Fevereiro 2004
Ralph Costa Teixeira

Graduação FGV

Indução Finita

Como demonstrar uma propriedade por Indução Finita

Seja *p(n)* uma sentença aberta qualquer onde *n* é uma variável que representa um número natural. Suponha que:

- *p(1) é verdadeira;*
- *Para qualquer k natural, se p(k) vale, então p(k+1) vale.*

Então, concluímos que *p(n)* é verdadeira para todo *n* natural. De fato, a idéia é que *p(1)* é verdadeira; como *p(1)* vale, usando *k=1*, concluímos que *p(2)* vale; portanto, usando *k=2*, vale *p(3)*; e assim por diante.[1]

Exemplo

Mostrar que, para qualquer *n* natural (não-nulo), tem-se:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração: Vamos demonstrar a propriedade acima por indução.

- *Vale para n=1:* De fato, para *n=1*, temos
$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$
que é claramente verdadeira.
- *Se vale para n=k, vale para n=k+1*. De fato, suponha que vale
$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$
Então temos
$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
isto é, a propriedade vale para *n=k+1*.

Por indução, concluímos que, para todo *n* natural (não-nulo), temos

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

C.Q.D.

Problemas

1) Seja *n* um natural positivo. Mostre que a soma dos *n* primeiros números ímpares positivos é n^2.

2) Mostre que, para todo *n* natural positivo e *q* real positivo qualquer
$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

3) Mostre que, para todo *n* natural positivo,
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

4) Use indução finita para mostrar que, para todo *n* natural maior ou igual a *4*, tem-se $2n+1<2^n$ e, portanto, $n^2\le 2^n$. Use este fato para encontrar o valor máximo de $\sqrt[n]{n}$, onde *n* é um natural positivo.

[1] Para saber mais: http://www.obm.org.br/eureka/artigos/inducao.doc.

Para depois, em cálculo 1: qual o máximo da expressão $\sqrt[x]{x}$ onde x é um real positivo?

5) Considere a seqüência de Fibonacci $F_1 = 1; F_2 = 1; F_3 = 2; F_4 = 3; F_5 = 5; F_6 = 8; F_7 = 13;\ldots$, onde cada termo é a soma dos dois anteriores, isto é $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo n natural positivo. Mostre que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$$

onde $a>b$ são as raízes da equação

$$x^2 - x - 1 = 0$$

6) O Problema da Torre de Hanói. No grande templo de Benares, no centro do universo, há 3 imensas agulhas de diamante. No início dos tempos, Brahma criou uma torre colocando N anéis de ouro em uma delas, empilhados do maior (na base) para o menor (no topo):

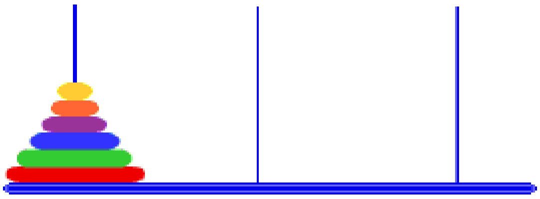

Figura 1. Torre de Hanói com 6 discos

Desde então, os monges do templo movem os anéis entre as torres, um de cada vez, mas jamais colocando um anel maior sobre um anel menor. Por este processo, os monges tentam um dia reconstruir a torre completa de N anéis em uma agulha diferente da inicial. O dia em que a reconstrução estiver completa, a torre desabará, os monges virarão pó e o nosso mundo vai acabar.[2]

a) Mostre que o problema da Torre de Hanói pode ser resolvido em $2^N - 1$ movimentos.
b) De fato, no problema original, havia *64* anéis empilhados na torre inicial. Suponha que os monges movem um anel a cada *5* segundos, começando há *5.000* anos. Quanto tempo ainda temos antes que o mundo acabe?

[2] Esta lenda parece ter sido inventada pelo Professor Edouard Lucas em 1883, assim como o quebra-cabeça da Torre de Hanói cuja caixa apresentava a gravura acima.

Fevereiro 2004
Ralph Costa Teixeira

Indução Finita (Problemas Adicionais)

1) [OBM 1986] Mostre que, para todo *n* natural positivo, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

2) Mostre que $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{2004.2005}=\frac{2004}{2005}$. [Dica: de fato, descubra e prove uma fórmula mais geral, com "*n*" no lugar de 2004.]

3) Mostre que $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2004}{2005!}=1-\frac{1}{2005!}$.

4) Considere a seqüência definida por $\begin{array}{l} a_0=2; \quad a_1=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n \end{array}$ (para todo *n* natural). Adivinhe uma fórmula que expresse a_n em função de *n*, e mostre por indução que sua fórmula é correta. [Dica: escreva vários termos e note como eles estão próximos de potências de 2...]

5) Seja *a* um real positivo. Mostre que $(1+a)^n \geq 1+na$ onde *n* é um natural qualquer.

6) Mostre que 2^n-1 é um múltiplo de 3 para todo *n* natural.

7) Determine o último dígito de n^5-n onde *n* é um natural qualquer.

8) Seja $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Adivinhe uma fórmula para A^n e demonstre-a. [Dica: pense potências de 5.]

9) [Stewart, p. 703] Considere a seqüência dada por $a_1=\sqrt{2}; \quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ (para todo *n* natural), isto é, $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$, onde a expressão tem *n* raízes.
   a. Mostre que todos os termos da seqüência são menores do que 2.
   b. Mostre que a seqüência é crescente, isto é, $a_n \leq a_{n+1}$ para todo *n* natural.

10) [Stewart, p. 701] Considere a seqüência dada por $a_1=2; \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+6)$ (para todo *n* natural).
   a. Mostre que todos os termos da seqüência são menores do que 6.
   b. Conclua que a seqüência é crescente.

11) Mostre que o número 1111...1 (com 3^n algarismos iguais a 1) é divisível por 3^n (por exemplo, 111 é divisível por 3, 111111111 é divisível por 9, e assim por diante). E se trocarmos o dígito "1" por algum outro dígito, a propriedade ainda é válida?

12) Seja *P(n)* a proposição: $2+4+6+\ldots+2n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$.
   a. Mostre que se *P(k)* vale, então *P(k+1)* vale.
   b. No entanto, mostre que *P(n)* é falsa (para todo *n*). Qual é a fórmula correta para a soma do lado esquerdo?