Jogos Combinatórios e Números Surreais

Ralph Costa Teixeira

ralph@mat.uff.br

Departamento de Matemática Aplicada, UFF

$2^{\underline{o}}$ Colóquio da Região Sudeste

Janeiro de 2013

Resumo

Vamos jogar Nim? Em uma mesa, há n pilhas de palitos, com $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ palitos, respectivamente. Você e um amigo alternam suas jogadas; na sua vez, você pode escolher a pilha que quiser, e retirar o número (positivo) de palitos que desejar daquela pilha (na vez dele, ele é que escolhe, é claro). Quem tirar o último palito ganha. Como determinar a estratégia vencedora para este jogo (em função de $x_1, x_2, ..., x_n$)?

Nim é um exemplo de jogo combinatório – jogos sequenciais nos quais ambos os jogadores têm informação completa (em particular, jogos combinatórios não têm o elemento de sorte). Outros exemplos famosos de jogos combinatórios são o jogo da velha, damas, reversi (ou othello), xadrez, hex e go. Jogos que não são combinatórios incluem par-ou-ímpar, pôquer (e praticamente todos os jogos de baralho), gamão (e praticamente todos os jogos com dados) e futebol (e praticamente todos os esportes).

Resolver um jogo combinatório significa determinar quem o vence (supondo que ambos os jogadores jogam sempre da melhor maneira possível) e qual a estratégia vencedora (se houver) a cada lance. Em teoria, todo jogo combinatório pode ser "facilmente" resolvido por um algoritmo simples que analisa completamente a sua árvore de opções, como veremos no capítulo 1.

No capítulo 2, apresentaremos de maneira informal o início da teoria dos jogos combinatórios (capítulos iniciais de [1]), que procura analisar tais jogos usando ferramentas potencialmente mais poderosas que a simples análise direta de suas árvores. Para tanto, introduziremos o jogo Hackenbush ("desmata-mata") para apresentar os conceitos básicos da teoria; cada posição deste jogo define um número (por um processo similar à construção dos reais via cortes de Dedekind). Veremos como computar e somar tais números. Vale a pena notar que esta construção engloba os números reais e vários outros, levando ao conjunto dos números surreais (incluindo números infinitesimais e infinitos, que serão apenas citados neste minicurso).

O capítulo 3 procura formalizar alguns dos conceitos previamente apresentados, apenas o suficiente para que o leitor perceba que, apesar de inusitada, a teoria é matematicamente sólida e profunda.

Enfim, no capítulo 4 voltamos a nos divertir analisando Jogos Imparciais como o Nim. As posições deste jogo levam à construção dos nímeros $*1, *2, *3$, ... Aprenderemos a somá-los e utilizá-los para resolver rapidamente vários jogos imparciais de dois jogadores – frequentemente sem a necessidade de computadores! Citaremos o Teorema de Sprague-Grundy: "Todo jogo normal imparcial é equivalente a um nímero".

Repetimos que quase tudo que aprendemos sobre a Teoria dos Jogos Combinatórios (e também como abordá-los didaticamente) está em [1]. Outras boas referências (um pouco mais formais) para o leitor aprofundar seus estudos no assunto são [4] e [2], ou o texto em português [3] do Colóquio Brasileiro de Matemática de 1991.

Capítulo 1

O que são Jogos Combinatórios?

Na nossa análise, consideraremos um *jogo* como:

1. Um conjunto de *posições*, uma das quais é destacada como a *posição inicial* do jogo;
2. Um conjunto de *jogadores* que realizarão os lances (vide a seguir) do jogo;
3. Um conjunto de *regras*, que determinam:
   (a) Todos os *lances* permitidos aos jogadores (um lance é um movimento de uma posição do jogo para outra);
   (b) Todas as *posições terminais* (nas quais o jogo termina, dependendo de quem joga a seguir);
   (c) Uma quantidade de *pontos* a ser atribuída a cada jogador em cada posição terminal (que, na maioria dos casos será 1 ponto para os vencedores e 0 pontos para os perdedores)

Um *jogo combinatório* é um **jogo sequencial com informação completa**, isto é, jogos onde os jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento. Em particular, "informação completa"significa que o elemento de sorte/azar/probabilidade não pode estar presente no jogo, nem pode haver "cartas escondidas"ou algo do gênero.

Por exemplo, *Jogo da Velha*, *Xadrez*, *Damas* e *Go* são jogos combinatórios (quando há empate, pressuponha meio ponto para cada jogador); mas *Gamão*, *Ludo* e quaisquer jogos com dados não são (pois não há informação completa devido à aleatoriedade dos dados). Praticamente qualquer jogo de baralho (*Buraco*, *Canastra*, *Pôquer*, *Truco*, etc.) não é um jogo combinatório (o fato de você não saber as cartas dos outros jogadores exclui "informação completa"; aliás, o simples fato das cartas serem embaralhadas de maneira desconhecida já faz com que o jogo não seja combinatório). *Par ou Ímpar*, *Dois ou Um (Zerinho ou Um)*, *Dedanha* também não são jogos combinatórios porque os jogadores jogam simultaneamente. Esportes como *Futebol*, *Vôlei*, etc. não tem regras bem definidas (um dos problemas é que os lances permitidos dependem da habilidade dos jogadores) e também não são jogos combinatórios.

Note-se que o número de jogadores pode ser 1 (como nas clássicas *Paciências*, que tipicamente não são jogos combinatórios, ou no *Resta-Um*, que é um jogo combinatório) ou até mesmo 0 (como no fascinante e riquíssimo *Life*, de John Conway, onde todos os movimentos são pré-determinados, não há escolha nem fim). Isto dito, neste texto nos limitaremos a jogos de 2 jogadores, que serão chamados daqui por diante de L (de Leitor, azuL, Left, você) e R (Ralph, veRmelho, Right, eu). Não se surpreenda portanto se a maioria dos exemplos favorecer o jogador R.

É comum também considerar apenas jogos em que o número de posições é finito – mas boa parte da teoria que discutiremos se aplicam a jogos infinitos, desde que o jogo garantidamente termine em um número finito de lances[1].

Enfim, trabalharemos apenas com jogos que têm a *Regra Normal*: se a partir de uma posição o jogador prestes a realizar seu lance descobrir que ele não tem lances válidos, então esta posição é terminal e este jogador será imediatamente declarado *perdedor*. Note que isto não é uma restrição forte – por exemplo, se declararmos que, no Xadrez, o jogador que sofreu Xeque-Mate não tem lances válidos, esta condição é automaticamente satisfeita. Ajustes semelhantes podem ser feitos no seu jogo combinatório favorito para que ele tenha tal *Regra Normal* ("quem não pode jogar, perde").

Exemplo 1.1 *Jogo dos 15*

Selecione de um baralho 9 cartas numeradas de 1 a 9 e coloque-as sobre a mesa (viradas para cima – informação completa!). Em cada turno, o jogador da vez traz uma carta para a sua mão. Assim que você tiver em sua mão um subconjunto de exatamente **três** cartas cuja soma seja 15, você vence. Se as cartas acabarem e ninguém tiver vencido, o jogo empata.

Exemplo 1.2 *Chopsticks*

Cada jogador mostra suas mãos ao outro jogador, inicialmente com um dedo estendido em cada mão (representando um "ponto"em cada mão). O objetivo do jogo é "matar"ambas as mãos do oponente (uma mão com 5 ou mais pontos é sempre imediatamente trocada por uma com 0 pontos, isto é, com todos os dedos fechados, e é considerada "morta"). Para tanto, a cada turno um jogador deve realizar apenas um dos seguintes movimentos:

i) Tocar uma das mãos do oponente com uma de suas mãos; neste caso, os pontos da mão que tocou são adicionados aos pontos da mão tocada (a mão que tocou mantém seus pontos);

ii) Tocar suas mãos entre si, transferindo pontos entre elas; com este movimento, um jogador pode até mesmo "ressuscitar"uma mão morta. Note-se que este movimento só é permitido se os números de pontos de suas mãos realmente mudar – o jogador não pode trocar 1+2 por 2+1, por exemplo.

Exemplo 1.3 *Nim Simples*

Numa mesa há 5 pilhas de palitos, com, respectivamente, 1, 2, 3, 4 e 5 palitos. Em cada turno, o jogador da vez escolhe uma das pilhas, e retira quantos palitos desejar daquela pilha (só não vale retirar 0 palitos, que seria "passar a vez"). Quem tirar o último palito **ganha**.

[1]Não confunda "infinitas opções"com "jogo interminável". Por exemplo, considere o jogo em que L escolhe um número real, e em seguida R escolhe um número real – quem escolher o maior número ganha; há uma infinidade de escolhas para L e R, mas o jogo garantidamente termina em apenas 2 lances.

Exemplo 1.4 *Nim (Generalizado)*

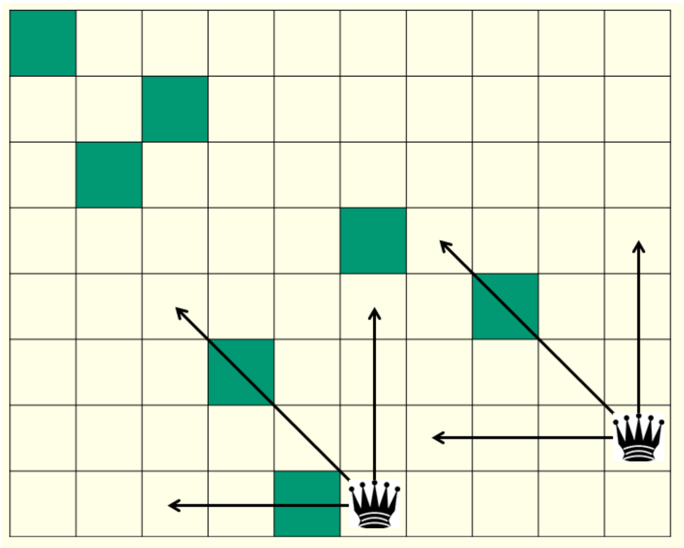
Numa mesa, há n pilhas de palitos, com, respectivamente, x_1, x_2, ..., x_n palitos. As regras são idênticas às do exemplo anterior. E agora?

Exemplo 1.5 *Wyt´s Queen*

Posicione uma dama em uma das casas de um tabuleiro de xadrez. Em cada turno, o jogador da vez a move quantas casas quiser em uma das seguintes direções: Norte, Oeste ou Noroeste. Quem levar a dama ao canto Noroeste vence.

Exemplo 1.6 *Wyt´s Queens*

Num tabuleiro $n \times n$, posicione um número m de damas. Em cada turno, o jogador da vez escolhe uma das damas e a move como no jogo anterior. As damas não interferem umas com as outras, isto é, uma dama pode passar por cima de outra em seu movimento, e várias damas podem ocupar a mesma casa em qualquer momento do jogo. Quem não tiver movimento válido (o que ocorre quando todas as damas estiverem no canto Noroeste) perde.



1.1 Árvores e Estratégias Vencedoras

O leitor pode ficar com a impressão de que Jogos Combinatórios não têm graça. Afinal, como a informação é completa, é teoricamente possível analisar a árvore **completa** do jogo (onde cada nó é uma posição e cada ramo é um lance). De fato, supondo que os jogadores sempre jogam da melhor maneira possível, podemos usar o seguinte raciocínio:

1. Se o jogo está numa posição em que L escolhe como continuar, e ele tem pelo menos uma opção que lhe garante a vitória, então L inteligentemente a escolherá, e vencerá o jogo. Portanto, esta posição é vencedora para L. Indicaremos isto com a frase "esta posição é azuL".

2. Caso contrário, L procurará um lance que lhe garanta o empate; se tal lance existir, esta posição é "empatadora", e diremos que "esta posição é cinza".

3. Enfim, se L se encontra numa posição onde TODOS os lances levam a vitórias para R, então esta posição é vencedora para R, isto é, veRmelha.

4. Quando é a vez de R jogar, a análise é a mesma das 3 linhas anteriores, trocando L por R.

Assim, **se o jogo é finito**, podemos utilizar um algoritmo simples de coloração da árvore (que nada mais é que a repetição do raciocínio acima):

1. Nos nós terminais, use a cor do jogador vencedor, ou cinza se o resultado é o empate.

2. Agora trabalhe "de trás para a frente": para cada nó cujas folhas estejam todas coloridas:

   (a) Se a vez é de L...

      i. ...e há alguma folha azuL, use neste nó a cor azuL; senão
      ii. ...se há alguma folha cinza, use neste nó a cor cinza; senão
      iii. ...(todas as folhas são veRmelhas) use neste nó veRmelho.

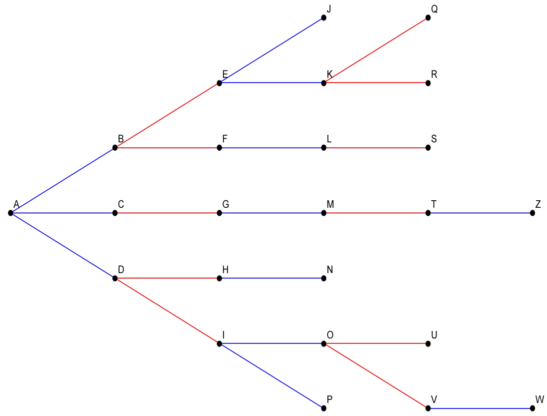
   (b) Se a vez é de R...

      i. ...e há alguma folha veRmelha, use neste nó a cor veRmelha; senão
      ii. ...se há alguma folha cinza, use neste nó a cor cinza; senão
      iii. ...(todas as folhas são azuis) use neste nó azuL.

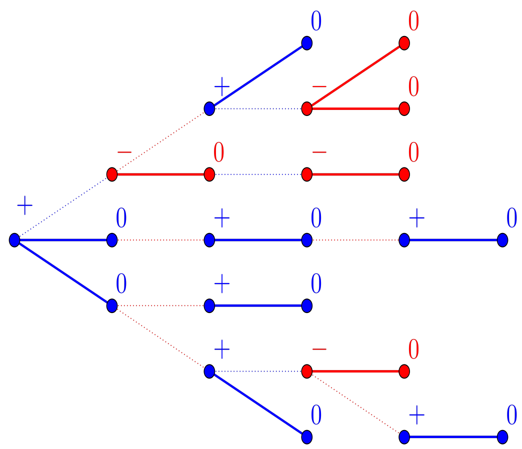
3. Repita o passo 2 até chegar ao nó inicial! Sua cor determina quem vence o jogo (ou se ele terminará empatado).

Aliás, se a cada passo você destacar os lances que levam à vitória, então não só sabemos quem vencerá mas também saberemos todas as maneiras ótimas de jogar aquele jogo!

Exemplo 1.7 *No jogo descrito pela árvore abaixo, arestas azuis são movimentos possíveis para você (L), e arestas vermelhas são possíveis para mim (R). Quem não tem movimento válido perde (não há empates). Você começa o jogo, em A. Quem vai vencer? Como?*



Seguindo o algoritmo (da direita para a esquerda), resolvemos o jogo. Arestas cheias são lances que levam à vitória para o jogador indicado, e arestas tracejadas são lances perdedores. Nós "positivos"são nós onde você tem um lance vencedor (2.a.i); nós "negativos"são nós onde eu tenho um lance vencedor (2.b.i). Em nós marcados com "0", quem joga perde (2.a.iii ou 2.b.iii). Quem ganha este jogo é você (L), e há duas boas jogadas iniciais – para "Leste"ou "Sudeste". Não comece para cima, pois aí eu tomo controle do jogo (jogando para a direita e trilhando nós vermelhos).



Em suma, demonstramos que, num jogo combinatório **finito**, uma das seguintes opções tem que valer:

1. O primeiro jogador tem uma estratégia que lhe garante a vitória; ou
2. O segundo jogador tem uma estratégia que lhe garante a vitória; ou
3. Ambos os jogadores têm estratégias que lhes garantem o empate.

Em teoria, o algoritmo acima resolve qualquer jogo combinatório, inclusive Damas, Xadrez e Go. Na prática, as árvores de tais jogos sofrem da famigerada "explosão combinatória", e não há recursos computacionais na atualidade que sejam capazes de completar esta tarefa de maneira tão ingênua. Experimente um exemplo simples: a árvore do Jogo da Velha tem muito mais do que $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120$ nós... Mesmo usando as simetrias do jogo, a árvore ainda deve ocupar umas duas páginas (vide p. 735 de [1]).

A título de ilustração, a tirinha[2] a seguir, extraída em Janeiro de 2012 do fantástico site www.xkcd.com, exibe o estado da arte das Inteligências Artificias frente a alguns jogos conhecidos. Note que o jogo de Damas, a partir da posição inicial usual, está resolvido (empata se ambos os jogadores jogarem da melhor maneira possível); em Xadrez acredita-se que o resultado é empate, mas ainda não há resposta definitiva.

Em suma, só porque há um algoritmo que resolve Jogos Combinatórios, não significa que o assunto acabou[3]. O objetivo deste minicurso é investigar novas ferramentas de análise para Jogos Combinatórios.

1.2 Solução de Jogos Selecionados

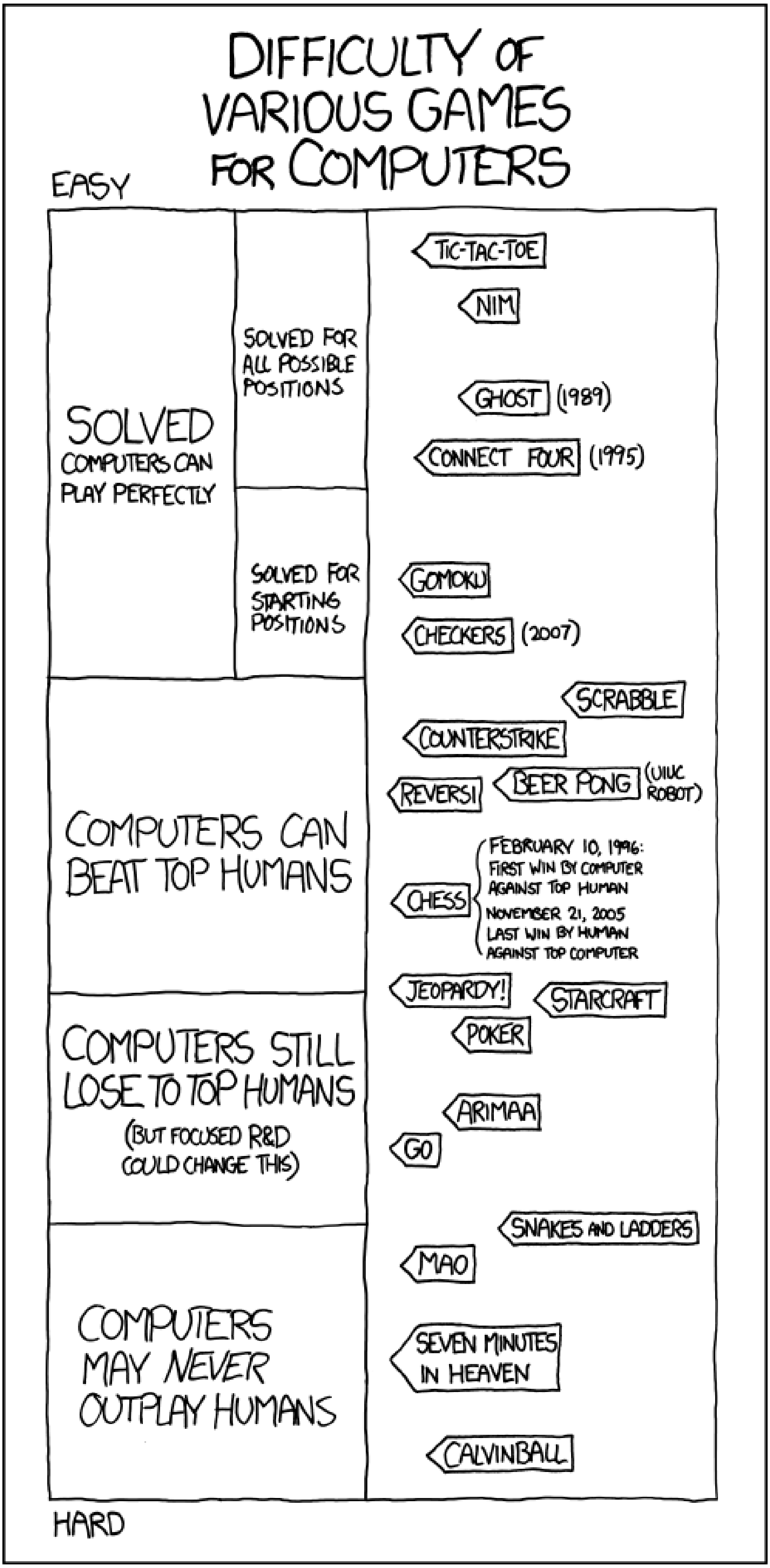
Exemplo 1.8 *O Jogo dos 15 empata. Aliás, o quadrado mágico abaixo mostra que o jogo dos 15 é o Jogo da Velha muito mal disfarçado.*

$$\begin{matrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{matrix}$$

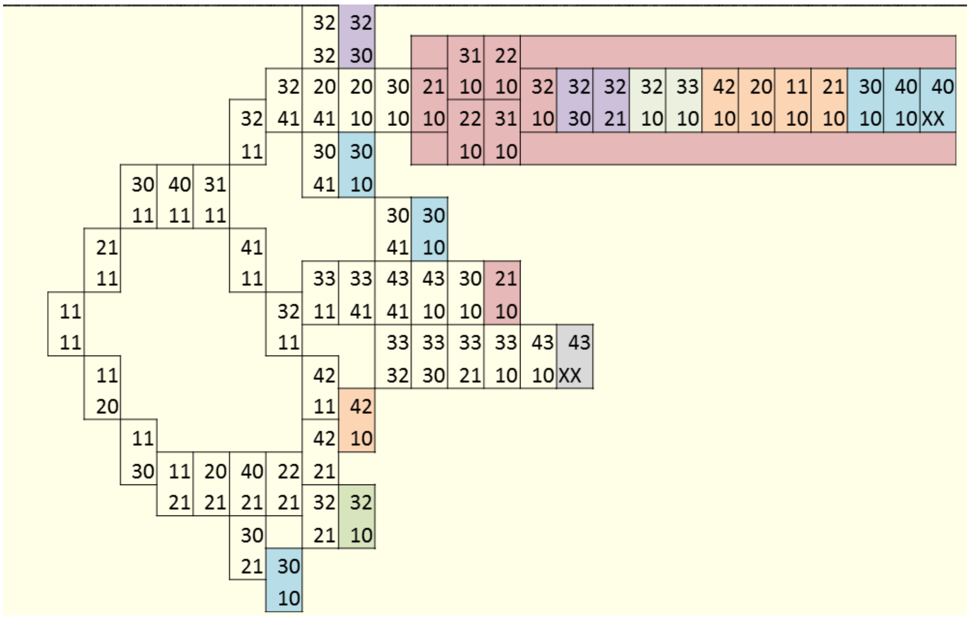
Exemplo 1.9 *O segundo jogador vence Chopsticks. Na árvore abaixo, cada retângulo é uma posição do jogo Chopsticks (dois números para cada jogador). Por exemplo, no primeiro lance o primeiro jogador pode trocar a mão do oponente de* $(1,1)$ *para* $(2,1)$ *ou trocar a sua própria mão de* $(1,1)$ *para* $(2,0)$. *Esta não é a árvore completa do jogo – ela contém apenas uma estratégia vencedora para o segundo jogador; algumas opções claramente perdedoras para o primeiro jogador nem estão descritas. Fica ao leitor decifrar a notação utilizada (as cores conectam retângulos distantes).*

[2] http://xkcd.com/1002/.

[3] Só porque você aprendeu a contar, não significa que não precisa aprender a somar ou multiplicar...



DIFFICULTY OF VARIOUS GAMES FOR COMPUTERS
EASY
SOLVED
COMPUTERS CAN PLAY PERFECTLY
SOLVED FOR ALL POSSIBLE POSITIONS
SOLVED FOR STARTING POSITIONS
COMPUTERS CAN BEAT TOP HUMANS
COMPUTERS STILL LOSE TO TOP HUMANS
(BUT FOCUSED R&D COULD CHANGE THIS)
COMPUTERS MAY NEVER OUTPLAY HUMANS
HARD
TIC-TAC-TOE
NIM
GHOST (1989)
CONNECT FOUR (1995)
GOMOKU
CHECKERS (2007)
SCRABBLE
COUNTERSTRIKE
REVERSI
BEER PONG (UIUC ROBOT)
CHESS
FEBRUARY 10, 1996: FIRST WIN BY COMPUTER AGAINST TOP HUMAN
NOVEMBER 21, 2005 LAST WIN BY HUMAN AGAINST TOP COMPUTER
JEOPARDY!
STARCRAFT
POKER
ARIMAA
GO
SNAKES AND LADDERS
MAO
SEVEN MINUTES IN HEAVEN
CALVINBALL



Exemplo 1.10 *O primeiro jogador vence Nim Simples. Uma maneira de vencer é retirar um palito da última pilha (deixando $(1,2,3,4,4)$). A partir daí, você pode garantir a vitória da seguinte forma:*
– Nas três primeiras pilhas, sempre deixe $(1,2,3)$ ou uma pilha vazia e duas iguais;
– Nas duas últimas pilhas, sempre deixe dois números iguais.

Exemplo 1.11 *Para resolver Wyt´s Queen, sempre leve a dama a uma das casas marcadas em verde no tabuleiro acima. Se for a sua vez de jogar e a dama estiver numa casa verde, você vai perder.*

O Nim generalizado e o Wyt´s Queens serão resolvidos ao final deste texto.

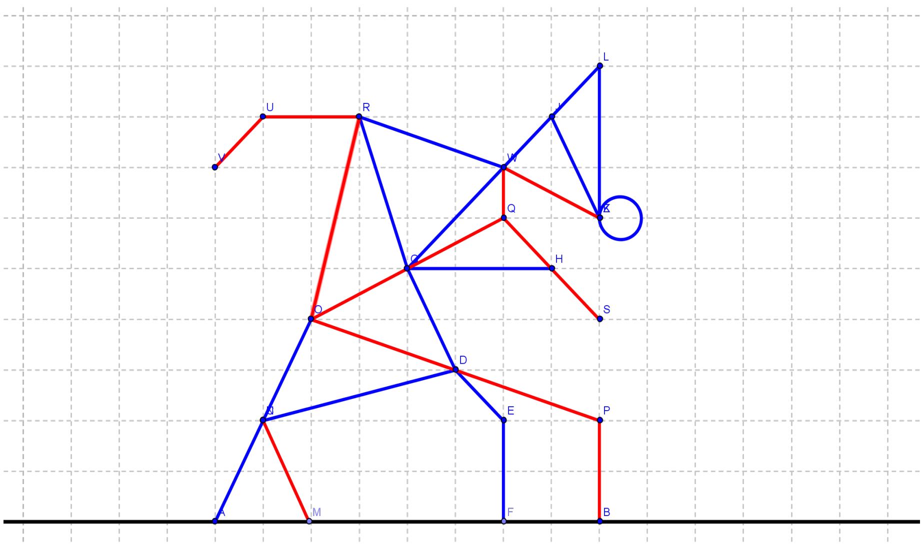
Capítulo 2

Motivação

Neste capítulo, apresentamos as principais ideias do resto do texto **de maneira informal e imprecisa**. A cada passo, o leitor atento se perguntará: mas isto faz sentido? Esta operação realizada faz sentido neste contexto? Que picaretagem! Asseguramos ao leitor mais cético que toda a formalização necessária será feita (ou pelo menos indicada) no capítulo seguinte. Por enquanto, relaxe, aprecie os exemplos, ponha a cabeça para funcionar e tenha fé – e **divirta-se**!

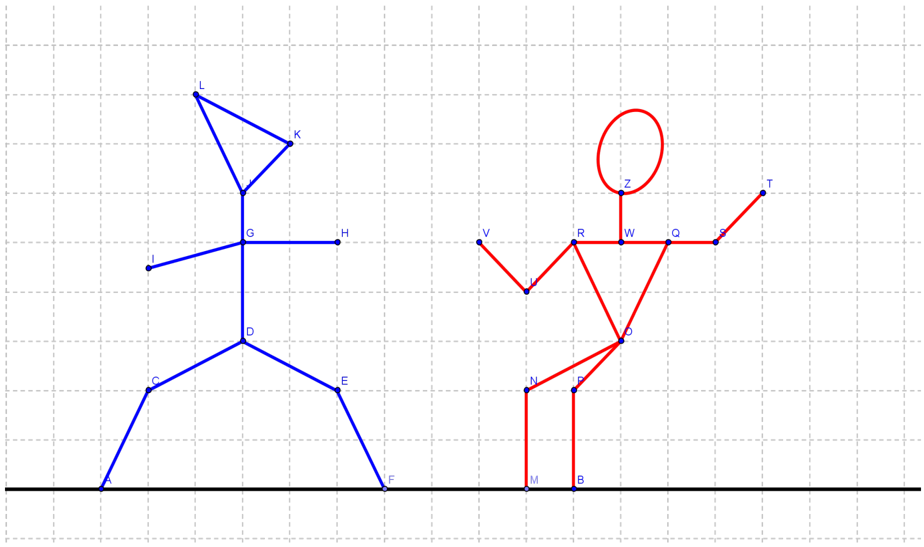
2.1 Hackenbush (Desmata-mata)

No jogo de "Hackenbush", a posição inicial é um grafo onde um dos nós é especial é chamado de "solo", e as arestas têm cores azul ou vermelha. Todos os nós têm de estar conectados ao solo por algum caminho de arestas. Na figura abaixo, o solo é representado por uma reta.



Na sua vez, você, que é o jogador azul, pode retirar uma qualquer aresta azul do grafo; na minha vez, eu posso retirar uma qualquer aresta vermelha. Se uma retirada desconecta nós e arestas do solo, estas são removidas imediatamente do jogo. Como usual, quem não tiver movimentos válidos perde.

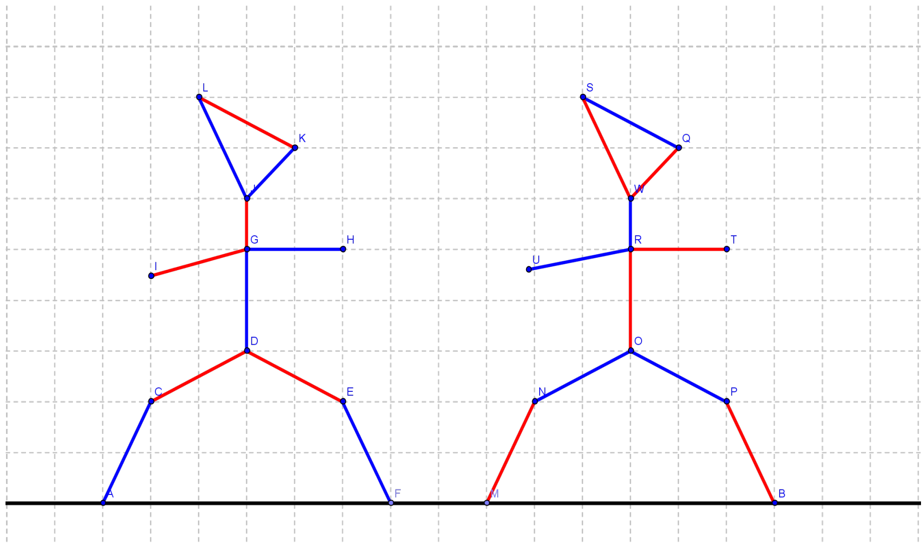
Vamos começar nossa análise de Hackenbush com uma posição inicial simples:



Como você quer manter as arestas azuis vivas pelo maior número possível de rodadas, você vai retirar as arestas azuis de cima para baixo. Analogamente, eu vou começar retirando a cabeça e os braços do meu grafo, deixando as pernas para o final. Como eu tenho 14 arestas para retirar e você tem apenas 11, eu vou ganhar este jogo, independentemente de quem começar.

Vamos associar um valor numérico a este jogo. Como você deve ter ficado infeliz com o fato de que eu vou ganhar, vamos dizer que este jogo é **negativo**, ok? Aliás, ele é bem negativo, já que eu tenho 3 movimentos a mais do que você! Então vamos dizer que este jogo vale $-\mathbf{3}$. De fato, a árvore da esquerda vale 11, e a da direita vale -14, então a coisa toda vale $11 - 14 = -3$. Note como já estamos implicitamente usando uma ideia de **soma de jogos**, que no caso do Hackenbush significa simplesmente colocá-los um ao lado do outro.

Agora considere o jogo a seguir:



Este jogo parece bem mais complicado, mas é fácil encontrar uma estratégia vencedora para o segundo jogador, seja ele azul ou vermelho. De fato, pela simetria, o segundo jogador pode sempre repetir o movimento do primeiro na outra metade da figura. Procedendo assim, o segundo jogador garantirá a retirada da última aresta e a vitória.

Em suma, neste jogo **quem começa perde**. Vamos dizer então que este jogo é **nulo**, isto é, seu valor é **0**. Eu não sei quanto vale cada uma das duas árvores, mas a soma delas é nula. Ou seja, se a árvore da esquerda vale G, é razoável dizer que a da direita vale $-G$, e então $G + (-G) = 0$.

Então nossa ideia é associar um valor numérico (com sinal) para cada jogo G que você inventar. Esta associação deve respeitar os seguintes "axiomas":

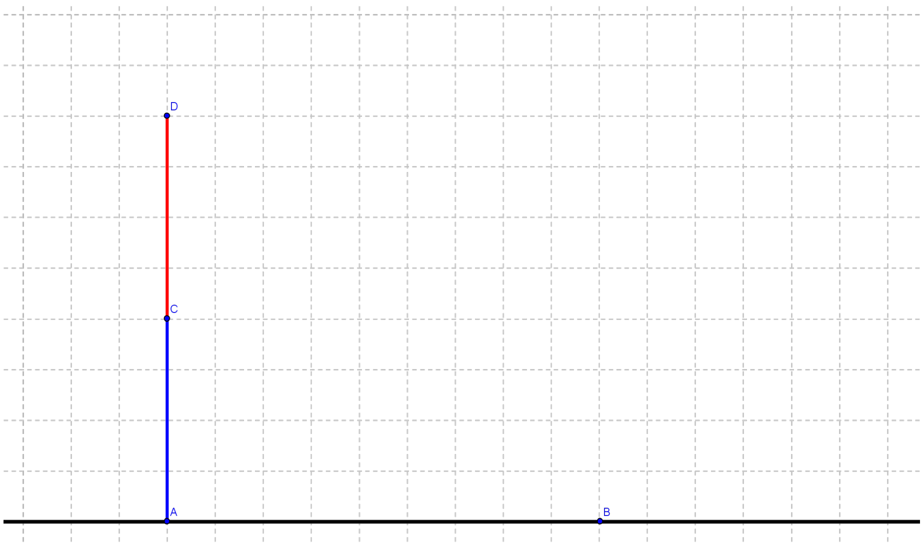
- Se no jogo G quem começa perde, o jogo G é **nulo** (notação: $G = 0$).
- Se no jogo G, você-azul sempre ganha, o jogo G é **positivo** ($G > 0$).
- Se no jogo G, eu-vermelho sempre ganho, o jogo G é **negativo** ($G < 0$).

O leitor atento vai notar que existe uma quarta possibilidade para um jogo combinatório G. Por exemplo, Nim simplificado é um jogo onde quem começa ganha. Então temos um quarto axioma de sinais:

- Se no jogo G, quem começa ganha, o jogo G é **confuso com zero** ou **difuso (**$G \parallel 0$).

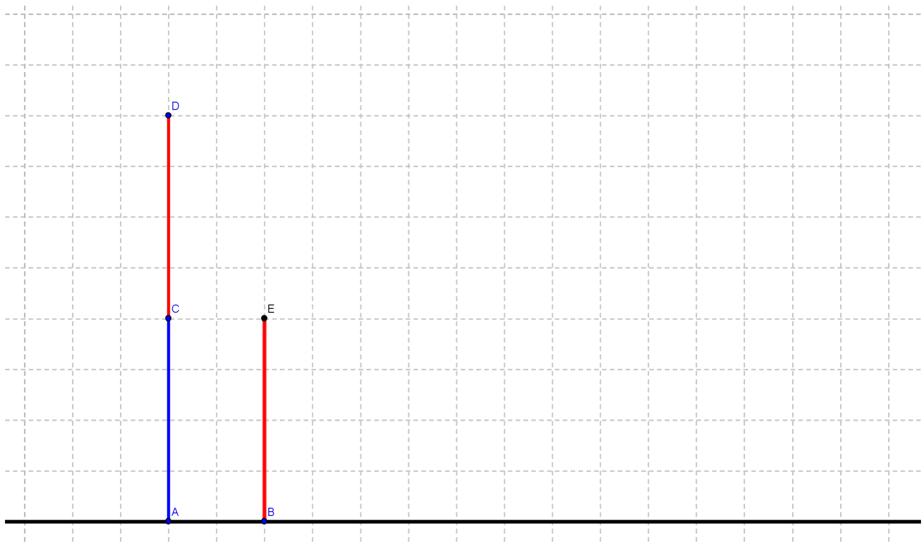
Não se preocupe neste momento com este misterioso axioma – pode-se demonstrar que nenhum jogo de Hackenbush é deste tipo, então vamos adiar a discussão dos jogos confusos com zero para um capítulo futuro.

Estamos prontos para o nosso primeiro exemplo não-trivial: de acordo com essas ideias, quanto valeria o jogo a seguir?



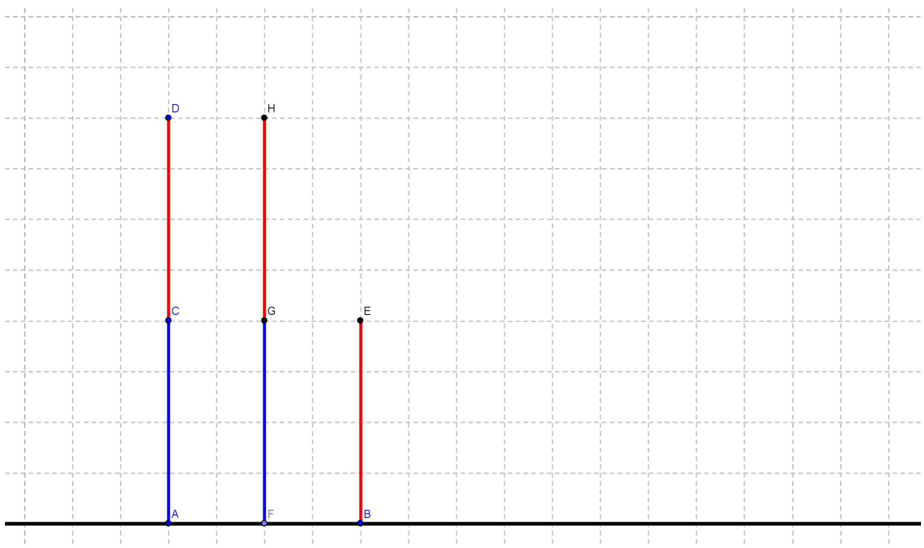
Apesar de haver uma aresta de cada cor, este jogo não é nulo! Se você começar, você retira a aresta azul e a minha some automaticamente; eu fico sem jogada e você ganha. Se eu começar, eu retiro a vermelha, e você retira a azul. Então você ganha de novo. Não interessa quem começa – você sempre ganha! Assim, este jogo é **positivo**.

Será que o valor dele é 1? Chamando de x o jogo acima, considere agora o jogo $x + (-1)$:



Se você começar, você retira a aresta azul, eu retiro a vermelha que sobra e venço; se eu começar, eu espertamente retiro a aresta vermelha superior (que está "a perigo"), você tira a sua, eu tiro a minha, e eu venço. Ou seja, neste jogo, não interessa quem começa, eu vou vencer! Este jogo é negativo, isto é, $x - 1 < 0$.

Assim, $0 < x < 1$. Será que faz sentido dizer que $x = \frac{1}{2}$? Para verificar se isto é razoável, vejamos quanto vale $x + x - 1$:



Se você começa, você retira uma das arestas azuis (digamos, a da esquerda), deixando o jogo anterior. Eu retiro a vermelha superior, você tira a outra azul, eu venço o jogo.

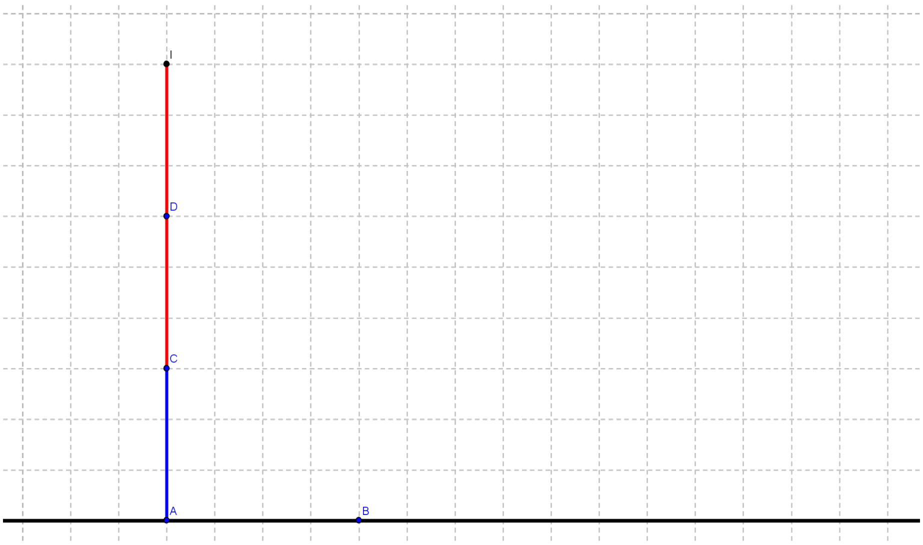
Se eu começo, eu retiro uma das arestas superiores que estão a perigo (digamos, a da esquerda). Você, que não é bobo, retira a azul da direita, matando uma das minhas. Agora eu tenho que retirar a da direita, você tira a da esquerda, e eu danço. Você ganhou.

Em suma, neste jogo, quem começa perde. Assim, provamos que $x + x - 1 = 0$. Portanto, é razoável dizer que o jogo original (aresta vermelha sobre azul) vale $x = \frac{1}{2}$.

O jogo x pode ser perfeitamente descrito pelas possibilidades de lance inicial: para você, a única opção é retirar a aresta azul e deixar absolutamente nada, ou seja, deixar um jogo nulo. Eu posso retirar a vermelha e deixar a azul, que é um novo jogo que vale $+1$. Vamos então introduzir uma notação, que põe todas as opções do jogador você-azul do lado esquerdo e uma barra, e todas as minhas-vermelhas opções do lado direito. Com esta notação, diríamos que

$$x = \{0|1\} = \frac{1}{2}$$

Considere agora o jogo y a seguir:



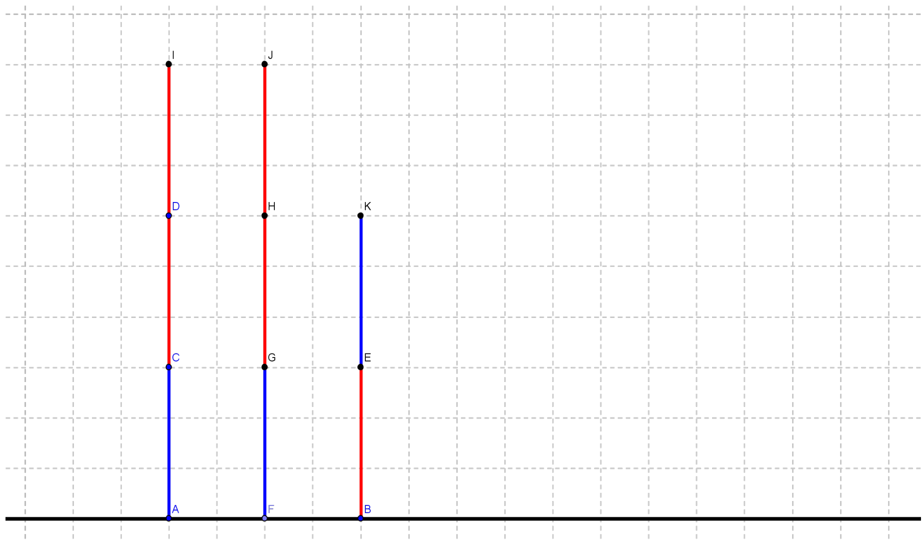
É fácil escrever este jogo com a nova notação. Se você começar, você pode deixar 0; se eu começar, eu posso deixar 1 ou $\frac{1}{2}$. Então

$$y = \left\{0|\frac{1}{2}, 1\right\}$$

Para mim, quanto mais negativo melhor. Então, a jogada para 1 é péssima – eu prefiro deixar $\frac{1}{2}$ que é menor. Assim, considerando que eu jogo da melhor maneira possível, é razoável escrever

$$y = \left\{0|\frac{1}{2}, 1\right\} = \left\{0|\frac{1}{2}\right\}$$

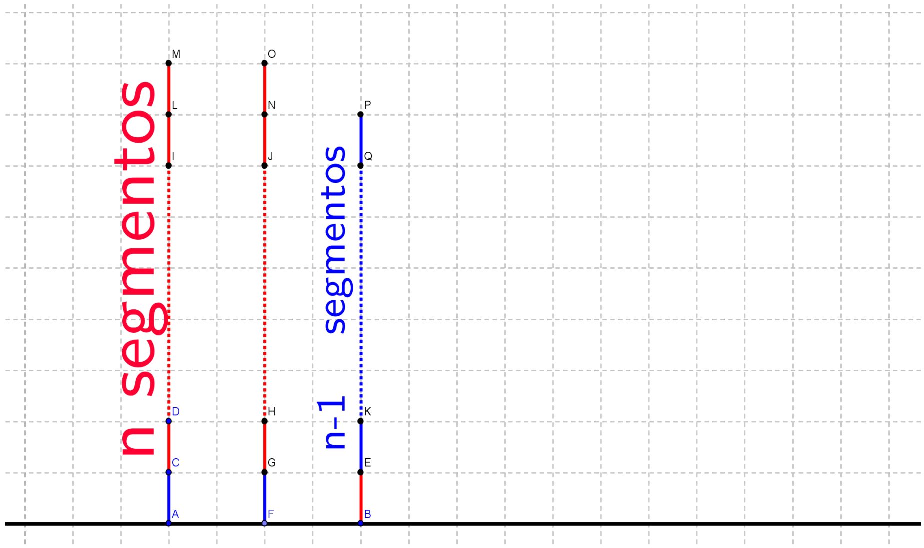
Mas qual será o valor numérico de y? Seria $y = \frac{1}{3}$? Deixamos ao leitor verificar que $y + y - \frac{1}{2} = 0$, isto é, que no jogo a seguir quem começa perde:



Assim, é razoável escrever

$$y = \left\{0 \middle| \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4}$$

Outras frações diádicas (denominadores potências de 2) podem ser obtidas de maneira análoga; com algum trabalho, dá para mostrar que o jogo abaixo vale 0:



Portanto

$$z = \left\{0 \middle| \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = \frac{1}{2^n}$$

Se algum jogador não tiver opção alguma, simplesmente deixamos o seu lado vazio na notação. Então:

$$\begin{aligned}
\{\ |\ \} &= 0 \text{ (se não há aresta alguma, quem começa perde)} \\
\{0|\ \} &= 1 \text{ (jogo com apenas uma aresta azul)} \\
\{\ |0\} &= -1 \text{ (jogo com apenas uma aresta vermelha)} \\
\{0,1|\ \} = \{1|\ \} &= 2 \text{ (jogo com duas arestas azuis empilhadas)} \\
\{1,1|\ \} = \{1|\ \} &= 2 \text{ (jogo com duas arestas azuis lado a lado)}
\end{aligned}$$

Em geral

$$\{n|\ \} = n + 1 \text{ (jogo com } n + 1 \text{ arestas azuis)}$$

Exemplo 2.1 *Se $a < 0 < b$, então*

$$\{a|b\} = 0$$

De fato, se você começa, você deixa a, que por ser negativo é um jogo onde eu ganho. Por outro lado, se eu começo, então eu deixo b, que por ser positivo é bom para você. Em suma, em $\{a|b\}$, quem começa perde! Então, por definição, $\{a|b\}$ é nulo. Em geral, um argumento análogo mostra que se $a_i < 0$ e $b_j > 0$ então

$$\{a_1, a_2, ...|b_1, b_2, ...\} = 0$$

2.2 Troncos e Números Estranhos

Os jogos x, y e z analisados acima são exemplos de "troncos-- pilhas de arestas saindo do solo, sem bifurcações nem voltas. Para não ter que desenhar figuras a todo momento, podemos representar estes troncos pela sequência de cores (L=azuL, R=veRmelho) do solo para o céu. Por exemplo, teríamos $x = LR$, $y = LRR$ e $z = LRRR.....R$. Existe uma regra simples (cuja demonstração requer uma indução criteriosa) para calcular o valor de um tronco finito genérico:

- A sequência inicial de cor constante corresponde a um número inteiro (positivo se for azul, negativo se for vermelho);
- A partir daí, cada aresta vale metade da anterior (positiva se azul, negativa se vermelho).

Some as frações obtidas e você encontrará o valor do seu tronco.
Esta regra fica muito mais clara através de exemplos:

$$\begin{aligned}
L &= 1 \\
LR &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
LRR &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\
LRL &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
LLLLRRLLRL &= 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{219}{64}
\end{aligned}$$

Esta regra vale até para **alguns** troncos infinitos! Por exemplo, pode-se mostrar que

$$LRRLRLRLRLRLRLRL.... = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - ... = \frac{1/2}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3}$$

Note que, apesar do tronco ser infinito, o jogo a ele associado é perfeitamente finito. Afinal de contas, no primeiríssimo lance, um dos jogadores transformará este tronco num tronco finito, e a partir daí o jogo termina em um número finito de lances. É verdade que o número de lances para terminar o jogo pode ser arbitrariamente grande dependendo do primeiro lance, mas o jogo certamente termina em tempo finito.

Mas cuidado! O exemplo do número $\frac{1}{3}$ acima é especial – nem todo tronco infinito pode ser calculado pela regra simples acima. De fato, considere

$$\varepsilon = LRRRRRRR...$$

É fácil ver que

$$\varepsilon = \left\{ 0 | 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^n}, ... \right\} < \frac{1}{2^n}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$$

Mas note que ε é certamente positivo (você certamente ganha)! Mas ao mesmo tempo ε é menor que todos os números reais positivos! Em suma:

$\boxed{\varepsilon \text{ não é um número real!}}$

Ou seja, se a nossa teoria produzir alguma coisa que preste...

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Os números que estamos criando} \\ \text{não são (apenas) os números reais!}\end{array}}$$

Então o que estamos criando?

Capítulo 3

Formalização

3.1 Jogos combinatórios: um grupo abeliano

O susto do final do último capítulo destaca a necessidade de formalizar a Teoria dos Jogos Combinatórios, antes que ela nos leve a alguma contradição[1]. Então vamos voltar ao início, mas agora de maneira formal: o que é um jogo? A definição formal é recursiva:

Definição 3.1 *Um jogo G é um par ordenado da forma* $\left\{G^L|G^R\right\}$ *onde* G^L *e* G^R *são* ***conjuntos*** *de jogos "previamente definidos".*

Intuitivamente, G^L é o conjunto de lances que L pode fazer ao iniciar o jogo, enquanto G^R é o conjunto de lances de R se ele começar.

À primeira vista, pode parecer que esta definição recursiva ainda necessite de alguma espécie de "passo inicial". Mas note – G^L e G^R não são jogos, são conjuntos de jogos! Mesmo que não saibamos o que é um jogo, já está definido um conjunto de jogos, que é o conjunto vazio! Ele será usado para definir os primeiros jogos, os mais simples.

Mais explicitamente, jogos são definidos recursivamente pela definição acima em "gerações":

Primeira Geração:

Como nenhum jogo está definido, a única opção é $G^L = G^R = \emptyset$. Então o jogo primordial é

$$\{\emptyset|\emptyset\}$$

onde nenhum dos jogadores tem lance válido. Denominemos este jogo por 0.

Segunda Geração:

Como já temos um jogo (o 0), temos dois possíveis conjuntos de jogos: $\emptyset$ ou $\{0\}$. Então podemos definir 3 jogos novos

$$\{\{0\}\,|\emptyset\}\,,\ \left\{\emptyset|\,\{0\}\right\}\,,\ \{\{0\}\,|\,\{0\}\}$$

Para evitar a profusão de símbolos e chaves, vamos limpar a notação: trocaremos o conjunto vazio por um espaço em branco, e denotaremos G^L e G^R sem as costumeiras

[1] O leitor que não fizer questão ver detalhes técnicos da teoria pode ir ao próximo capítulo para descobrir vários outros resultados interessantes!

chaves dos conjuntos. Enfim, daremos nomes aos 3 jogos novos: são eles[2]

$$\{0|\ \} = 1$$
$$\{\ |0\} = -1$$
$$\{0|0\} = *$$

Terceira Geração:
Com 4 jogos, podemos criar 16 conjuntos, ou seja, um total de 256 jogos (dos quais 4 já estão acima). Alguns dos 252 jogos novos da terceira geração são[3]:

$$\{0|1\} = \frac{1}{2}$$
$$\{-1|0\} = -\frac{1}{2}$$
$$\{1|\ \} = 2$$
$$\{\ |-1\} = -2$$
$$\{0,*|0,*\} = *2$$
$$\{0|*\} = \uparrow$$

Outra gerações:
Dentre todos os jogos que podem ser criados, destacamos

$$\{n|\ \} = n+1$$
$$\left\{0|\frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$\left\{\frac{k}{2^n}|\frac{k+1}{2^n}\right\} = \frac{2k+1}{2^{n+1}} \text{ para } k \text{ inteiro}$$

Juntando todas as gerações 1, 2, ..., n, ... teremos criado (dentre outros jogos) todas as frações racionais diádicas, isto é, todas as frações cujos denominadores são potências de 2 (inclusive os inteiros). Mas não acaba aqui! Podemos continuar o processo de geração de jogos, agora com conjuntos infinitos em mãos[4]! Alguns dos jogos novos têm nomes especiais:

$$\{0,1,2,3,...|\ \} = \{\mathbb{N}|\ \} = \omega$$
$$\left\{0|1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...,\frac{1}{2^n},...\right\} = \varepsilon$$

Definição 3.2 *O **sinal** de um jogo é definido pelas regras:*
Se existe uma opção em $G^L \geq 0$ e nenhuma opção em $G^R \leq 0$, dizemos que $G > 0$;

[2]O jogo $*$ será concretizado no próximo capítulo. Note que $*$ é difuso!

[3]Note que $*2$ é difuso, mas $\uparrow$ é positivo.

[4]Como o termo "previamente definidos"está vago, a definição acima ainda não é completamente satisfatória. A definição recursiva mais formal seria: um jogo G é um par ordenado $\{G^L|G^R\}$ de conjuntos de jogos tais que não existe uma sequência $G_i = \{G_i^L|G_i^R\}$ com $G^{i+1} \in G_i^L \cup G_i^R$ para $i = 1,2,3,4,....$ Ou seja, o que estamos evitando é que o jogo G tenha uma sequência infinita de lances válidos (mesmo que não sejam alternados entre L e R). Agora, nada impede que G^L ou G^R sejam infinitos (um número de opções infinito em um lance)!

Se nenhuma opção em $G^L \geq 0$ e existe uma opção em $G^R \leq 0$, dizemos que $G < 0$;
Se nenhuma opção em $G^L \geq 0$ ou nenhuma opção em $G^R \leq 0$, dizemos que $G = 0$;
Se existe uma opção em $G^L \geq 0$ e existe uma opção em $G^R \leq 0$, dizemos que $G \parallel 0$.

Traduza a primeira linha: se você tem uma jogada que deixa um jogo positivo (bom para você, independentemente de quem joga a seguir) ou nulo (0 ="quem começa perde", e como eu que jogo agora, agora eu começo, então eu perco!), enquanto eu não consigo deixar negativo nem zero para você, então o jogo é seu (positivo). As outras definições são análogas.

Esta definição é recursiva! Para começar, note que $\{\ |\ \} = 0$ (justificando a notação anterior[5]), já que não há opções em G^L ou G^R satisfazendo coisa alguma. Agora, $\{0|\ \}$ é positivo, pois há uma opção para L que é ≥ 0, mas R não tem opções.

Enfim, cuidado: há 4 opções de "sinal". Assim, a negação de $G \geq 0$ é "$G < 0$ ou $G \parallel 0$", que será escrito $G \lhd 0$. Analogamente, a negação de $G > 0$ será escrita $G \trianglelefteq 0$. A tabela a seguir decifra alguns desses símbolos (sempre supondo que os jogadores jogam da melhor maneira possível):

- $G > 0$ significa que L ganha;
- $G \geq 0$ significa que L ganha se R começar o jogo (não há opção ≤ 0 em G^R);
- $G \rhd 0$ significa que L ganha se L começar o jogo (há opção ≥ 0 em G^L).

Definição 3.3 *O **negativo** de um jogo G é o jogo obtido trocando os papéis de L e R. Formalmente:*

$$G = \left\{G^L|G^R\right\} \Rightarrow -G = \left\{-G^R|-G^L\right\}$$

onde usamos $-G^L$ para indicar o conjunto dos negativos de todos os jogos em G^L (idem para G^R).

Mais uma definição recursiva! Por exemplo $0 = \{|\}$ é seu próprio negativo, já que não há jogo algum para inverter em G^L ou G^R. Agora:

$$1 = \{0|\ \} \Rightarrow -1 = \{\ |-0\} = \{\ |0\}$$

justificando mais um pouco da notação acima.

Definição 3.4 *A **soma** de dois jogos G e H é o jogo $G + H$; nele, um lance válido é escolher uma das componentes (a de G ou a de H) e realizar um lance válido nela. Formalmente[6]:*

$$\left.\begin{array}{l} G = \left\{G^L|G^R\right\} \\ H = \left\{H^L|H^R\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow G + H = \left\{G^L + H, G + H^L|G^R + H, G + H^R\right\}$$

[5]Há uma pequena confusão na notação: uma coisa é dizer que G é um jogo nulo ($G = 0$), como na definição do sinal acima. Outra coisa é **o** jogo nulo $\{|\}$, que por vezes é denotado por 0. Em breve, colocaremos todos os jogos nulos numa única classe de equivalência, resolvendo este problema.

[6]Note o abuso de notação que será adotado daqui por diante: G^L é um conjunto, enquanto H é um jogo. Por $G^L + H$, queremos dizer o conjunto de todas as somas onde uma parcela da soma está em G^L e a outra é H. Em geral, operações feitas com conjuntos são aplicadas a cada elemento do conjunto.

Note novamente como a soma $G+H$ é definida recursivamente em termos de somas mais "simples". Em geral, dados n jogos $G_1, G_2, ..., G_n$, a sua soma é o jogo onde, a cada lance, um jogador escolhe uma das componentes e faz um lance nela. É fácil ver que esta soma é comutativa e associativa, que o jogo nulo $\{|\} = 0$ funciona como elemento neutro, que $-(-G) = G$ e que $-(G+H) = (-G) + (-H)$. Por exemplo, a propriedade do elemento neutro é demonstrada assim

$$G + 0 = \left\{G^L + 0 | G^R + 0\right\}$$

pois não há elementos em H^L nem em H^R. Agora, por indução, $G^L + 0 = G^L$ e $G^R + 0 = G^R$, portanto $G + 0 = G$.

A proposição a seguir serve para o leitor se acostumar com a definição de soma e ter o que contar para seus familiares:

Proposição 3.5 $1+1=2$. *Mais ainda,* $2+1=3$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} 1+1 &= \{0|\} + \{0|\} = \{0+1, 1+0|\} = \{1|\} = 2 \\ 2+1 &= \{1|\} + \{0|\} = \{1+1, 2+0|\} = \{2|\} = 3 \end{aligned}$$

□

Analogamente, mostra-se que $n+1 = n+1$ (onde a soma da esquerda é a dos jogos, e a da direita é a dos naturais).

Definição 3.6 *Dados dois jogos G e H, definimos sua* ***subtração*** $G - H = G + (-H)$.

Definição 3.7 *Definimos*

$$\begin{aligned} G = H &\iff G - H = 0 \\ G > H &\iff G - H > 0 \\ G < H &\iff G - H < 0 \\ G \parallel H &\iff G - H \parallel 0 \end{aligned}$$

Proposição 3.8 *Esta igualdade é de fato uma relação de equivalência.*

Deixamos esta demonstração ao leitor. Por exemplo, por que vale $G = G$, isto é, $G + (-G) = 0$? O argumento informal é a simetria que usamos no início do capítulo anterior: o segundo jogador tem uma estratégia vencedora (basta que ele repita o que o primeiro jogador faz na outra componente do jogo, mantendo as duas componentes como o negativo uma da outra, até o fim). Note-se que, para que este argumento valha, a Regra Normal ("quem não tem jogada válida perde") é essencial.

Proposição 3.9 *Temos*

$$\begin{aligned} G \geq 0 \text{ e } H \geq 0 &\Rightarrow G + H \geq 0 \\ G \geq 0 \text{ e } H \rhd 0 &\Rightarrow G + H \rhd 0 \end{aligned}$$

e afirmações análogas com ≤ 0. Em particular[7],

$$G \geq 0 \text{ e } H > 0 \Rightarrow G + H > 0$$

Demonstração: As duas primeiras proposições devem ser demonstradas juntas, recursivamente. Para a primeira, note que, como $G \geq 0$ e $H \geq 0$, não há opções ≤ 0 em G^R ou H^R, isto é[8], $G^R \rhd 0$ e $H^R \rhd 0$. Então da segunda proposição (aplicada a jogos mais simples!) $G + H^R \rhd 0$ e $G^R + H \rhd 0$. Como estas são as opções de $(G+H)^R$, vemos que $G + H \geq 0$. Para a segunda, como $H \rhd 0$, temos uma opção em $H^L \geq 0$. Portanto, usando a primeira proposição (com jogos mais simples!), vem uma opção $G + H^L \geq 0$, e portanto $G + H \rhd 0$. □

Informalmente:

- Suponha $G \geq 0$ e $H \geq 0$. Isto significa que, se eu começar o jogo G, você sabe responder de maneira a vencê-lo, e se eu começar H, você sabe responder para vencê-lo. Suponha que eu começo $G + H$. Cada vez que eu mexer em uma componente, o seu "livro de estratégias vencedoras"diz o que você deve fazer para continuar vencendo naquela componente – faça-o! Em algum momento, eu não terei mais movimentos em uma das componentes (digamos, na de G), e vamos continuar mexendo em H, até que eu fique sem movimentos lá também. Viu, se eu começar, você vai vencer!

- Se $G \geq 0$ e $H \rhd 0$, você sabe como vencer G se eu começar, e como vencer H se você começar. Agora vamos falar de $G + H$, onde você começa. Ora, você escolhe começar em H, com o lance lá vencedor! Daqui para a frente, cada vez que eu jogar em G você responde com o lance lá vencedor, e se eu responder em H você continua com a estratégia que vence H. De novo, você vai vencer. Em suma, se você começar $G + H$ você vence, isto é, $G + H \rhd 0$.

Corolário 3.10 *Se $G = 0$ então $G + H$ tem o mesmo sinal de H.*

Demonstração: Se $G = 0$, usando a proposição acima temos

$$\begin{aligned}
H \geq 0 &\Rightarrow G + H \geq 0 \\
H \leq 0 &\Rightarrow G + H \leq 0 \\
H \rhd 0 &\Rightarrow G + H \rhd 0 \\
H \lhd 0 &\Rightarrow G + H \lhd 0
\end{aligned}$$

Linhas 1 e 2 mostram que $H = 0 \Rightarrow G + H = 0$; linhas 1 e 3 mostram que $H > 0 \Rightarrow G + H > 0$. Linhas 2 e 4 mostram que $H < 0 \Rightarrow G + H < 0$. Enfim, linhas 3 e 4 mostram que $H \parallel 0 \Rightarrow G + H \parallel 0$. □

[7]Vale a pena notar que $* = \{0|0\} \parallel 0$ enquanto $\uparrow = \{0|*\} > 0$ (você vê o porquê?). No entanto, $* + \uparrow \parallel 0$ (se você começar, leve $*$ para 0; eu tenho que levar $\uparrow$ para $*$, você leva esse $*$ para 0 e vence); se eu começar, eu levo $\uparrow$ para $*$ e o jogo fica simétrico, então você perde). Ou seja, $G > 0$ e $H \parallel 0 \not\Rightarrow G + H > 0$.

[8]O abuso de notação continua: G^L é um conjunto! Escrevendo $G^L > 0$, queremos dizer que **todas** as opções em G^L são > 0. Faremos este abuso para qualquer relação unária ou binária.

Corolário 3.11 *A soma respeita a relação de equivalência e a ordem:*

$$\begin{aligned} G = H &\Rightarrow G + K = H + K \\ G > H &\Rightarrow G + K > H + K \\ G < H &\Rightarrow G + K < H + K \\ G \parallel H &\Rightarrow G + K \parallel H + K \end{aligned}$$

Demonstração: De fato, $(G+K)-(H+K) = (G-H)+(K-K) = (G-H)+0$ tem o mesmo sinal de $G - H$. □

Para referência futura, note que:

Proposição 3.12 *Se* $G = \left\{G^L|G^R\right\}$*, então* $G^L \lhd G \lhd G^R$.

Demonstração: De fato, seja H uma das opções em G^L Então[9]

$$G - H = \left\{G^L - H, G - H^R | G^R - H, G - H^L\right\}$$

onde uma das opções do jogador L é $H - H = 0$ Portanto, por definição, $G - H \rhd 0$. Como isto vale para qualquer H em G^L, escrevemos $G^L \lhd G$. A outra afirmação é análoga. □

Juntando tudo o que fizemos, temos

Teorema 3.13 *Com esta soma, as classes de equivalência dos jogos formam um grupo abeliano, cujo elemento neutro é o conjunto dos jogos nulos.*

3.2 Números Surreais e a Regra da Simplicidade

Vamos limitar um pouco o escopo dos nossos jogos. Para variar, temos mais uma definição recursiva:

Definição 3.14 *Um* ***número*** *é um jogo* $G = \left\{G^L|G^R\right\}$ *onde* $G^L < G^R$ *são conjuntos previamente definidos de números (isto é,* ***todas*** *as opções em* G^L *são menores que* ***todas*** *as de* G^R*).*

Já vimos alguns exemplos de números, como $0 = \{|\}, 1 = \{0|\}, 2 = \{1|\}, \frac{1}{2} = \{0|1\}$ e até mesmo $\omega = \{\mathbb{N}|\}$ e $\varepsilon = \left\{0|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. É comum chamar os números assim obtidos por **números surreais**[10] (pode-se mostrar que, num certo sentido, ele contém os números reais). Não são números objetos como $* = \{0|0\}$ e $\uparrow = \{0|*\}$.

No caso em que G^L e G^R são conjuntos finitos de frações diádicas, pode-se mostrar que G também é uma fração diádica. De fato, temos:

[9] Lembre que $-H = \left\{-H^R| - H^L\right\}$ – então é H^R à esquerda mesmo!

[10] De fato, é possível dar uma estrutura de corpo aos números surreais, usando a multiplicação

$$GH = \left\{G^L H + GH^L - G^L H^L, G^R H + GH^R - G^R H^R | G^L H + GH^R - G^L H^R, G^R H + GH^L - G^R H^L\right\}$$

mas não adentraremos este assunto aqui. Apenas citamos que esta multiplicação coincide com a dos números reais quando G e H são reais, mas inclui outros números também. Por exemplo, pode-se mostrar que $\varepsilon\omega = 1$, isto é, $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$.

Teorema 3.15 (Regra da Simplicidade) *Se $a < b$ são frações diádicas, então $G = \{a|b\}$ é o número diádico mais simples (isto é, de menor geração) entre a e b.*

Antes de esboçar uma demonstração, vamos interpretar esta regra:

- Se $a < 0 < b$, então $G = 0$; senão...
- Se há números inteiros n satisfazendo $a < n < b$, então G é, deles, o mais próximo de 0 (se há números positivos e negativos satisfazendo a desigualdade, você deveria ter parado no passo anterior!); senão...
- Se há alguma fração irredutível x de denominador 2 satisfazendo $a < x < b$, então $G = x$ (se houver duas frações, então há um número inteiro e você deveria ter parado no passo anterior).
- Se há alguma fração irredutível x de denominador 4 satisfazendo $a < x < b$, então $G = x$ (se houver duas delas, então haverá uma de denominador simples ou um inteiro, e você não deveria estar aqui); senão...
- ...

Então, "mais simples"significa de denominador (potência de 2) menor possível – e, no caso dos inteiros, o inteiro mais próximo de 0 possível. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\{2|7\} &= 3 \\
\{2|3\} &= \frac{5}{2} \\
\left\{\frac{5}{2}|\frac{13}{4}\right\} &= \left\{\frac{10}{4}|\frac{13}{4}\right\} = \frac{12}{4} = 3 \\
\left\{\frac{5}{2}|3\right\} &= \left\{\frac{10}{4}|\frac{12}{4}\right\} = \frac{11}{4} \\
\left\{\frac{5}{2}|\frac{11}{4}\right\} &= \left\{\frac{20}{8}|\frac{22}{8}\right\} = \frac{21}{8}
\end{aligned}$$

Agora podemos calcular algumas somas simples de maneira formal e completa[11]:

$$\begin{aligned}
1 + (-1) &= \{0|\} + \{|0\} = \{0 + (-1)\,|1 + 0\} = \{-1|1\} = 0 \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= \{0|1\} + \{0|1\} = \left\{0 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 0|\frac{1}{2} + 1, 1 + \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}|\frac{3}{2}\right\} = 1 \\
\frac{1}{2} + 1 &= \{0|1\} + \{0|\} = \left\{0 + 1, \frac{1}{2} + 0|1 + 1\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}|2\right\} = \{1|2\} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Esboço da Demonstração:

- Se $a < 0 < b$, o teorema é trivial.

[11] Formalmente, teríamos ainda que justificar a eliminação de opções "dominadas"nas contas a seguir, e a substituição de jogos por seus valores dentro das chaves. O leitor interessado, veja [4] ou [2].

- Se $0 \leq a < 1 < b$, claramente $G > 0$, e:

$$G - 1 = \{a|b\} - \{0|\} = \{a-1|b-1, G-0\} = \{-|+,+\} = 0 \Rightarrow G = 1$$

- Se $n-1 \leq a < n < b$ para algum n inteiro positivo, vê-se que $G > 0$. Mais ainda, temos

$$G - n = \{a|b\} - \{n-1|\} = \{a-n|b-n, G-(n-1)\} = \{-|+, G-(n-1)\}$$

Como $a - n < 0$ e $b - n > 0$, então basta mostrar que $G - (n-1) > 0$ para concluir que $G - n = 0$. Mas

$$G - (n-1) = \{a-(n-1)\,|b-(n-1)\,, G-(n-2)\} = \{\geq 0|+, G-(n-2)\}$$

ou seja, basta mostrar que $G - (n-2) > 0$, e assim sucessivamente, até chegarmos a $G - 0 > 0$, que é verdadeiro. Portanto, $G = n$.

- Em geral, suponha que x é o número diádico mais simples que satisfaz $0 < a < x < b$. Escreva $x = \left\{x^L|x^R\right\}$ onde x^L e x^R são os números diádicos mais simples do que x imediatamente à sua esquerda e à sua direita[12]. Então $x^L \leq a < x < b \leq x^R$, e

$$G - x = \left\{a - x, G - x^R | b - x, G - x^L\right\}$$

Para mostrar que $G - x = 0$, como $a - x^R < 0$ e $b - x^L > 0$, basta mostrar que $G - x^R < 0$ (se x^R não for vazio) e $G - x^L > 0$ (se x^L não for vazio). Considere $G - x^R$: R claramente tem um movimento vencedor (que é mover para $b - x^R \leq 0$; então falta ver que L não tem boas opções; de fato, as opções de L são $a - x^R < 0$ e $G - x^{RR}$, que, se existir, precisa ser analisada (note que $x^{RR} > x^R$). Considere $G - x^{RR}$: R claramente tem um movimento vencedor para $b - x^{RR} < b - x^R \leq 0$, enquanto L tem uma opção ruim em $a - x^{RR} < a - x^R < 0$ e talvez uma opção $G - x^{RRR}$. Então basta mostrar que $G - x^{RRR} < 0$.... bom, continuando assim, temos uma sequência de movimentos que satisfaz $a < x < b \leq x^R < x^{RR} < x^{RRR} < x^{RRRR} < ... < x^{RRR....R} = \emptyset$. Quando finalmente chegarmos em $\emptyset$, a opção $G - x^{RRR...R}$ não precisa ser analisada, e acabou – mostramos que $G - x^R < 0$. A demonstração em $G - x^L$ é análoga.

□

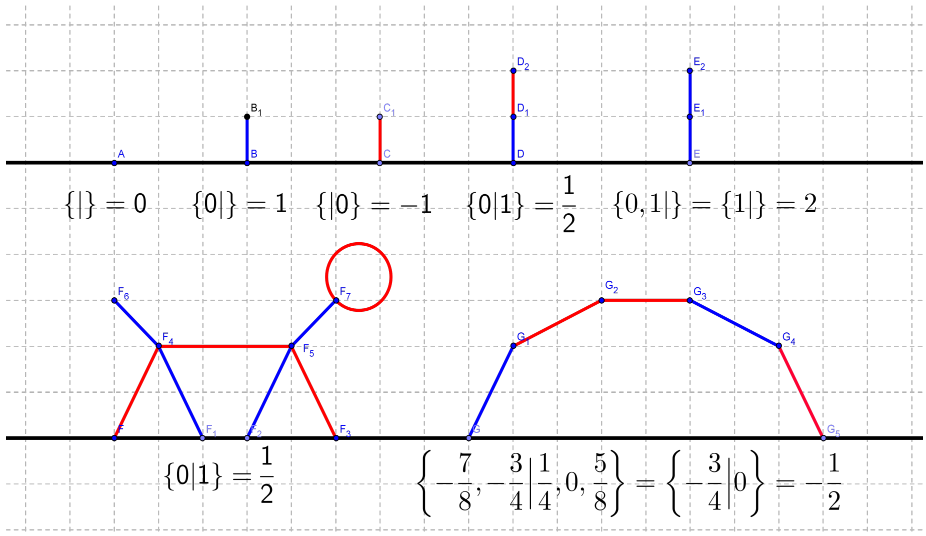
O Teorema acima pode ser generalizado na seguinte afirmação:

Proposição 3.16 *Se $G = \left\{G^L|G^R\right\}$ é um número, então $G^L < G < G^R$. Se G^L e G^R são finitos, então G é o número diádico mais simples (isto é, de menor geração) entre G^L e G^R.*

Demonstração: Veja [4]. □

Com esta regra, a regra do cálculo de troncos e alguma intuição, algumas posições mais complicadas de Hackenbush podem ser resolvidas:

[12] Escrevendo $x = \frac{2k+1}{2^n}$ teríamos $x^L = \frac{2k}{2^n} = \frac{k}{2^{n-1}}$ e $x^R = \frac{2k+2}{2^n} = \frac{k+1}{2^{n-1}}$. Por exemplo, se $x = \frac{25}{4}$, teríamos $x^L = \frac{24}{4} = 6$ e $x^R = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$. Note que estamos aqui supondo que a igualdade $\frac{2k+1}{2^n} = \left\{\frac{2k}{2^n}|\frac{2k+2}{2^n}\right\}$ já foi previamente demonstrada!



As posições da primeira linha são simples e já as tínhamos analisado. Para o "cachorrinho", observe que minha única aresta a perigo é a cabeça – então, se eu começar, é claro que eu vou retirá-la. Analogamente, se você começar, retire o pescoço para apagar a minha cabeça – qualquer outra opção não lhe traz vantagem alguma. Realizado este primeiro movimento, todas as arestas estarão conectadas ao solo por arestas da mesma cor, então trata-se apenas de somar as azuis e subtrair as vermelhas.

Quanto à "ponte", analisamos as suas duas opções e as minhas três, calculando os troncos que sobram em cada situação. Então esta ponte é negativa, e se eu começar minha única boa opção é retirar a aresta do meio e deixar 0. Você não tem como vencer, mas seu lance "menos negativo"é retirar a aresta da direita.

Um comentário final: pode-se demonstrar que todo jogo de Hackenbush é um número – não o faremos aqui.

3.3 0,999999...=1?

Antes de começar esta seção: nos números reais, $0,9999.... = 1$. Igual a 1. Idêntico a 1. Sem diferença alguma. São duas representações distintas do mesmíssimo número, a saber, o número 1. Ok? Analogamente, em base 2, temos $(0,1111111...)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1$. Sem dúvida.

Agora considere em Hackenbush o tronco infinito $LRLLLLLLLLLLLLLLL....$ Qual o seu valor x?

Estendendo a regra de avaliação de troncos, parece natural escrever

$$x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = (0,11111....)_2$$

No entanto, note que $x - 1 < 0$, isto é, no jogo $LRLLLL.... + R$, certamente eu vou vencer! Confira:

- Se você começar, você retira uma das arsetas L, e eu retiro a R do lado esquerdo. Então você retira a última L, eu retiro a última R, eu ganhei.

- Se eu começar, eu retiro aquela R, e a gente volta ao caso anterior. Eu ganho de novo!

Então nos números surreais há uma maneira de definir um objeto "análogo"ao nosso $0,999999....$ mas que não vale 1!

Melhor ainda, note que não há uma real necessidade de falar de objetos infinitos para definir este tronco. Podemos mudar as regras da seguinte forma: além das arestas usuais L e R, temos novos tipos de arestas denotadas (L) e (R). O efeito de uma aresta azul (L) é que você pode, em seu lance, trocá-la por um número finito arbitrário de arestas L empilhadas, inclusive 0 (idem para (R)). Então, com esta notação, considere o jogo

$$LR\,(L)$$

que é perfeitamente finito em sua descrição. Na sua primeira jogada, você pode trocar aquele (L) por uma fileira $LLL....L$ com quantos L você quiser. Mas este é exatamente o jogo x acima!

Exercise 3.17 *Demonstre que* $x = 1 - \varepsilon$.

Podemos ir ainda mais longe e criar jogos como $LR\,(L)\,R$, que é uma espécie[13] de "$0,9999....5$ com infinitos 9". Esta ideia, que é totalmente absurda dentre os números reais, faz sentido no contexto dos surreais – mas apenas com a interpretação correta.

É curioso notar que $y = LRRLRLRLRLRLRL... = \frac{1}{3}$ exatamente, ou seja, pode-se mostrar que $3y = 1$ (e nao $3y = 0,99999.... = x$).

[13] Uma analogia melhor seria $(0.11111...0)_2$.

Capítulo 4

Jogos Imparciais

Neste capítulo, analisaremos Jogos Imparciais – isto é, jogos onde não há distinção entre os jogadores L e R. Uma definição formal recursiva seria:

Definição 4.1 *Um **jogo imparcial** $G = \left\{G^L | G^R\right\}$ é um jogo onde $G^L = G^R$ é um conjunto de jogos imparciais (previamente definidos).*

Assim, num jogo imparcial, não há vantagem intrínseca para L ou R – o vencedor será determinado apenas por quem começa. Em suma, se G é imparcial, então $G = 0$ (quem começa perde) ou $G \parallel 0$ (quem começa ganha). Isto significa que (exceto por jogos nulos) jogos imparciais não podem ser números.

É importante ressaltar: **para vencer um jogo imparcial, você tem que deixar, a cada movimento, um jogo nulo para o seu adversário**.

Antes de continuar, vamos apresentar um jogo imparcial que serve de modelo para todos os outros.

4.1 Nim e Nímeros

O jogo de desmata-mata verde (*Green Hackenbush*) é idêntico ao Hackenbush já definido, mas todas as arestas são verdes e podem ser retiradas por qualquer um dos dois jogadores. Isto faz com que tais jogos sejam imparciais, já que a cada momento os mesmos lances estão disponíveis a ambos os jogadores.

Se as árvores de um tal jogo são todas troncos, este jogo é idêntico ao jogo de Nim (Generalizado) apresentado no início deste texto – escolher que aresta retirar de um tronco equivale a escolher quantos palitos retirar de uma pilha. No resto desta seção, continuaremos analisando apenas jogos do tipo Nim – em breve veremos que nada se perde com esta abordagem.

O jogo de Nim mais simples possível é o jogo nulo $0 = \{|\}$, que já conhecemos. O próximo jogo mais simples é um tronco com apenas uma aresta verde; analisando as opções de ambos os jogadores, vemos que ele vale $\{0|0\}$. Denotemos este jogo por $*$ ou $*1$. Em geral, denotemos um tronco verde com n arestas pelo símbolo $*n$. Uma definição mais formal seria:

Definição 4.2 *O **nímero** $*n$ é*

$$*n = \{0, *1, *2, ..., *(n-1) \mid 0, *1, *2, ... *(n-1)\}$$

Repare que esta definição respeita as regras do Nim – uma pilha de n palitos pode ser transformada em uma pilha com $0, 1, 2, ...$ ou $n-1$ palitos, por qualquer um dos jogadores.

Onde estão os nímeros na reta real? Note que

$$\frac{-1}{2^m} < *n < \frac{1}{2^m}$$

para quaisquer m e n naturais! De fato, considere o jogo

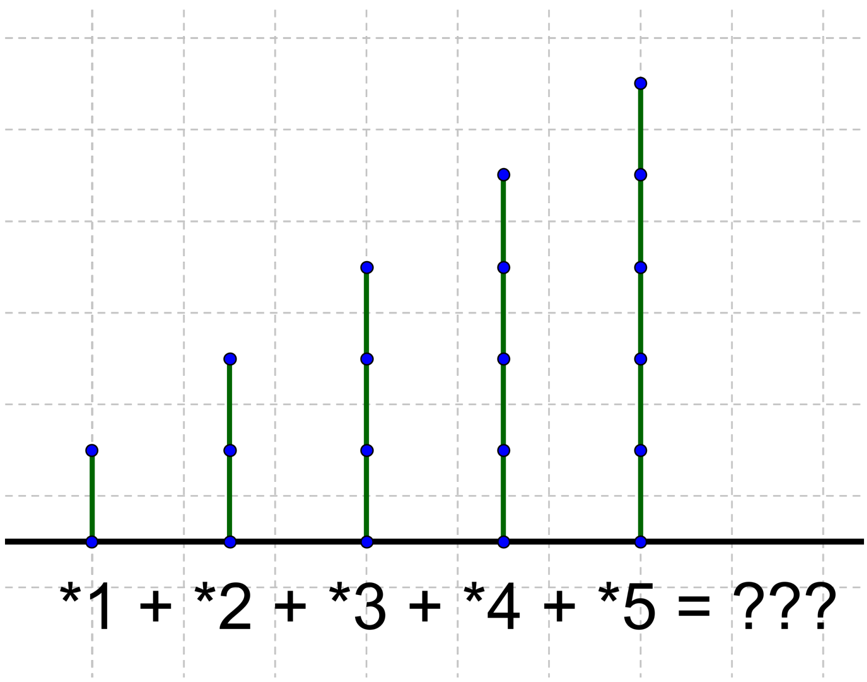
$$*n + \frac{1}{2^m} = *n + LRRRRR....R$$

Neste jogo, claramente L tem uma estratégia vencedora, independentemente de quem começar – na sua vez, se não houver palitos verdes L retira seu único palito e vence; por outro lado, se houver palitos verdes, L os retira todos, e, na próxima rodada, retira o palito L e vence. Assim, $*n + \frac{1}{2^m} > 0$. Analogamente, mostra-se que $*n - \frac{1}{2^m} < 0$, justificando a nossa afirmação.

Mas claramente $*n \neq 0$ (pois em $*n$ quem começa ganha!). Então $*n$ não pode estar na reta real! Isto era esperado, já que $*n$ não é um número (note que $*n \parallel 0$)! A imagem mental é que $*n$ estaria imediatamente **acima** de 0 na reta real (que se supõe horizontal nesta imagem mental).

Estamos agora prontos para re-enunciar as questões sobre Nim no início do texto. Por exemplo, no Nim simples, ao invés de perguntar se o primeiro jogador tem um estratégia vencedora, a pergunta passa a ser:

$$\boxed{\text{Quanto vale } G = *1 + *2 + *3 + *4 + *5?}$$



Se a resposta for $G = 0$, então o primeiro jogador vai perder. Se a resposta não for 0, isto é, se for $G \parallel 0$, então o primeiro jogador deve ter uma estratégia vencedora. Em suma, precisamos aprender agora a **somar nímeros**!

4.2 Aprendendo a Somar Nímeros

A primeira regra para somar nímeros é bastante simples:

Proposição 4.3 *Se G é imparcial, então*

$$G + G = 0$$

Demonstração: Basta notar que, se G é imparcial, então, por simetria, $-G = G$. $\square$

Assim, a primeira regra da soma nimérica é

$$*n + *n = 0$$

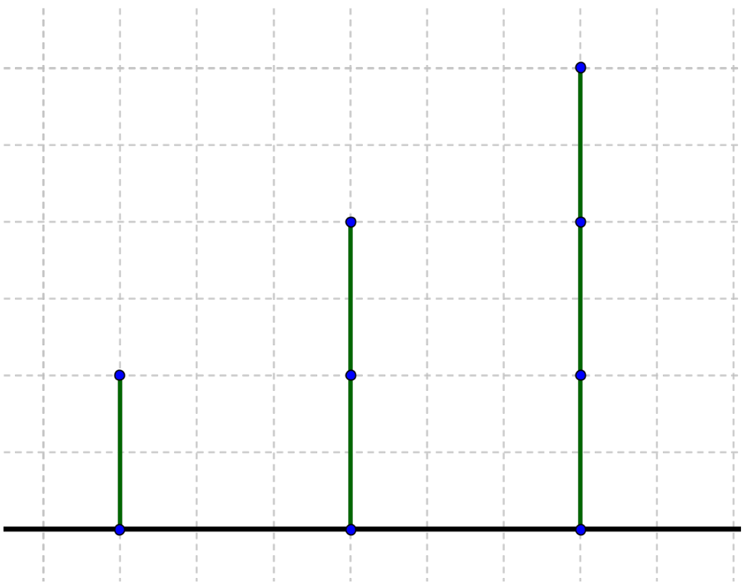
De quebra, isto mostra que $*m \neq *n$ para todo $m > n$ (o que justifica a nossa criação de nomes distintos para plhas de palitos distintas). De fato, se fosse $*m = *n$, teríamos $*m + *n = 0$. Mas isto é absurdo, pois no jogo $*m + *n$ o primeiro jogador claramente tem uma estratégia vencedora – basta ele reduzir a pilha de m para n palitos, deixando $*n + *n = 0$ para o segundo jogador.

A próxima soma mais complicada seria $*1 + *2$... Temos:

Proposição 4.4

$$*1 + *2 = *3$$

Demonstração: Para mostrar que um jogo G vale $*n$, basta mostrar que $G + *n = 0$ (pois $*n$ é seu próprio negativo!). Assim, a pergunta passa a ser: no jogo a seguir, quem começa perde?



Então suponha que você começa, vamos mostrar que você perde. Você tem 6 opções:

- Se você retira $*1$, eu reduzo $*3$ para $*2$ e deixo $*2 + *2 = 0$. Você perde.
- Se você retira $*2$, eu reduzo $*3$ para $*1$ e deixo $*1 + *1 = 0$. Você perde.

- Se você baixa $*2$ para $*1$, eu retiro $*3$ e deixo $*1 + *1 = 0$. Você perde.
- Se você retira $*3$, eu reduzo $*2$ para $*1$ e deixo $*1 + *1 = 0$. Você perde.
- Se você baixa $*3$ para $*2$, eu retiro $*1$ e deixo $*2 + *2 = 0$. Você perde.
- Se você baixa $*3$ para $*1$, eu retiro $*2$ e deixo $*1 + *1 = 0$. Você perde.

Em suma, seja qual for o seu primeiro lance, você perde. Assim, $*1 + *2 + *3 = 0$.
□

A próxima pergunta é, quanto vale $*1 + *3$? Ora, já sabemos a resposta! Basta somar $*2$ a ambos os lados de $*1 + *2 + *3 = 0$, usar que $*2 + *2 = 0$ e chegar a

$$*1 + *3 = *2$$

Analogamente

$$*2 + *3 = *1$$

Agora, quanto vale $*1 + *4$? Deixamos ao leitor provar que:

Proposição 4.5

$$*1 + *4 + *5 = 0$$

e, portanto

$$\begin{aligned} *1 + *4 &= *5 \\ *1 + *5 &= *4 \\ *4 + *5 &= *1 \end{aligned}$$

Aqui estão outras somas simples que são bons exercícios antes do teorema geral:

Proposição 4.6

$$\begin{aligned} *2 + *4 + *6 &= 0 \\ *2 + *5 + *7 &= 0 \end{aligned}$$

Qual é o padrão? O Teorema a seguir resume as proposições acima

Teorema 4.7 *Se x_1, x_2, ..., x_n são potências de 2 distintas, então*

$$*x_1 + *x_2 + ... + *x_n = *(x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

Antes de prová-lo, note que este teorema mais o fato de que cada nímero é o seu próprio negativo nos permite realizar quaisquer somas niméricas – basta escrever os nímeros envolvidos em base 2! Por exemplo, o Nim simplificado passa a ser

$$\begin{aligned} *1 + *2 + *3 + *4 + *5 = & \\ &= *1 + *2 + (*1 + *2) + *4 + (*1 + *4) = \\ &= *1 \end{aligned}$$

onde cancelamos duplas repetidas no último passo[1]. Assim, no Nim simplificado, quem começa ganha!

Melhor ainda, se você começar o jogo, você sabe o que tem que fazer para vencer – você tem que retirar $*1$ de alguma pilha. Assim, há três lances vencedores no início: (i) trocar $*1$ por 0 na primeira pilha; (ii) trocar $*3$ por $*2$ na terceira pilha ou (iii) trocar $*5$ por $*4$ na última pilha. Qualquer um desses lances deixa 0 para o segundo jogador, que portanto perderá!

Demonstração: A demonstração é por indução em $N = x_1 + x_2 + ... + x_n$ (sendo o passo inicial a afirmação $*1 = *1$). Então, suponha que a afirmação acima é válida para quaisquer potências de 2 cuja soma seja menor ou igual a $N - 1$. Vamos agora mostrar que

$$*x_1 + *x_2 + ... + *x_n + *N = 0$$

Suponha que você começa. Digamos que você resolve reduzir alguma das potências de 2 (digamos, sem perda de generalidade, que ela seja $*x_1$, que você reduziu para $*x_0$). Então eu calculo $*x_0 + *x_2 + ... + *x_n$ usando o método acima – note que vou ter que abrir x_0 em potências de 2, alguma das quais podem até cancelar com as outras $*x_i$. Mas, felizmente, como $*x_1$ era uma potência de 2, a soma das potências de 2 que constitui x_0 será menor que x_1, e portanto $*x_0 + *x_2 + ... + *x_n = *a$ para algum $a < N$. Então eu posso reduzir $*N$ para $*a$ e deixar $*a + *a = 0$ para você – você perde.

Por outro lado, você pode decidir reduzir $*N$ para algum número menor, digamos, $*a$. Suponha aqui que as potências x_i estejam em ordem crescente. Escrevendo ambos $*N$ e $*a$ em base 2, como $a < N$, haverá uma maior potência x_j que estará em N mas não em a. Agora, eu posso calcular $*b = \sum_{i \neq j} *x_i + *a$ usando os métodos acima; todas as potências maiores que x_j aparecem duas vezes e se cancelam; e $*x_j$ não está nem no somatório nem em $*a$. Assim, $b < N$ (justificando o uso da indução) e $b < x_n$ (pois na soma que cria $*b$ há apenas potências de 2 menores que x_n). Então eu posso trocar $*x_n$ por $*b$ e deixar para você $\sum_{i \neq j} *x_i + *b + *a = 0$, e você perde! □

Em suma, o grupo abeliano dos nímeros é, de fato, uma cópia de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times ...$ – basta trocar $*n$ pela lista de dígitos na representação de n em base 2.

4.3 Princípio do Menos Excluído

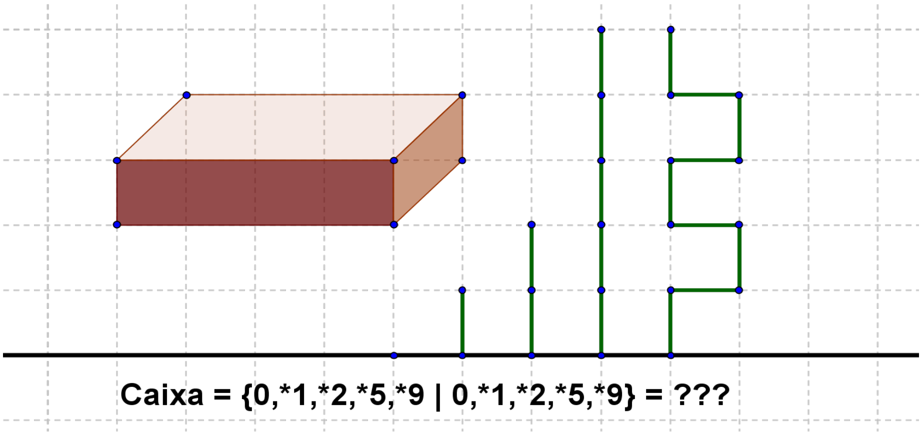
Mas, a priori, nem todo jogo imparcial pode ser interpretado como uma pilha de palitos em Nim. Por exemplo, o que podemos dizer sobre o jogo

$$G = \{0, *1, *2, *5, *9\}$$

(onde, em se tratando de jogos imparciais, estamos escrevendo apenas um dos dois lados idênticos da barra vertical para economizar tinta)?

Pensemos neste jogo G como uma caixa mágica de palitos, que você pode colocar ao lado das pilhas de palitos do Nim usual. A ideia é que, no seu lance, o jogador pode trocar esta caixa G por uma pilha com 0, 1, 2, 5 ou 9 palitos. A figura abaixo mostra a caixa e as 5 possibilidades pelas quais a caixa pode ser trocada.

[1]Alternativamente, somar nímeros significa escrevê-los em base 2 e somá-los dígito a dígito, ignorando quaisquer "vai-um"das somas. Em outras palavras, escreva-os em base 2 e faça um *XOR* lógico entre os números obtidos.



Será que esta caixa é um dos números anteriores? Como sempre, para verificar se $G = *n$, verificamos se $G + *n = 0$.

Claramente, não é $G = 0$, pois, estando a caixa sozinha, você pode trocá-la por 0 palitos e vencer o jogo.

Também não é $G = *1$. Afinal, em $G + *1$, você pode trocar G por $*1$ e deixar $*1 + *1 = 0$ para o próximo jogador.

Analogamente, não é $G = *2$ pois, você pode vencer trocando $G + *2$ por $*2 + *2 = 0$.

Seria $G = *3$? Considere então o jogo $G + *3$. Você começa:

- Se você trocar G por 0, $*1$ ou $*2$, eu troco $*3$ pelo mesmo número e deixo 0. Você perde;

- Se você trocar $*3$ por 0, $*1$ ou $*2$ eu troco G pelo mesmo número e deixo 0. Você perde;

- Enfim, se você trocar G por $*5$ ou $*9$, eu troco esta pilha para $*3$ e deixo $*3 + *3 = 0$. Você perde!

Em suma, demonstramos que $G = *3$. O exemplo acima é um caso particular do seguinte teorema:

Teorema 4.8 (Princípio do Menor Excluído)

$$\{*x_1, *x_2, *x_3, ..., *x_n\} = MEX\,(x_1, x_2, ..., x_n)$$

onde MEX de uma lista de números naturais é o menor natural que não aparece na lista.

Demonstração: Seja $G = \{*x_i | *x_i\}$ e seja $a = MEX\,(x_1, x_2, ..., x_n)$. Considere $G + *a$, você começa. Se você trocar G por algum $*b$ com $b < a$, eu troco a por b também e você perde; se você trocar $*a$ por algum $*b$ com $b < a$, eu troco G por $*b$ (lembre-se, todos os $*b$´s possíveis estarão em G!) e você perde. Enfim, se você trocar G por algum $*b$ com $b > a$, eu troco este $*b$ por $*a$ e ganho de novo! Então $G + *a = 0$, isto é, $G = *a$. $\square$

Usando o Princípio do Menor Excluído, podemos reduzir qualquer jogo imparcial finito a um nímero. Para ser preciso, devemos citar aqui que há nímeros além dos que criamos acima, como por exemplo

$$*\omega = \{0, *1, *2, ...\}$$

e outros do tipo $*x$ onde x é um ordinal. Agora sim: com esta extensão temos

Teorema 4.9 (Sprague-Grundy) *Todo jogo imparcial é igual a um nímero.*

Em particular, para jogos *curtos* (isto é, jogos onde cada jogador tem um número finito de opções que levam a jogos curtos previamente definidos), todo jogo imparcial é da forma $*n$ para algum n natural.

4.4 Aplicações

Sob a luz da teoria anterior, analisemos algumas variações de Nim.

Exemplo 4.10 *Neste exemplo, as regras são idênticas às do Nim, mas os jogadores não podem retirar mais do que* 4 *palitos da pilha escolhida. Como isto modifica o jogo?*
Para cada n natural, defina a função $P(n)$ que associa a uma pilha de n palitos deste jogo o seu valor nimérico. Para pilhas de 0 *a* 4 *palitos, esta nova regra não altera absolutamente nada. Assim, tais pilhas continuam valendo $P(n) = *n$ para $0 \leq n \leq 4$.*
No entanto, uma pilha de 5 *palitos pode ser reduzida apenas para* 1, 2, 3 *ou* 4*. Assim:*

$$P(5) = \{*1, *2, *3, *4\} = 0 = P(0)$$

pelo Princípio do Menor Excluído. Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} P(6) &= \{*2, *3, *4, 0\} = *1 = P(1) \\ P(7) &= \{*3, *4, 0, *1\} = *2 = P(2) \\ P(8) &= \{*4, 0, *1, *2\} = *3 = P(3) \end{aligned}$$

A partir daqui, claramente temos $P(n+5) = P(n) = *(n \bmod 5)$ para todo n natural. Colocando tudo numa tabela:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$P(n)$	0	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	0	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	0	...

Assim, a estratégia é deixar para o seu oponente um número de palitos que seja múltiplo de 5.

Exemplo 4.11 *E se você puder retirar apenas* 1 *ou* 4 *palitos da pilha escolhida? Deixamos ao leitor verificar a nova tabela:*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$P(n)$	0	$*1$	0	$*1$	$*2$	0	$*1$	0	$*1$	$*2$	0	...

Por exemplo, $P(8) = \{P(7), P(4)\} = \{0, *2\} = *1$ pelo princípio do menor excluído. Então, se o jogo tiver uma pilha só, a estratégia é deixar um múltiplo de 5 *ou um múltiplo de*

5 *mais* 2*; se houver várias pilhas, não basta ver quantos palitos há no total! Por exemplo, se o jogo começa com pilhas de* 3*,* 6*,* 9 *e* 10 *palitos, o jogo valeria*

$$G = P(3) + P(6) + P(9) + P(10) = *1 + *1 + *2 + 0 = *2$$

e o lance vencedor consiste em subtrair $*2$ *(ou somar* $*2$*) de alguma pilha. Uma maneira de fazer isto é reduzir a pilha de* 9 *palitos para* 5 *(pois* $P(5) = 0$*); outra é trocar* $P(10) = 0$ *por* $P(9) = *2$*!*

Exemplo 4.12 *Se o conjunto de possíveis retiradas for* $\{2,4,7\}$ *a tabela dos* $P(n)$ *começa um pouco caótica, mas acaba por ficar periódica*

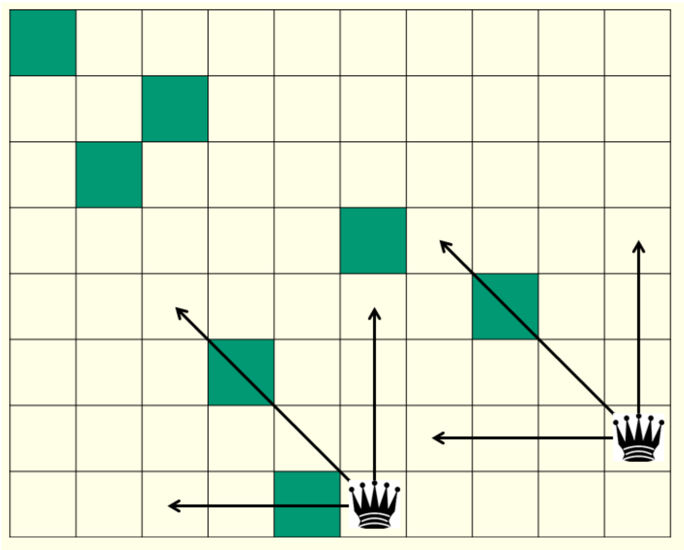
$$P(n) = *(00112203102102102...)$$

*com uma "dízima"*102 *a partir daí. Ou seja, com uma pilha só, deixe sempre* 1 *ou um múltiplo de* 3 *para o seu oponente – mas não deixe exatamente* 3*! Se houver* 5*,* 7 *ou* 10 *palitos na pilha, pule para* 1*,* 0 *ou* 6*, respectivamente!*

Exemplo 4.13 *Voltemos agora ao jogo de Wyt´s Queens. A primeira coisa a fazer é determinar o valor nimérico* $P(m,n)$ *de cada casa* (m,n) *do tabuleiro (onde* $0 \leq m, n$*), o que tem que ser feito "manualmente"usando o Princípio do Menor Excluído. Para um tabuleiro* 10×10*, temos os seguintes valores, onde omitimos as* $*$ *por conveniência:*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	0	4	5	3	7	8	6	10
2	0	1	5	3	4	8	6	7	11
3	4	5	6	2	0	1	9	10	12
4	5	3	2	7	6	9	0	1	8
5	3	4	0	6	8	10	1	2	7
6	7	8	1	9	10	3	4	5	13
7	8	6	9	0	1	4	5	3	14
8	6	7	10	1	2	5	3	4	15
9	10	11	12	8	7	13	14	15	16

Por exemplo, $P(7,7) = 5$ *pois a partir da casa* $(7,7)$ *poderíamos chegar a casas de valores* $7,8,6,9,0,1,4,0,2,1,6,7,8$ *e* 3 *– o menor excluído é* 5*. Fato interessantísimo: em 1907, Wythoff provou [5] que as posições perdedoras (isto é, que valem* 0*) estão em casas de coordenadas* $(\lfloor n\phi \rfloor, \lfloor n\phi^2 \rfloor)$ *onde* $n = 0,1,2,3,...$ *e* $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *é a razão áurea. Com esta tabela em mãos, podemos finalmente resolver o problema proposto anteriormente, a saber*



As casas onde estas damas estão valem $P(5,7) = *1$ *e* $P(9,6) = *13$ *cuja soma é* $*1 + *13 = *12$. *Assim, quem começa ganha, e o movimento vencedor levaria* $*1$ *para* $*13$ *(impossível neste caso) ou* $*13$ *para* $*1$ *(que pode ser feito levando* $P(9,6)$ *para* $P(6,3)$ *ou para* $P(3,6)$*).*

Exemplo 4.14 *Num jogo, o tabuleiro é uma fileira de* N *casas, inicialmente vazias, e cada jogador tem pedras para colocar nestas casas. Na sua vez, você escolhe uma casa desocupada e cujas vizinhas sejam desocupadas também, e lá coloca uma pedra. Quem não tiver o que jogar, perde. Como vencer este jogo?*
Em primeiro lugar, note que ao colocar uma pedra num tabuleiro de n *casas, você pode: (i) Colocar a pedra numa das pontas, efetivamente reduzindo o tabuleiro de* n *para* $n-2$ *casas; ou (ii) Colocar a pedra numa casa do meio da fileira, efetivamente reduzindo o tabuleiro a dois novos tabuleiros de* a *e* b *casas onde* $a + b = n - 3$. *Usando esta mecânica, podemos rapidamente gerar uma tabela: sendo* R_n *o valor nimérico de uma fileira de* n *casas, temos:*

$$\begin{aligned}
R_0 &= 0 \\
R_1 &= \{R_0\} = \{0\} = *1 \\
R_2 &= \{R_0\} = \{0\} = *1 \\
R_3 &= \{R_1, R_0\} = \{*1, 0\} = *2 \\
R_4 &= \{R_2, R_1\} = \{*1, *1\} = 0 \\
R_5 &= \{R_3, R_2, R_1 + R_1\} = \{*2, *1, 0\} = *3 \\
R_6 &= \{R_4, R_3, R_1 + R_2\} = \{0, *2, 0\} = *1 \\
R_7 &= \{R_5, R_4, R_1 + R_3, R_2 + R_2\} = \{*3, 0, *3, 0\} = *1 \\
R_8 &= \{R_6, R_5, R_1 + R_4, R_2 + R_3\} = \{*1, *3, *1, *3\} = 0 \\
R_9 &= \{R_7, R_6, R_1 + R_5, R_2 + R_4, R_3 + R_3\} = \{*1, *1, *2, *1, 0\} = *3 \\
R_{10} &= \{R_8, R_7, R_1 + R_6, R_2 + R_5, R_3 + R_4\} = \{0, *1, 0, *2, *2\} = *3
\end{aligned}$$

Então, por exemplo, num tabuleiro de 10 *casas, os lances vencedores são colocar uma pedra na ponta (reduzindo para* 8 *casas) ou colocar uma pedra na terceira casa (reduzindo para* 1 *mais* 6 *casas).*

4.5 Comentários Finais

Os últimos exemplos deixam claro que, mesmo com esta teoria, muito do trabalho para resolver jogos combinatórios tem que ser feito mecanicamente. De fato, a teoria só é útil quando o jogo em questão pode ser dividido em parcelas a serem somadas (como os que aqui apresentamos)! Por este motivo, a teoria que vimos neste texto não ajuda em jogos como Xadrez e Damas, que nunca ficam divididos em pedaços "estanques"que podem ser somados. Por exemplo, se no jogo de Wyt´s Queens as damas não puderem passar uma pela outra, a soma não faz mais sentido e o jogo fica muito mais difícil!

A analogia que colocamos numa nota de pé de página no início do texto é significativa: você tem um pote com um número n indeterminado de moedas. Para descobrir n, o processo natural é de contagem, que é trabalhoso. Agora, se você sabe que estas moedas vieram de 2 potes distintos que tinham 4355 e 77722 moedas respectivamente, você não precisa contar tudo de novo – basta somar $4355 + 77722$ para obter n. Agora, a habilidade de somar só é útil se seu problema puder ser dividido em dois potes de algum jeito! Se as moedas já estão todas juntas e não há como separá-las, saber somar não vai lhe ajudar a descobrir n, e você terá que contá-las todas. Se você puder dividir as moedas em dois potes, você ainda terá que contar cada um, mas pelo menos ao terminar estas duas tarefas menores você saberá n.

Analogamente, a obtenção do valor nimérico de vários jogos ainda passa por um processo de contagem em cada uma de suas componentes – este processo pode ser trabalhoso e braçal. Se o jogo todo for indivisível, tendo apenas uma componente, então a teoria não ajuda em nada! Note que todos os jogos que abordamos têm a característica de serem facilmente divisíveis em pedaços menores, onde a teoria é útil.

Referências Bibliográficas

[1] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, A K Peters, Natick, MA, USA, 2001.

[2] John H. Conway, *On numbers and games*, A K Peters, 2001.

[3] Nicolau Corção Saldanha, *Tópicos em jogos combinatórios*, IMPA, 1991.

[4] Dierk Schleicher and Michael Stoll, *An introduction to conway's games and numbers*, Moscow Mathematical Journal **6** (2006), no. 2, 359 – 388, 407.

[5] W A Wythoff, *A modification on the game of nim*, Nieuw Archief voor miskunde 2 **2** (1907), 199–202.