

1 Caso Linear: plano Traço-Determinante

Começaremos fazendo um breve resumo do que aprendemos no caso linear: como é o retrato de fase para sistemas do tipo $\dot{v} = Av$ onde $v = (x(t), y(t))$ e $A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$? Vimos anteriormente que o comportamento “geral” das trajetórias-solução depende apenas dos autovalores calculados: se eles são complexos, as trajetórias espiralam ou são elipses (dependendo do sinal da parte real dos autovalores); se eles são reais e têm sinais distintos, as trajetórias são tipo “sela” (apenas uma trajetória se aproxima assintoticamente da origem, todas as outras se afastam); enfim, se eles são reais com mesmo sinal, as trajetórias revelam um “nó” na origem (que pode ser estável ou instável dependendo do sinal, e pode ser impróprio se os autovalores forem iguais).

Mas todas as condições acima podem ser re-escritas em função apenas do traço e do determinante de A ! Afinal, a equação característica é

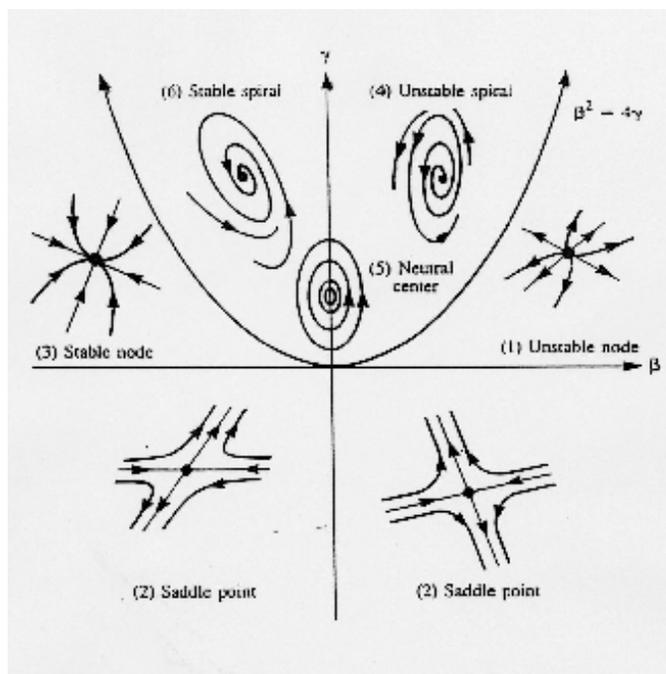
$$\lambda^2 - (TrA)\lambda + DetA = 0$$

isto é, a soma dos autovalores é $TrA = a + d$ e o seu produto é $DetA = ad - bc$.

Esta equação terá raízes reais se, e somente se, $\Delta \geq 0$, isto é, se $(TrA)^2 - 4(DetA) \geq 0$. Neste caso, é fácil descobrir o sinal das raízes, sem precisar resolver a equação: elas terão sinais distintos exatamente quando $DetA < 0$ (lembre-se, $DetA = \lambda_1\lambda_2$); por outro lado, se $DetA > 0$, as raízes terão o mesmo sinal – e aí olhamos o traço, $TrA = \lambda_1 + \lambda_2$, cujo sinal será o mesmo dos autovalores.

Por outro lado, se as raízes forem complexas (isto é, $(TrA)^2 - 4(DetA) < 0$), então elas serão da forma $\lambda = m \pm ni$. Neste caso, $TrA = \lambda_1 + \lambda_2 = 2m$, isto é, o sinal do traço é o sinal de m . Assim, as espirais serão instáveis se $TrA > 0$, estáveis se $TrA < 0$ e teremos centros quando $TrA = 0$.

A discussão acima pode ser resumida pelo plano traço-determinante (na figura, β é o traço e γ é o determinante):



Nos casos dos nós e das selas, as direções “especiais” (trajetórias semi-retas) são os autovetores de A .

2 Caso Não-Linear: Nulicliniais

E no caso não-linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, y) \\ \dot{y} &= G(x, y) \end{aligned}$$

como podemos esboçar o retrato de fase? Enquanto é sempre possível esboçar um grande número de vetores do retrato de fase (especialmente com a ajuda de um computador), sem uma análise sistemática é difícil dizer exatamente qual é o comportamento das soluções.

Para nos auxiliar com um esboço manual de um retrato de fase (e ao mesmo tempo aumentar nossa compreensão dele), poderíamos fazer um esforço para desenhar primeiramente todas as vetores que são horizontais ou verticais. Os pontos do

retrato de fase onde isto acontece formam as chamadas **nulclinais**. Em outras palavras, a **nulclinal horizontal** é o conjunto dos pontos $G(x, y) = 0$; a **nulclinal vertical** é o conjunto dos pontos onde $F(x, y) = 0$. O leitor atento deve ter percebido que as interseções das nulclinais horizontais e verticais são exatamente os pontos de equilíbrio. O esboço das nulclinais mais uma pequena indicação das direções dos vetores sobre elas já dá uma ótima idéia sobre o retrato de fase procurado. Ilustremos este processo com um exemplo.

Exemplo 1 *Espécies em Competição*¹

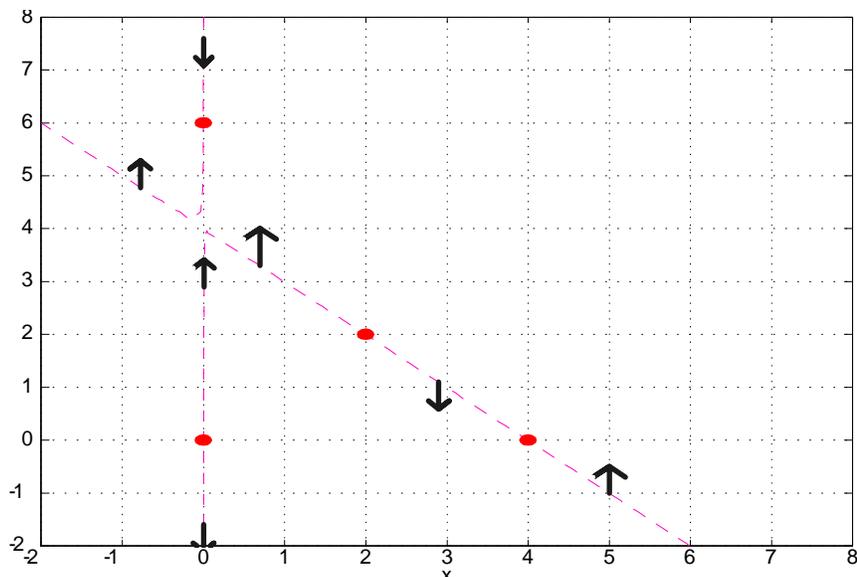
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(8 - 2x - 2y) \\ \dot{y} &= y(6 - 2x - y)\end{aligned}$$

A nulclinal vertical consiste de duas retas: $x = 0$ e $x + y = 4$. Analisemo-las separadamente.

Sobre a reta $x = 0$, os vetores do retrato de fase têm a forma $(0, y(6 - y))$. Analisando o sinal do segundo termo, vemos que os vetores apontam para cima quando $y(6 - y) > 0$, isto é, $0 < y < 6$, e para baixo caso $y < 0$ ou $y > 6$. Nos pontos $(0, 0)$ e $(0, 6)$, os vetores são nulos e temos, portanto, equilíbrios.

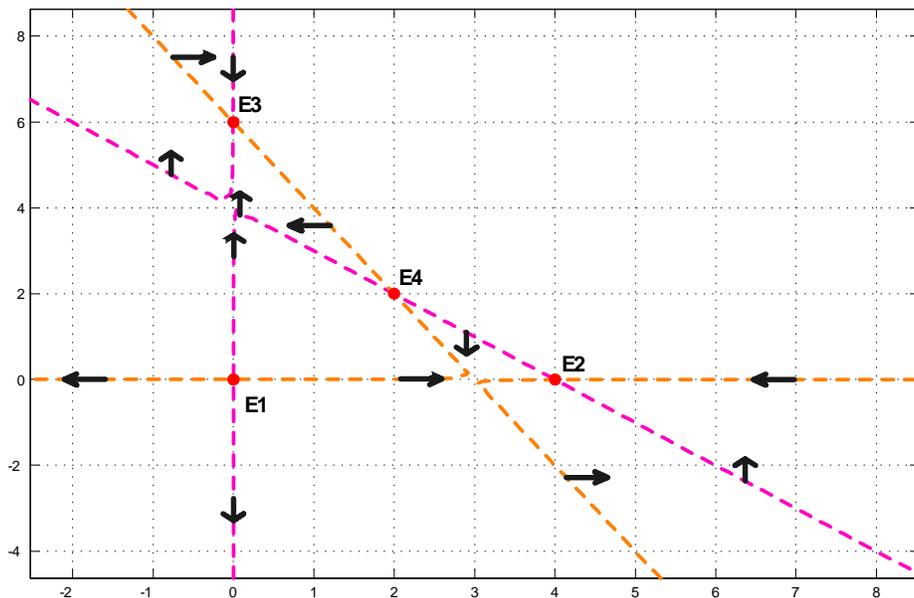
Sobre a reta $x + y = 4$, os vetores têm a forma $(0, y(6 - 2x - y))$. Usando que $x = 4 - y$, podemos colocar a segunda componente apenas em função de y , a saber: $y(6 - 2x - y) = y(6 - 2(4 - y) - y) = y(y - 2)$. Isto significa que tais vetores apontam para baixo quando $0 < y < 2$ e para cima caso $y < 0$ ou $y > 2$. Os pontos $(4, 0)$ e $(2, 2)$ serão dois outros equilíbrios do sistema.

A análise da nulclinal vertical pode ser resumida na figura a seguir (os equilíbrios são os pontos vermelhos).



Analogamente, as nulclinais horizontais são as retas $y = 0$ e $2x + y = 6$. Na primeira, os vetores são da forma $(x(8 - 2x), 0)$, ou seja, apontam para a direita quando $0 < x < 4$ e para a esquerda fora deste intervalo. Na segunda, os vetores $(x(2x - 4), 0)$ apontam para a esquerda para $0 < x < 2$ e para a direita caso contrário:

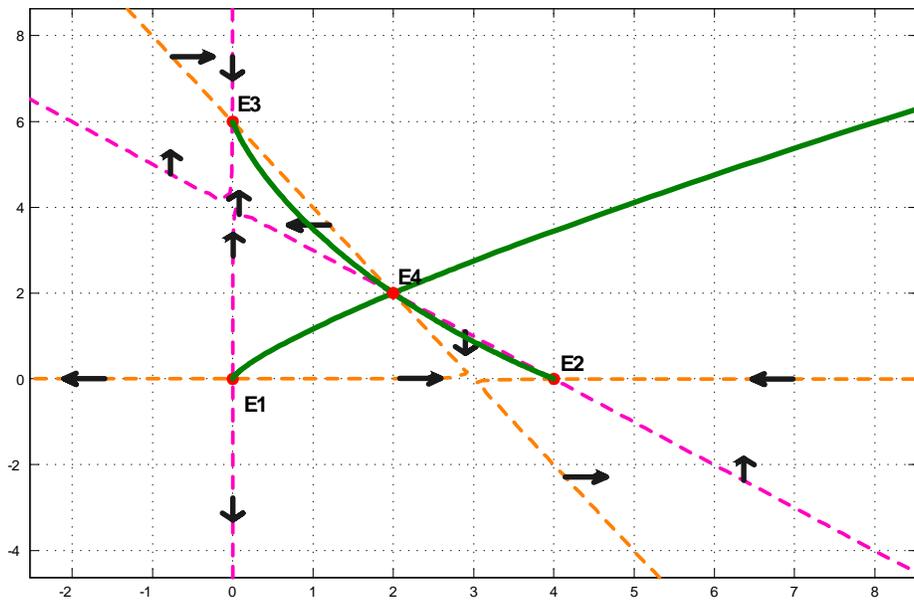
¹Você pode fingir, por exemplo, que $x(t)$ é uma população de tubarões e $y(t)$ é uma população de golfinhos, ambas em milhares, lutando pelo peixe de cada dia. Vale a pena pensar um pouco se o modelo faz sentido: por exemplo, note que, se $x = 0$, então $\dot{x} = 0$ e, portanto, $x(t) = 0$ para todo t . Ao mesmo tempo, se $x = 0$, temos $\dot{y} = y(6 - y)$, ou seja, na ausência de tubarões, a população de golfinhos segue um modelo logístico com capacidade limite de 6 (mil) golfinhos. Analogamente, se $y = 0$ inicialmente, então $y(t) = 0$ sempre, e $\dot{x} = x(8 - 2x)$ segue um modelo logístico com capacidade limite de 4 (mil). Os termos em xy servem para diminuir a capacidade limite na presença de um competidor.



Esta figura já nos dá várias informações: por exemplo, observe o pequeno triângulo com vértices E2 e E4. Em dois de seus lados, as trajetórias têm de “entrar” no triângulo; no lado horizontal, as trajetórias seguem na horizontal para a direita, na direção de E2. Isto significa que nenhuma trajetória que entra neste triângulo pode sair dele (e lá dentro todas as trajetórias devem apontar para “sudeste”). Isto indica que todas estas trajetórias devem seguir na direção de E2.

Analogamente, o pequeno triângulo com vértices E3 e E4 também é um grande sugador de trajetórias. Como ali dentro todas as trajetórias vão para “noroeste”, é razoável concluir que elas vão na direção de E3.

No quadrilátero com vértices opostos E1 e E4, todas as trajetórias seguem para “nordeste”... Algumas devem sair por cima e outras pela direita, e é razoável supor que haja alguma trajetória que vá exatamente na direção de E4, funcionando como um “divisor de águas”. Esta trajetória é chamada de **separatriz**. Com a ajuda do PPLANE, desenhamo-la a seguir, ligando E1 a E4.



Trajetórias que se iniciem um pouco acima da separatriz aproximam-se (a longo prazo) de E3, enquanto as que se iniciam um pouco abaixo da separatriz vão na direção de E2.

Trajetórias que vêm de $(+\infty, +\infty)$ têm de ir para sudoeste. É razoável supor que algumas delas atravessam o segmento E3E4 e outras atravessam o segmento E2E4 (com uma indo exatamente na direção de E4 e funcionando como outro “divisor de águas”). Note que, como o eixo x é uma nuliclinal horizontal e o eixo y é uma nuliclinal vertical, os eixos coordenados não podem ser cruzados por trajetória alguma! Esta é uma boa característica deste modelo populacional – as trajetórias no primeiro quadrante não saem do primeiro quadrante, isto é, o modelo prevê que jamais alguma das duas populações fique negativa.

Enfim, marcamos uma trajetória de E4 para E2 que separa a maneira como as trajetórias entram naquele triângulo de vértices E2 e E4, e fizemos o mesmo de E4 para E3. A análise que fizemos organiza o jeito que as trajetórias têm no primeiro quadrante todo! A esta altura, é razoável supor que E1 e E4 são equilíbrios instáveis, enquanto E2 e E3 parecem estáveis (mas aguarde a próxima seção para uma análise mais detalhada da estabilidade dos equilíbrios). A interpretação do modelo é de que

provavelmente uma das populações será extinta, dependendo de estarmos acima ou abaixo da separatriz no momento inicial. Enquanto $E4(2, 2)$ é um equilíbrio, não é de se esperar que ele dure – a partir dali, qualquer tubarão que tropece e morra faz com que deixemos este equilíbrio e, a longo prazo, isto significaria a extinção da população de tubarões.

3 Estabilidade dos Equilíbrios

Como podemos melhor analisar o comportamento das soluções próximas aos equilíbrios? A idéia desta seção é simples: utilize uma aproximação linear de $F(x, y)$ e $G(x, y)$ perto do ponto crítico (x_0, y_0) . Com um pouco de sorte, o sistema não-linear que queremos analisar terá um comportamento parecido com o do sistema linear dado pela aproximação.

Por exemplo, no modelo da seção anterior, perto de $E1(0, 0)$ os valores de x e y são muito pequenos. Assim, podemos desprezar termos de ordem quadrática de $F(x, y)$ e $G(x, y)$, isto é

$$F(x, y) = 8x - 2x^2 - 2xy \simeq 8x$$

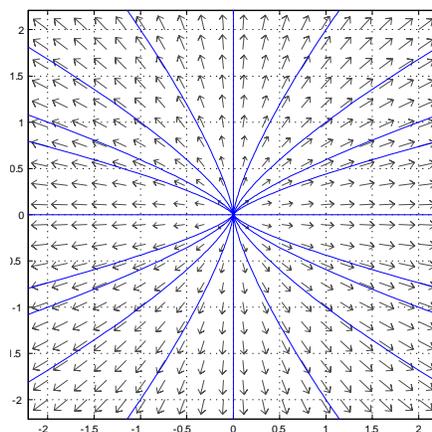
$$G(x, y) = 6y - 2xy - y^2 \simeq 6y$$

Assim, é razoável esperar que o comportamento do sistema $\dot{x} = F(x, y)$ e $\dot{y} = G(x, y)$ seja próximo do comportamento de

$$\dot{x} = 8x$$

$$\dot{y} = 6y$$

Ora, sabemos exatamente que tipo de sistema é este: a origem é um equilíbrio tipo nó instável, e todas as trajetórias saem tangentes ao eixo y (já que o autovalor de x é maior), como na figura a seguir. É razoável supor que este comportamento se aplique ao sistema original.



$$\dot{x} = 8x \text{ e } \dot{y} = 6y$$

Em geral, dado um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) , calculamos a aproximação linear próxima a este ponto (plano tangente)

$$F(x, y) \simeq F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$G(x, y) \simeq G(x_0, y_0) + \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Fazendo então a mudança de variáveis $u(t) = x(t) - x_0$ e $v(t) = y(t) - y_0$ (note que $\dot{u} = \dot{x}$ e $\dot{v} = \dot{y}$) e notando que, no equilíbrio, temos $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$, ficamos com a aproximação linear

$$\dot{u} = au + bv$$

$$\dot{v} = cu + dv$$

onde a matriz dos coeficientes é exatamente o Jacobiano de F e G :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = J_{F, G}$$

Façamos isto, por exemplo, com os outros equilíbrios do sistema acima. Podemos primeiro calcular o Jacobiano em geral

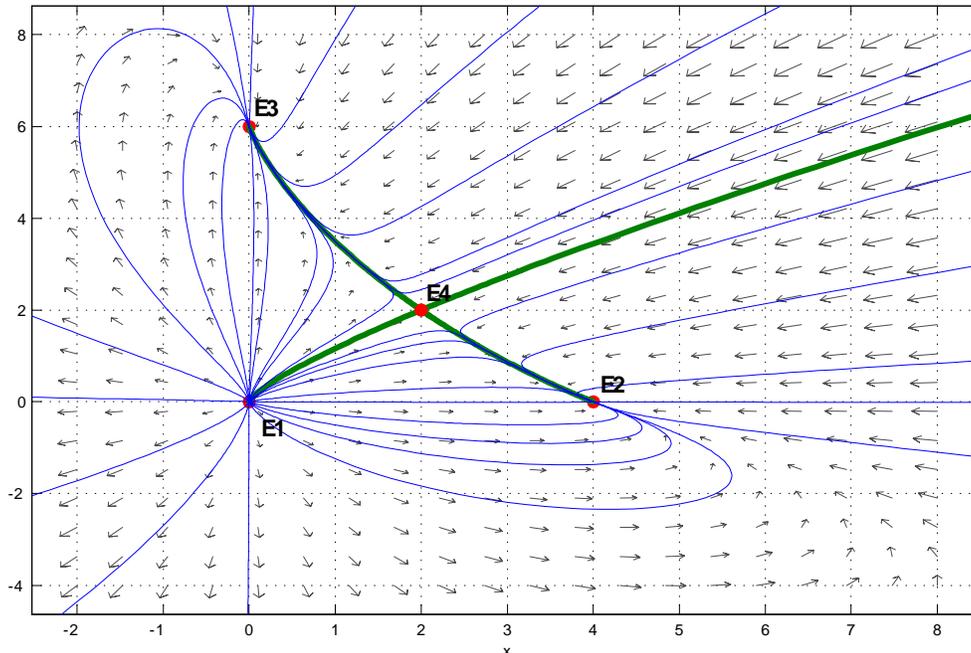
$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 4x - 2y & -2x \\ -2y & 6 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

Em $E_2(4, 0)$, isto dá $\begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ cujos autovalores são $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = -2$. Dois autovalores negativos significam que o equilíbrio é um nó assintoticamente estável **para o sistema linear**. De fato, pode-se mostrar que o equilíbrio se parece com uma sela também no sistema original.

Em $E_3(0, 6)$, o Jacobiano é $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$, e os autovalores -4 e -6 indicam outro nó estável.

Enfim, $E_4(2, 2)$ tem Jacobiano $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ com determinante -8 negativo. Assim, temos um ponto de sela.

O diagrama de fase do nosso sistema pode ser enriquecido com trajetórias para revelar o comportamento acima descrito:



Bom, todas estas aproximações acima têm de ser justificadas de alguma forma... A ferramenta que temos é um teorema que não iremos demonstrar:

Teorema 2 *Sejam $F(x, y)$ e $G(x, y)$ funções cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Então o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, y) \\ \dot{y} &= G(x, y) \end{aligned}$$

é bem aproximado na vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) pelo sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}$$

onde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é o Jacobiano de F e G no ponto (x_0, y_0) . Por **bem aproximado**, queremos dizer:

- a) O tipo de equilíbrio no caso linear é o mesmo tipo de equilíbrio do sistema original, com as seguintes exceções:
 - i) Se o caso linear tem equilíbrio do tipo centro, o equilíbrio original pode ser centro ou espiral;
 - ii) Se o caso linear tem equilíbrio do tipo nó impróprio ou estrela estáveis, o equilíbrio original pode ser um nó ou uma espiral estáveis;
 - iii) Se o caso linear tem equilíbrio do tipo nó impróprio ou estrela instáveis, o equilíbrio original pode ser um nó ou uma espiral instáveis;
 - iv) Se o caso linear tiver um dos autovalores nulos, nada se pode afirmar.
- b) As trajetórias que “entram” ou “saem” (assintoticamente) do equilíbrio no caso linear são tangentes às trajetórias correspondentes no sistema original.

Para entender melhor o item (a) acima, **exigimos** que o leitor identifique cada situação no diagrama traço-determinante mostrado anteriormente. Em suma, as únicas exceções são as linhas limítrofes entre regiões adjacentes; se o caso linear cair exatamente em cima da parábola $Tr^2 = 4Det$, é possível que o sistema original esteja um pouco acima ou abaixo da parábola – ou seja, os termos quadráticos descartados podem ser suficientes para empurrar o nó impróprio do caso linear para espirais ou nós no sistema original. Analogamente, se tivermos $Det > 0$ e $Tr = 0$ no caso linear, a diferença entre (F, G) e suas aproximações lineares pode ser exatamente o suficiente para jogar o equilíbrio de centro para espiral estável ou instável. Enfim, se estivermos

no eixo $Det = 0$, então há uma direção na qual o caso linear “se anula” completamente, e os termos “quadráticos” descartados determinariam completamente o comportamento do sistema de EDOs nesta direção – assim, não podemos afirmar coisa alguma baseados apenas na aproximação linear.

Exemplo 3 *Espécies em Competição*

No modelo anteriormente estudado, todos os equilíbrios são nós ou selas que não caem nas exceções, e as afirmações lá feitas são justificadas pelo item (a) do teorema apresentado.

O item (b) revela informações adicionais (confirme cada uma no retrato de fase!):

No equilíbrio E1, havia duas autovetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, e a grande maioria das trajetórias “saía” de E1 tangente ao vetor $(0, 1)$. O item (b) diz que estas direções se mantêm no diagrama de fase do sistema não-linear – as trajetórias saem de E1 tangentes a $(0, 1)$, exceto por um par de trajetórias solitárias que saem na direção horizontal $(1, 0)$.

Em E2, os autovetores do Jacobiano são $(1, 0)$ (autovalor -8) e $(-4, 3)$ (autovalor -2), indicando um nó estável cujas trajetórias “chegam” tangentes a $(-4, 3)$ (novamente, exceto pelas duas solitárias trajetórias horizontais).

Verifique também E3: autovetores $(0, 1)$ (autovalor -6) e $(1, -6)$ (autovalor -4) indicam um nó estável com trajetórias na direção do vetor $(1, -6)$, exceto pelas trajetórias realmente verticais. E, em E4, temos uma sela com autovetores $(4, -1 \mp \sqrt{17})$ respectivamente associados aos autovalores $-3 \pm \sqrt{17}$. O autovetor $(4, \sqrt{17} - 1)$ tem autovalor negativo – isto indica a direção da separatriz no ponto E4 (aquela que vem de E1)! A outra separatriz (E2-E4-E3) é tangente a $(4, -1 - \sqrt{17})$ no ponto E4, e “sai” de E4 pois seu autovalor $\sqrt{17} - 3$ é positivo.

4 Exercícios

1) No exemplo trabalhado acima, vimos um modelo com duas espécies em competição em que uma delas tende a ser extinta por causa da outra. Faça o mesmo tipo de análise (nuli-clinais com direções de seus vetores, análise de estabilidade de equilíbrios por linearização e encontre autovetores que sejam direções especiais) para o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(6 - x - 2y) \\ \dot{y} &= y(8 - 2x - 2y)\end{aligned}$$

Compare o diagrama que você esboçou com o obtido pelo PPLANE. O que este modelo prevê para as duas populações? Que mudanças nos coeficientes podem ter causado um comportamento tão distinto do modelo do texto?

2) Repita o problema anterior com

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(6 - 2x - 2y) \\ \dot{y} &= y(8 - 2x - 2y)\end{aligned}$$

3) Um pêndulo de comprimento L sofre a ação da gravidade. Se o ângulo que ele forma com a vertical é θ e sua velocidade angular é $w = \frac{d\theta}{dt}$, um modelo para o movimento do pêndulo é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= w \\ \dot{w} &= -K^2 \sin \theta\end{aligned}$$

onde $K = \frac{g}{L}$ é uma constante.

a) Encontre as nuli-clinais e os equilíbrios deste modelo, desenhando-os num retrato de fase. Classifique os equilíbrios quanto à sua estabilidade. Então, use o PPLANE para conferir seu retrato e interprete o que o retrato lhe diz.

b) Como o valor de K afeta as soluções? O que significaria tomar $K = 0$ fisicamente? Qual é então o comportamento do pêndulo neste caso?

c) Note que você pode eliminar t tomando

$$\frac{d\theta}{dw} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{w}} = \frac{w}{-K^2 \sin \theta}$$

Resolva esta equação diferencial separável para determinar **exatamente** a equação das trajetórias no plano $w\theta$.

d) Multiplique a equação da trajetória por um termo conveniente para mostrar que

$$\frac{1}{2}mL^2w^2 + mgL(1 - \cos \theta) = E$$

onde E é constante. O primeiro termo é denominado “energia cinética” do pêndulo, e o segundo é a chamada “energia potencial”. Você acaba de mostrar que a energia total do pêndulo é constante.

4) Se o pêndulo da questão anterior sofre a resistência do ar, um modelo melhor é

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= w \\ \dot{w} &= -K^2 \sin \theta - cw\end{aligned}$$

onde c é uma outra constante que é maior quanto maior for a viscosidade do ar. Como se afetam as nulclinais? E os equilíbrios? E sua estabilidade? Use o PPLANE de novo e procure interpretar o que o retrato de fase significa fisicamente. Como o valor de c afeta as soluções?

5) Classifique a estabilidade dos pontos críticos do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 8 - 4y \\ \dot{y} &= 4 - x^2\end{aligned}$$

e use o truque do problema 3 para determinar a equação implícita de suas trajetórias. Com isso, mostre que um dos equilíbrios é, de fato, um **centro**. Note que o PPLANE tem alguma dificuldade para encontrar trajetórias periódicas...

6) Encontre os equilíbrios dos sistemas abaixo e determine suas estabilidades sempre que possível. Use o PPLANE para desenhar o retrato de fase e conferir suas respostas.

- a) $\dot{x} = x - xy$; $\dot{y} = y + 2xy$ (calcule dy/dx e resolva para encontrar as trajetórias!)
- b) $\dot{x} = x^2 - y$; $\dot{y} = y^2 - x$
- c) $\dot{x} = x(y^2 - y)$; $\dot{y} = x - y$
- d) $\dot{x} = x(17 - x - y)$; $\dot{y} = y(169 - x^2 - y^2)$
- e) Van der Pol: $\dot{x} = y$; $\dot{y} = (1 - x^2)y - x$

7) Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -2y + x^3\end{aligned}$$

Mostre que seu único equilíbrio é o ponto de sela $(0, 0)$; resolva o sistema manualmente para encontrar suas trajetórias. Mostre que a única trajetória que “entra” em $(0, 0)$ (isto é, que satisfaz $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$) é a trajetória vertical $x = 0$, e a única trajetória que “sai” de $(0, 0)$ (isto é, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$) é $5y = x^3$.

8) Mostre que $(0, 0)$ é centro da **linearização** de ambos os sistemas a seguir

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

mas use o PPLANE para verificar que $(0, 0)$ **não é** um centro em cada um deles.

9) Utilize os métodos deste capítulo para analisar o sistema predador-presa já exibido em aula

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= 6C - 0.1CL \\ \frac{dL}{dt} &= -2L + 0.05CL\end{aligned}$$

Em particular, calcule dC/dL e mostre que um dos equilíbrios é, de fato, um centro.