No entanto, os três maridos são ciumentos de maneira doentia: cada um não aceita que sua esposa esteja na presença de outro homem (no barco ou em terra) sem que ele mesmo esteja presente. Como eles devem atravessar o rio sem enfurecer qualquer um dos três maridos?
 - a. E se um dos maridos for polígamo com 9 esposas?
- 2) Quatro pessoas com uma lanterna têm de atravessar uma ponte à noite. A ponte só agüenta o peso de 2 pessoas de cada vez, e a lanterna deve ser carregada toda vez que a ponte for percorrida. A pessoa A leva 10 minutos para cruzar a ponte, B leva 5 minutos, C leva 2 minutos e D leva 1 minuto. Se duas pessoas atravessam a ponte juntas, elas têm de andar à velocidade da pessoa mais lenta. Como fazer para que todos atravessem num tempo total de 17 minutos?
- 3) Numa gaveta há 12 pares de meias brancas e 12 pares de meias azuis. Você tem de escolher as suas meias no escuro. Qual o número mínimo de meias que você deve pegar para garantir que há pelo menos:
 - a. Um par de meias da mesma cor?
 - b. Um par de meias de cores diferentes?
 - c. Um par de meias brancas?
- 4) Têm-se 3 caixas, uma com laranjas, outra com bananas e uma terceira com laranjas e bananas. Infelizmente, os rótulos destas caixas formam trocados de forma que **nenhuma caixa** está com o rótulo correto. Como proceder para corrigir os rótulos das 3 caixas removendo apenas uma fruta de uma caixa?
- 5) Têm-se 12 diamantes. Todos eles têm o mesmo peso, exceto um que é mais leve do que os demais. Usando três pesagens de uma balança de pratos, mostre como descobrir qual é o diamante falso.
 - a. Repita o problema anterior com 27 diamantes, um deles mais leve do que os demais.
- 6) Há 12 diamantes. Todos têm o mesmo peso, exceto um. Com três pesagens de uma balança de pratos, como descobrir qual é o diamante falso e determinar se ele é mais leve ou mais pesado que os demais?
- 7) [Difícil!] Marcos pensa dois números naturais positivos (possivelmente iguais); a soma destes dois números ele entrega ao matemático Alcides, enquanto o produto ele entrega à matemática Beatriz. Alcides e Beatriz conversam sem mostrar seus números um ao outro:

A: “Só com esta soma, eu não sei quais são eram os dois números originais”.

B: “Com este produto, também não dá para descobrir”.

A: “Mesmo assim, continuo sem saber quem eram os números originais”.

B: “E eu continuo sem saber quem eles eram”.

A: “Ah! Neste caso, eu sei quem eram os números originais!”.

B: “Se você agora sabe, então eu também sei!”.

Quais eram os números originais?

Conectivos Lógicos (“E”, “OU”, “NÃO”) e Conjuntos

- 8) Use tabelas verdade para comprovar que
 - a. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 - b. $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B}$
 - c. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - d. $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap C})$
 - e. $(p \vee q)(r \vee s) = pr \vee ps \vee qr \vee qs$

Ilustre os itens (a-d) com diagramas de Venn.

- 9) Desenhe um diagrama de Venn para 4 conjuntos A , B , C e D .
- 10) Escreva a negação das seguintes proposições:
 - a. Sócrates é alto e mortal.
 - b. Platão é grego ou romano.

- c. Setembro chove e comer rã faz suar.
- d. Jantamos ou não vamos ao cinema.
- e. Eu não conheço metade de vocês metade do que eu gostaria; e gosto de menos da metade de vocês a metade do que vocês merecem¹.

Sistemas

11) Encontre todas as soluções reais de cada um dos sistemas abaixo:

- a. $x(x - y) = (y - 1)(x + y) = 0$
- b. $x^2 + xy - 3x = y^2 - xy = 0$
- c. $\begin{cases} xy \neq 0 \\ y^2 - xy = 0 \\ x^2 + xy + 3x = 0 \end{cases}$
- d. $\begin{cases} \lambda(x - 1) = 0 \\ \lambda(y - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + \lambda = 1 \end{cases}$
- e. $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$
- f. $\begin{cases} xy < 0 < x^2 - 4x + 3 \\ (x - 2)(y - 1) > 0 \end{cases}$

Esboce (f) no plano cartesiano x - y .

12) Em Cálculo 2, você vai aprender que os números reais x , y de soma 5 que maximizam (ou minimizam) a expressão $f(x, y) = x^2 y^3$ satisfazem um sistema da forma:

$$2xy^3 = \lambda; \quad 3x^2 y^2 = \lambda; \quad x + y = 5$$

Encontre todas as soluções deste sistema (nas **três** variáveis, incluindo a variável real λ).

13) Em Cálculo 2, você vai aprender que os números reais x e y de produto 1 que maximizam (ou minimizam) a expressão $f(x, y) = x + y$ satisfazem um sistema da forma:

$$1 = \lambda y; \quad 1 = \lambda x; \quad xy = 1$$

Encontre todas as soluções deste sistema (nas **três** variáveis, incluindo a variável real λ).

14) Encontre todas as soluções reais dos sistemas abaixo

- a. $\begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ xy + zx - x^5 = 0 \\ y^4 = z^4 \end{cases}$
- b. $\begin{cases} y = 4x(1 - x) \\ y^2 = 8y - 15 \\ z = xz \end{cases}$
- c. $\begin{cases} x - xy + z = 0 \\ x + 2xy - z = 4 \\ x^2 = z^2 \end{cases}$
- d. $\begin{cases} x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \\ x^4 - y^4 = x^2 - y^2 \end{cases}$
- e. $\begin{cases} xy \geq 0 \\ (y - 1)(y - 3) \leq 0 \\ (x - 2)(x + 1) \geq 0 \end{cases}$
- f. $\begin{cases} (x + 1)(y + \lambda) \leq 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda \leq -4 \\ -y = \sqrt{y + 6} \end{cases}$

Esboce (d) e (e) no plano cartesiano x - y .

Implicações Lógicas

15) O artigo 34 da Constituição Brasileira de 1988 diz o seguinte²:

“A União não intervirá nos Estados nem no Distrito Federal, exceto para:

- I) Manter a integridade nacional;
- II) Repelir invasão estrangeira ou de unidade da Federação em outra;
- III) ...”

¹ “I don't know half of you half as well as I should like, and I like less than half of you half as well as you deserve”, de “O Senhor dos Anéis: A Irmandade do Anel”, J.R.R.Tolkien.

² Os problemas 15, 16 e 23 vêm de “A Matemática do Ensino Médio, Volume 1”, por Elon Lages Lima et al.

Suponhamos que o estado do Rio de Janeiro seja invadido por tropas do estado de São Paulo. O texto acima **obriga** a União a intervir no estado?

16) Dado $m > 0$ resolva a equação $\sqrt{x} + m = x$, notando cuidadosamente quais implicações lógicas são reversíveis e quais não são.

17) Encontre todas as soluções reais dos sistemas

$$\text{a. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^4 + y^4 = 32 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y - z = -4 \\ xy = xz \end{cases}$$

18) Use tabelas verdade para demonstrar

- a. O princípio das demonstrações por Absurdo: $((p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}$
b. A transitividade das implicações: $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
c. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow A \subset C$.

19) Mostre que $x^5 - x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. [Dica: contra-positiva]

20) Mostre que $\begin{cases} y^4 - 8x^7 + z = yz \\ z^2 - x^5 - yz = 1 \end{cases} \Rightarrow x \neq 1 \text{ ou } y \neq 2$. [Dica: contradição]

Quantificadores (“PARA TODO” e “EXISTE”)

21) Escreva a negação das seguintes proposições:

- a. Sempre que chove, eu me molho.
b. Existe pelo menos um político honesto no Brasil.
c. Há matemáticos que não usam óculos.
d. Quem não sabe lógica, não passa neste curso.

22) As sentenças abaixo são falsas ou verdadeiras? Por quê?

- a. Para todo x real, existe um y real tal que $xy = x$.
b. Existe um y real tal que, para todo x real, tem-se $xy = x$.
c. Para todo x real, existe um y real tal que $xy = x^2$.
d. Existe um y real tal que, para todo x real, tem-se $xy = x^2$.

23) Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa e forme a sua negação:

- a. Existe um número real x tal que $x^2 = -1$.
b. Para todo número inteiro n , vale $n^2 > n$.
c. Para todo número real x , tem-se $x > 1$ ou $x^2 < 1$.
d. Para todo número real x existe um número natural n tal que $n > x$.
e. Existe um número natural n tal que, para todo número real x , tem-se $n > x$.

24) Determine a veracidade das afirmações abaixo. Para aquelas que são falsas, escreva a negação e dê um contra-exemplo.

- a. Para todo x real, $x^2 > x \Rightarrow x > 1$.
b. Para todo x real positivo, $x^2 > x \Rightarrow x > 1$.
c. Para quaisquer x, y reais, $(x < 0 < y \text{ e } x^2 = y^2) \Rightarrow x + y = 0$.
d. Para qualquer n natural, $n \text{ é par} \Rightarrow n \text{ não é primo}$.
e. Para todo y inteiro, $y > 2 \Rightarrow y \geq 3$.
f. Existe um y real tal que $y > 2 \Rightarrow y \geq 3$.

25) Determine a veracidade das afirmações abaixo. Para as falsas, escreva a negação.

- a. Existe um y real tal que $y + 3 < y$.
b. Para todo x real, $x^2 - 2x + 1 > 0$.
c. Existe um x real tal que $x^7 > 3x$.
d. Existe um x real tal que $x^7 > 30000x$.

- e. Para todo N real, existe um x real tal que $x^7 > Nx$.
- f. Para todo x real, existe um y real tal que $x^2 - 3x + y = 0$.
- g. Para todo y real, existe um x real tal que $x^2 - 3x + y = 0$.
- h. Existe um y real tal que, para todo x real, tem-se $(x + 2y)(x - y) = x^2$.

Demonstrações

- 26) Mostre que há dois brasileiros que têm o mesmo número de amigos brasileiros (suponha que toda amizade é mútua).
- 27) Mostre que há infinitos números primos.
- 28) Mostre que a raiz quadrada positiva de 2 é um número irracional.
- 29) Seja x um número irracional e sejam p e q números racionais (com q não-nulo). Mostre que $p+qx$ é irracional.
- 30) Mostre que, se n é ímpar, então $n^2 - 1$ é divisível por 8.
- 31) Sejam a, b e c inteiros ímpares. Mostre que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não admite raiz racional.

Questões de Testes (Fev 2003)

- 1) Determine a veracidade das seguintes afirmações. **Justifique brevemente as suas respostas, se possível, usando um contra-exemplo.** No caso das afirmativas falsas, escreva a sua negação.
 - a. Existe um x real tal que $x^2 - 8x + 15 = 0$.
 - b. Para todo x real, $x^2 + 2 \geq x^2 + 1$.
 - c. Para todo n natural, $\sin(n\pi) = 0$.
 - d. Para quaisquer x e y reais, tem-se $xy < 0 \Rightarrow x < 0$ ou $y > 0$.
 - e. Para quaisquer x e y reais, tem-se $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$.
 - f. Para todo y real, existe x real tal que $x^2 - (y + 2)x + (y + 1) = 0$.
 - g. Existe x real tal que, para todo y real, $y(3x + 2y) = 5y^2$.
- 2) Resolva os seguintes sistemas no universo dos números reais, **justificando as suas respostas.**
 - a.
$$\begin{cases} x^2 - (2 - y)x + 1 = 0 \\ y^2 = 2y \\ z^4 = x^4 + y^4 \end{cases}$$
 - b.
$$\begin{cases} xy = 16 \\ 2\sqrt{-y} - 8 = y \\ (x + zx - zy + 4)^2 = 0 \end{cases}$$
- 3) Determine a veracidade das seguintes afirmações. No caso das afirmativas falsas, quando cabível, apresente um contra-exemplo.
 - a. Se Buenos Aires é a capital do Brasil, então Manaus é capital do Amazonas.
 - b. Existe um x real tal que $x^2 \geq -1$.
 - c. Para todo n natural, n é par ou n é primo.
 - d. Para quaisquer x e y reais, tem-se $xy < 100 \Rightarrow x < 10$ ou $y < 10$.
 - e. Para quaisquer x e y reais, tem-se $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$.
 - f. Para todo y real, existe x real tal que $e^x = y^2$.
 - g. Existe x real tal que, para todo y real, $\ln(x^2 - xy) = 0$.
- 4) Encontre todas as soluções reais do sistema
$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 = e^{\ln x + \ln y} \\ \ln(x + y) = (\ln x)(\ln y) \end{cases}$$
- 5) Sabe-se que $e^a > a$ para todo a real. Mostre que o sistema
$$\begin{cases} e^x = \ln y \\ e^y = \ln x \end{cases}$$
 não tem solução real. [Sugestão: faça por contradição – suponha que o sistema **tem** uma solução real...]