1. Desmata-mata e Sinais

1.1. **REGRA NORMAL.** Lembre-se que toda a nossa análise é baseada na importantíssima **regra normal**: quem não tem movimento válido, perdeu.

1.2. **SINAL DE UM JOGO G.** Supondo que ambos os jogadores L (você) e R (eu) sempre joguem da melhor maneira possível, definimos o sinal de um jogo G por[1]:

$$G = 0 \iff \text{Quem começa, perde}$$
$$G > 0 \iff L \text{ ganha}$$
$$G < 0 \iff R \text{ ganha}$$

1.3. **NEGATIVO DE UM JOGO G.** É o jogo $(-G)$ obtido trocando os papéis dos dois jogadores.

1.4. **SOMA DE DOIS DESMATA-MATAS.** Dadas duas figuras de desmata-mata, sua soma é simplesmente o jogo que as coloca lado a lado como posição inicial[2]. Note que, pelo argumento de simetria que usamos em sala, temos nosso primeiro teoreminha:

$$G + (-G) = 0$$

(A estratégia é simples: sempre que o primeiro jogador fizer algo numa componente do jogo, o segundo repete o movimento na outra componente. Quando o primeiro jogador terminar uma componente, o segundo terminará a outra logo em seguida e vencerá. Em suma, o segundo ganha, isto é, **quem começa perde**.)

1.5. **NOTAÇÃO.** Nesta lista, um "tronco" de desmata-mata será representado por uma sucessão de L's e R's, de acordo com as cores das varetas (azuL e veRmelho), **de baixo para cima**. Por exemplo, o tronco que tem uma vareta veRmelha sobre uma vareta azuL será descrito como LR. Em sala, vimos que $LR + LR + R$ tem valor 0, e portanto (como $R = -1$) é razoável dizer que o valor de LR é $\frac{1}{2}$.

Exercício 1. *Como garantir o empate no jogo dos* 15 *descrito em sala?*

Exercício 2. *O objetivo deste problema é encontrar o valor de LRR.*
a) Explique como você sabe que $LRR > 0$.
b) Mostre que $LRR < \frac{1}{2}$ (isto é, mostre que $LRR - LR = LRR + RL < 0$).
c) Será que $LRR = \frac{1}{3}$? Descubra o sinal de $LRR + LRR + LRR - L = LRR + LRR + LRR + R$.
d) Será que $LRR = \frac{1}{4}$? Descubra o sinal de $LRR + LRR - LR = LRR + LRR + RL$.

Exercício 3. *Mostre que $L + L + L + L - LLLL = 0$, mas que $L + L + L + R - LLLR < 0$. Qual o valor de $LLLR$?*

Exercício 4. *Determine o sinal de $LRRR + LRR + LR + R$.*

Exercício 5. *Determine o sinal de $LRR + LR + LR + R$.*

Exercício 6. *Use indução finita para mostrar que $LR^n + LR^n - LR^{n-1} = 0$ (onde $R^n = RRR...R$, com n R´s). Assim, é razoável escrever $LR^n = \frac{1}{2^n}$.*

[1] Sim, está faltando aqui um sinal. Se quem começa ganha, dizemos que $G \parallel 0$ (lê-se: G é confuso com 0). Jogos confusos com zero aparecerão mais tarde na teoria.

[2] Generalização: coloque n jogos G_1, G_2, ..., G_n numa mesa. Na sua vez, cada jogador escolhe UM dos n jogos e faz UM lance válido no jogo que escolheu (de acordo com as regras daquele jogo). O jogo assim criado é a SOMA $G = G_1 + ... + G_n$. É fácil ver que esta soma é comutativa e associativa!

2. Desmata-mata e Números

2.1. JOGOS DIÁDICOS. Definimos:

$$\begin{aligned} 0 &= \{|\}\,;\ 1 = \{0|\}\,;\ 2 = \{1|\}\,; ...n+1 = \{n|\}\,; ...; -1 = \{|0\}\,;\ -2 = \{|-1\}\,;\ -3 = \{|-2\}\,;\ ... \\ \frac{1}{2} &= \{0|1\}\,;\ \frac{3}{2} = \{1|2\}\,; ...; \frac{1}{4} = \left\{0|\frac{1}{2}\right\}; \frac{3}{4} = \left\{\frac{1}{2}|1\right\}; .. \end{aligned}$$

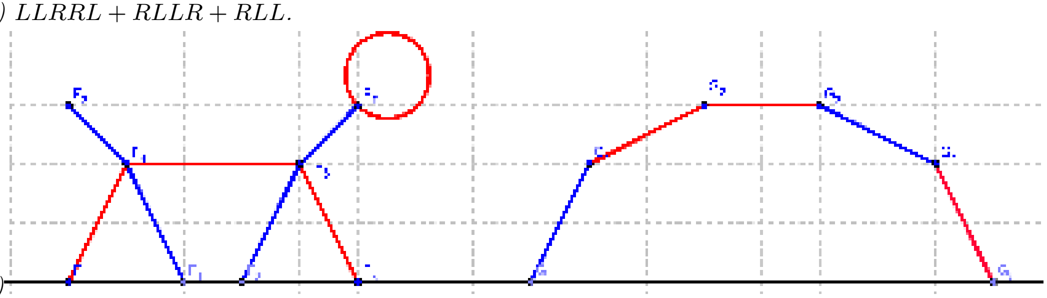
ou seja, em geral

$$\frac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{\frac{2p}{2^{n+1}}|\frac{2p+2}{2^{n+1}}\right\} = \left\{\frac{p}{2^n}|\frac{p+1}{2^n}\right\}$$

2.2. CALCULANDO TRONCOS. Hastes da mesma cor conectadas ao solo valem um número inteiro. A partir daí, cada haste vale metade da anterior (positivo se azul, negativo se vermelho);

2.3. A REGRA DA SIMPLICIDADE. Suponha que $a < b$ são jogos que correspondem a números reais. Então $\{a|b\}$ é o número mais "simples" que satisfaz $a < x < b$.

Exercício 7. *Determine o valor dos jogos e o melhor lance de cada jogador:*
a) $LLRRL + RLLR + RLL$.



b)

Exercício 8. *Seja x o jogo dado pelo tronco $LRRL$,* ***modificado de forma que a ponta superior também seja conectada ao solo****. Vamos calcular x sem usar explicitamente a Regra da Simplicidade:*
a) Escreva x na forma $\{a|b\}$. Olhando apenas para a e b, você sabe que $x > 0$ – por quê?
b) Agora escreva $x - 1$ na forma $\{a|b, x\}$. Explique como você sabe que $x - 1 = 0$ olhando apenas para a, b e x.

Exercício 9. *Suponha que $1 < a < 2 < 6 < b$. Vamos mostrar que $\{a|b\} = 2$.*
a) Explique como você sabe que $x = \{a|b\} > 0$.
b) Finja que $x = \{a|b\}$ é um jogo de Hackenbush desconhecido, e coloque uma vareta vermelha ao seu lado. Escreva $x - 1 = \left\{G^L|G^R\right\}$ onde G^L e G^R são conjuntos de números, e explique porque $x - 1 > 0$.
c) Agora considere $x - 2$ escreva-o na forma $\left\{G^L|G^R\right\}$ e mostre que $x - 2 = 0$.

Exercício 10. *O jogo de Cutcake pode ser descrito assim: numa mesa, há vários pares ordenados de inteiros positivos (isto é, bolos retangulares, representados na forma $[x \times y]$). Na sua vez L escolhe um dos pares $[x_i \times y_i]$ presentes com $y_i \geq 2$ e o troca por $[x_i \times c_i]$ e $[x_i \times d_i]$ onde c_i e d_i são inteiros positivos com $c_i + d_i = y_i$ (isto é, L faz um corte vertical no bolo, trocando-o por dois menores). Analogamente, na sua vez, R pode escolher* ***um*** *dos pares $[x_i \times y_i]$ com $x_i \geq 2$ e dividi-lo em dois pares $[a_i \times y_i]$ e $[b_i \times y_i]$ onde $a_i, b_i \geq 1$ e $a_i + b_i = x_i$. Assim:*

$$\begin{aligned} [1 \times 1] &= \{|\} = 0 \\ [1 \times 2] &= \{[1 \times 1] + [1 \times 1]\,|\} = \{0|\} = 1 \\ [2 \times 2] &= \{[2 \times 1] + [2 \times 1]\,|\,[1 \times 2] + [1 \times 2]\} = \{-2|2\} = 0 \end{aligned}$$

Monte uma tabela com os valores dos bolos $[x_i \times y_i]$ para $0 \leq x_i, y_i \leq 15$. Você vê algum padrão nos valores encontrados?

3. Nim e Nímeros (Finitos)

Os nímeros finitos são definidos por

$$\begin{aligned}
0 &= \{|\} \\
*1 &= * = \{0|0\} \\
2 &= \{0, \mid 0,*\} \\
&... \\
n &= \{0,,...,*(n-1) \mid 0,*,...,*(n-1)\}
\end{aligned}$$

3.1. **PRINCÍPIO DO MENOR EXCLUÍDO.** Seja $S=\{x_i\}$ um conjunto de números naturais. Então

$$\{*x_1,*x_2,...,*x_n \mid *x_1,*x_2,...,*x_n\} = *x$$

onde x é o menor natural que não está presente no conjunto S. Portanto:

Teorema 1 (Sprague-Grundy)**.** *Todo jogo imparcial é um nímero*[3]*.*

3.2. **SOMANDO NÍMEROS.**

- Qualquer nímero $*n$ satisfaz $*n+*n=0$
- Se x_1, x_2, ..., x_n são potências de 2 **distintas**, então

$$*x_1+*x_2+...+*x_n = *(x_1+x_2+...+x_n)$$

Exercício 11. *Por que vale* $*n+*n=0$*?*

Exercício 12. *Explique porque* $m\neq n \Rightarrow *m \neq *n$*.*

Exercício 13. *Explique explicitamente porque o princípio do Menor Excluído vale para o jogo*

$$G=\{0,*,*2,*5,*7 \mid 0,*,*2,*5,*7\}$$

Exercício 14. *Mostre que* $-\frac{1}{2^n} < * < \frac{1}{2^n}$ *para todo* n *natural.*

Exercício 15. *Quem vence um jogo de Nim com* 5 *pilhas de tamanhos* $1,3,5,6$ *e* 7*? Quais os movimentos vencedores?*

[3]Tecnicamente, o teorema vale para jogos com infinitas opções, desde que criemos nímeros como $*\omega=\{*\mathbb{N} \mid *\mathbb{N}\}$ e outros mais "transfinitos".

4. Definições e Teoria Formais

4.1. NOVA DEFINIÇÃO FORMAL DE "JOGO".

- Um jogo G é um par ordenado $\left\{G^L|G^R\right\}$ onde G^L e G^R são **conjuntos** de jogos "previamente definidos".
- Os elementos de $G^L \cup G^R$ são as **opções** de G. Se $H \in G^L$, escreveremos $G \xrightarrow{L} H$ (em um lance, *Left* leva G para H). Se $H \in G^R$, escreveremos $G \xrightarrow{R} H$.
- **Condição Descendente:** não pode haver cadeia infinita $G \xrightarrow{?} G_1 \xrightarrow{?} G_2 \xrightarrow{?} G_3...$

4.2. ALGUNS JOGOS (ORDENADOS POR GERAÇÃO).

$\{\|\} \equiv 0$				
$\{0\|\} \equiv 1$	$\{\|0\} \equiv -1$		$\{0\|0\} \equiv *$	
$\{1\|\} \equiv 2$	$\{\|-1\} \equiv -2$	$\{0\|1\} \equiv \frac{1}{2}$	$\{0,*\|0,*\} \equiv *2$	$\{0\|*\} \equiv \uparrow \quad \{*\|0\} \equiv \downarrow$
$\{n\|\} \equiv n+1$	$\{\|-n\} \equiv -n-1$		$\{0,*,*2,...,*n\|0,*,*2,...,*n\} \equiv *(n+1)$	

4.3. NEGATIVO E SOMA. Temos as seguintes definições recursivas

$$\begin{aligned} -G &\equiv \left\{-G^R | -G^L\right\} \\ G+H &\equiv \left\{G^L+H, G+H^L \mid G^R+H, G+H^R\right\} \\ G-H &\equiv G+(-H) \end{aligned}$$

onde as operações envolvendo conjuntos são feitas para **cada** elemento dos conjuntos citados.

4.4. SINAIS E EQUIVALÊNCIAS. É conveniente defini-los recursivamente, aos pares

$$\begin{array}{lcll} G \geq 0 & : & \textbf{não há } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } R \text{ começa, então } L \text{ ganha} \\ G \leq 0 & : & \textbf{não há } G^L \geq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } L \text{ começa, então } R \text{ ganha} \end{array}$$

Portanto, as negações são

$$\begin{array}{lcll} G \lhd 0 & : & \textbf{algum } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } R \text{ começa, então } R \text{ ganha} \\ G \rhd 0 & : & \textbf{algum } G^L \geq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Se } L \text{ começa, então } L \text{ ganha} \end{array}$$

Daqui tiramos cada um dos 4 sinais via interseções:

$$\begin{array}{lcll} G > 0 & : & \textbf{algum } G^L \geq 0 \text{ e } \textbf{não há } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad L \text{ ganha} \\ G < 0 & : & \textbf{não há } G^L \geq 0 \text{ e } \textbf{algum } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad R \text{ ganha} \\ G = 0 & : & \textbf{não há } G^L \leq 0 \text{ e } \textbf{não há } G^R \geq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Quem começa perde} \\ G \parallel 0 & : & \textbf{algum } G^L \geq 0 \text{ e } \textbf{algum } G^R \leq 0 & \text{(i.e.)} \quad \text{Quem começa ganha} \end{array}$$

Enfim, definimos

$$\begin{array}{ll} G > H \iff G - H > 0 & G < H \iff G - H < 0 \\ G = H \iff G - H = 0 & G \parallel H \iff G - H \parallel 0 \end{array}$$

Usaremos $G \equiv H$ para dois jogos **idênticos**, e $G = H$ para esta última igualdade.

4.5. ROTEIRO DA TEORIA.

Exercício 16. *Mostre que $n+1$ (soma de jogos) é, de fato, $n+1$ (soma de números).*

Exercício 17. *Mostre que $* \parallel 0$, e que $* + * \equiv \{*|*\} = 0$.*

Exercício 18. *Mostre que a adição é comutativa, associativa e tem $\{|\}$ como elemento neutro.*

Exercício 19. *Mostre que $-(-G) \equiv G$.*

Exercício 20. *Mostre que $-(G+H) \equiv (-G)+(-H)$.*

Exercício 21. *Mostre que, se $H \in G^L$, então $H \lhd G$. Analogamente, se $H \in G^R$, então $G \lhd H$. Em suma, abusando a notação, $G^L \lhd G \lhd G^R$. Conclua que $G - G = 0$.*

Exercício 22. *Mostre (pela definição formal ou pela interpretação por jogos) que $G \geq 0$ e $H \geq 0 \Rightarrow G+H \geq 0$.*

Exercício 23. *Mostre (pela definição formal ou pela interpretação por jogos) que $G \geq 0$ e $H \rhd 0 \Rightarrow G+H \rhd 0$.*

Exercício 24. *Mostre que se $G = 0$ então $G+H$ tem o mesmo sinal de H. Conclua que jogos iguais têm o mesmo sinal, e que $G > H \Rightarrow G+K > H+K$.*

Exercício 25. *Mostre que $G \geq H \geq K \Rightarrow G \geq K$.*

Exercício 26. *Mostre que a igualdade é, de fato, uma relação de equivalência.*

Exercício 27. *Mostre que a adição e a simetria são compatíveis com a igualdade, isto é*
a) $G_1 = G_2$ e $H_1 = H_2 \Rightarrow G_1 + H_1 = G_2 + H_2$
b) $G_1 = G_2 \Rightarrow -G_1 = -G_2$.

Exercício 28. *Mostre que $\{...|...\}$ é compatível com a igualdade, isto é, $L_1 = L_2$ e $R_1 = R_2 \Rightarrow \{L_1|R_1\} = \{L_2|R_2\}$.*

Exercício 29. *Mostre via exemplos que $G \rhd 0$ e $H \rhd 0$ não implica nada sobre o sinal de $G+H$!*

5. Tabelas de Sinais; Jogos Subtrativos

5.1. **SINAIS E SOMAS.** A seguinte tabela dá o sinal de $G+H$ baseado nos sinais de G e H:

	$H=0$	$H>0$	$H<0$	$H \parallel 0$
$G=0$	$G+H=0$	$G+H>0$	$G+H<0$	$G+H \parallel 0$
$G>0$	$G+H>0$	$G+H>0$	??	$G+H \rhd 0$
$G<0$	$G+H<0$	??	$G+H<0$	$G+H \lhd 0$
$G \parallel 0$	$G+H \parallel 0$	$G+H \rhd 0$	$G+H \lhd 0$	??

Consequentemente, comparando G e H a um jogo K, temos:

	$K=H$	$K>H$	$K<H$	$K \parallel H$
$G=K$	$G=H$	$G>H$	$G<H$	$G \parallel H$
$G>K$	$G>H$	$G>H$	??	$G \rhd H$
$G<K$	$G<H$	??	$G<H$	$G \lhd H$
$G \parallel K$	$G \parallel H$	$G \rhd H$	$G \lhd H$	??

Em particular, note que

$$G \leq K \lhd H \Rightarrow G \lhd H$$

Exercício 30. *Dê exemplos de jogos $G \parallel 0$ e $H \parallel 0$ cuja soma seja (a) Zero; (b) Positiva; (c) Confusa com zero.*

Exercício 31. *Dê exemplo de jogos $G>0$ e $H<0$ tal que $G+H \parallel 0$.*

5.2. **JOGOS SUBTRATIVOS.** É um jogo de Nim onde o número de palitos retirados tem que estar num conjunto S pré-determinado. Neste caso, S é dito o *conjunto subtrativo* do jogo. Por exemplo, convença-se de que, se $S=\{1,2,3,4\}$, a seguinte tabela dá o valor nimérico $G(n)$ de uma pilha com n palitos:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$G(n)$	0	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	0	$*1$	$*2$	$*3$	$*4$	0	$*1$	...

Os valores niméricos de $G(n)$ (sem as estrelas), são resumidos na *sequência Nim* do conjunto S (costuma-se separar $G(0)$ dos outros valores por um ponto decimal). No exemplo acima, a sequência Nim de $S=\{1,2,3,4\}$ é 0.12340123401234....

Exercício 32. *Determine a sequência Nim dos conjuntos*
a) $S=\{4\}$
b) $S=\{3,4\}$
c) $S=\{2,3,4\}$
d) $S=\{1,4\}$
e) $S=\{2,5,7\}$
Você consegue determinar as "dizimas periódicas" dessas sequências?

Exercício 33. *Num Nim com conjunto subtrativo $S=\{1,4\}$, há quatro pilhas na mesa, de tamanhos 4, 5, 6 e 7. Há movimento vencedor? Qual(is)?*

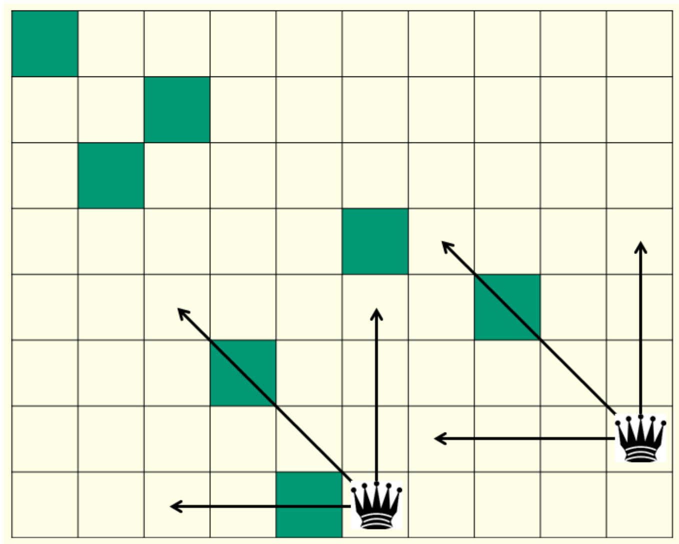
Exercício 34. *Demonstre: se S tem N elementos, sua sequência Nim jamais chega ao número $*(N+1)$.*

Exercício 35. *Demonstre: se S é finito, então sua sequência Nim é periódica (a partir de certo ponto).*

Exercício 36 (Pareamento de Ferguson)**.** *Num Nim com conjunto subtrativo S, mostre que $G(n)=0 \Leftrightarrow G(n+\alpha)=*1$, onde $\alpha=\min S$.*

5.3. **OUTROS JOGOS IMPARCIAIS.**

Exercício 37 (Wyt´s Queens)**.** *a) Uma dama está na casa* (a, b) *de um tabuleiro* 13×13 *(*$0 \leq a, b \leq 12$*). Em cada turno, o jogador da vez move quantas casas quiser em uma das seguintes direções: Norte, Oeste ou Noroeste. Quem levar a dama ao canto Noroeste (que é a casa* $(0, 0)$*) vence. Construa uma tabela com o valor nimérico deste jogo em função de* (a, b)*.*
b) Seja $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *(a famosa razão áurea, que satisfaz* $\tau^2 = \tau + 1$*). Use uma calculadora para calcular a parte inteira (arredonde para baixo) de* $\left(n\tau, n\tau^2\right)$ *onde* $n = 0, 1, 2, 3, ...$*. Você adivinharia, sem demonstrar, o que esta conta está fazendo neste problema?*
c) Posicione 2 *damas nas casas* $(7, 5)$ *e* $(6, 9)$ *como na figura abaixo. Em cada turno, o jogador da vez escolhe uma das damas e a move como no jogo anterior. As damas não interferem uma com a outra, isto é, uma dama pode passar por cima da outra em seu movimento, ou ocupar a mesma casa que a outra. Quem não tiver movimento válido (o que ocorre quando todas as damas estiverem no canto Noroeste) perde. Qual o movimento vencedor?*



Exercício 38 (Kayles)**.** *Num jogo de Kayles, n pinos de boliche aparecem inicialmente enfileirados um ao lado do outro. A cada jogada, você pode usar sua bola de boliche para derrubar ou um pino qualquer, ou dois pinos adjacentes quaisquer (nota: se você derrubou o pino* 2 *entre os pinos* 1 *e* 3*, os pinos* 1 *e* 3 ***não são*** *considerados adjacentes). Como usual, os dois jogadores alternam suas jogadas, e quem derrubar o útlimo pino ganha. Determine o valor nimérico da fila com n pinos, onde* $0 \leq n \leq 23$*. Se você tiver coragem ou capacidade computacional, continue a tabela até* $n = 120$*, escrevendo os números de* 12 *em* 12*. Você vê um padrão de repetição?*

Exercício 39. *Num tabuleiro com n casas enfileiradas, dois jogadores se alternam: a cada lance, o jogador da vez escolhe uma casa vazia* ***que não seja adjacente a uma casa ocupada*** *e põe uma pedra ali. Como sempre, quem não tem movimento válido perde. Determine o valor nimérico* $G(n)$ *deste jogo para* $0 \leq n \leq 10$*.*

6. Simplificações e Forma Canônica

Lema 2. *Lembre que, se* $G \xrightarrow{L} H$*, então* $H \lhd G$*. Analogamente, se* $G \xrightarrow{R} H$*, então* $G \lhd H$*. Abusando a notação, vale:*

$$G^L \lhd G \lhd G^R$$

Lema 3. *Lembre que*

$$G \leq K \lhd H \Rightarrow G \lhd H$$
$$G \lhd K \leq H \Rightarrow G \lhd H$$

Lema 4. *Lembre que*

$$\left.\begin{array}{l} H^L \lhd G \text{ para todo } H^L \\ H \lhd G^R \text{ para todo } G^R \end{array}\right\} \Leftrightarrow H \leq G$$

Teorema 5 (Princípio do Presente de Grego)**.** *Se* $H \lhd G = \left\{G^L \mid G^R\right\} \lhd K$*, então*

$$\left\{H, G^L \mid G^R, K\right\} = \left\{G^L \mid G^R\right\} = G$$

Corolário 6 (Opções Dominadas)**.** *Se* $L_1 \leq L_2$*, então* $\{L_2 \mid R\} = \{L_1, L_2 \mid R\}$*. Se* $R_1 \leq R_2$*, então* $\{L \mid R_1\} = \{L \mid R_1, R_2\}$*.*

Exemplo 7. *Cuidado! Em* $\omega = \{0, 1, 2, ... \mid \}$ *todas as opções são dominadas, mas não podemos removê-las todas!*

Teorema 8 (Opções Reversíveis)**.** *Se* $G \xrightarrow{R} H \xrightarrow{L} K \geq G$*, então*

$$G = \left\{G^L \mid H, ...\right\} = \left\{G^L \mid K^R, ...\right\}$$

isto é, podemos trocar H *por* K^R *na definição de* G*. Analogamente, se* $G \xrightarrow{L} H \xrightarrow{R} K \leq G$ *então*

$$G = \left\{H, ... | G^R\right\} = \left\{K^L, ... | G^R\right\}$$

Nestes casos, dizemos que H *é uma* ***opção reversível****.*

Eliminando opções dominadas e substituindo opções reversíveis, todo jogo com um número finito de posições pode ser reduzido a uma forma canônica.

Exemplo 9. *Seja* $G = \{\uparrow \mid \downarrow\}$ *onde* $\uparrow = \{0 \mid *\}$ *e* $\downarrow = \{* \mid 0\}$*. Vamos mostrar que* $\uparrow$ *é reversível, isto é, que* $G - * \geq 0$*. Ou seja: em* $G + *$*, se* R *começa, então* R *perde:*

$$\text{Se } G \xrightarrow{R} \downarrow \xrightarrow{L} * \text{ deixa } * + * = 0$$

$$\text{Se } * \xrightarrow{R} 0,\ H \xrightarrow{L} \uparrow \text{ deixa } 0 + \uparrow > 0$$

Como $\downarrow$ *é reversível, temos* $G = \{0 \mid \downarrow\}$*. Analogamente, mostra-se que* $\downarrow$ *também é reversível, e portanto*

$$\{\uparrow \mid \downarrow\} = \{0 \mid 0\} = *$$

Exemplo 10. *Vamos calcular* $G = \uparrow + *$ *e escrevê-lo na forma canônica. Temos*

$$G = \uparrow + * = \{0 \mid *\} + \{0 \mid 0\} = \{0 + *, \uparrow + 0 \mid * + *, \uparrow + 0\} = \{*, \uparrow \mid 0, \uparrow\} = \{*, \uparrow \mid 0\}$$

pois $\uparrow$ *é dominada por* 0 *para o jogador* R*. Do lado esquerdo, nenhuma opção domina a outra, pois* $\uparrow \| *$*. No entanto,* $\uparrow = \{0 \mid *\}$ *é reversível pois sua opção à direita* $* < G = \uparrow + *$*. Assim*

$$\boxed{\uparrow + * = \{0, * \mid 0\}}$$

que não pode ser mais reduzida (não tem opções dominadas nem reversíveis).

Exercício 40. *Demonstre o Princípio do Presente de Grego e seu Corolário.*

Exercício 41. *Demonstre o Teorema das Opções Reversíveis.*

Exercício 42. *Mostre que* $* + \uparrow \| 0$ *mas* $* + \uparrow + \uparrow > 0$*.*

Exercício 43. *Escreva* $\{\uparrow \mid \uparrow\}$ *na sua forma canônica e conclua que* $\{\uparrow \mid \uparrow\} = \{0 \mid \uparrow\} = \uparrow + \uparrow + *$*.*

Exercício 44. *Use o princípio do Presente de Grego para ver que* $\{0 \mid \uparrow\} = \{0, \uparrow \mid \uparrow\} = \{\uparrow \mid \uparrow\} = \{2\uparrow \mid \uparrow\} = \{3\uparrow \mid \uparrow\} = 2\uparrow + *$ *.*

7. Números, Switches e Tinies

7.1. **NÚMEROS E SWITCHES.** Um **número** é um jogo $x = \{x^L \mid x^R\}$ onde $x^L < x^R$ são conjuntos de números. Um **switch** é um jogo da forma $\{y \mid z\}$ onde $y > z$ são números.

Teorema 11 (Evasão Numérica Fraca). *Suponha que x é um número mas G não é. Se L pode vencer começando em $G + x$, então L pode vencer movendo em G. Em outras palavras*

$$G + x \rhd 0 \Rightarrow \textit{existe } G^L + x \geq 0$$

Teorema 12. *Se algum número x satisfaz $G^L \lhd x \lhd G^R$ para todo G^L e G^R, então G é um número (de fato, G é o x mais simples satisfazendo a condição).*

Exercício 45. *Mostre que todo switch pode ser re-escrito como*

$$\{y \mid z\} = a + \{x \mid -x\} = a \pm x \textit{ onde } 2a = y + z \textit{ e } 2x = y - z$$

Exercício 46. *[LIP, p.105] Dados números $x_1 > x_2 > ... > x_n > 0$ determine como o sinal de*

$$G = a \pm x_1 \pm x_2 ... \pm x_n$$

depende de a.

Exercício 47. *Calcule ± 0 e $-(\pm x)$. Em outras palavras, qual o valor de $\pm x \pm x$?*

Exercício 48. *[LIP, p.106]Mostre que a forma canônica de $5 \pm 3 \pm 2 \pm 1$ é*

$$\{11|9 \parallel 7|5 \parallel\mid 5|3 \parallel 1| - 1\}$$

7.2. **TINIES E MINIES.** Dado um jogo G, tini-G e mini-G são

$$\begin{aligned} +_G &= \{0 \parallel 0| - G\} \\ -_G &= \{G|0 \parallel 0\} \end{aligned}$$

Exemplo 13. *Note que $+_0 = \uparrow$ e $+_* = \{0 \parallel 0|*\} = \{0| \uparrow\} = 2 \uparrow + *$.*

Um jogo G é **infinitésimo** se $-x < G < x$ para todo número positivo x. Um jogo $G > 0$ é **infinitésimo** com respeito a $H > 0$ se para todo inteiro n tem-se $n \cdot G < H$.

Exercício 49. *Sejam $x > y > 0$ dois números dados. Mostre que:*

- $*$ e $\uparrow$ são infinitésimos;
- $\uparrow$ é infinitésimo com respeito a x;
- $+_x$é infinitésimo com respeito a $\uparrow$;
- $+_x$é infinitésimo com respeito a $+_y$.

Exercício 50. *[LIP, p.114] Seja $x > 0$ um número e $H = \{0 \mid -x\}$*
a) Mostre que $+_x \parallel H$;
b) Mostre que $+_x +_x > H$;
c) Encontre a forma canônica de $+_x +_x$.
d) Encontre a forma canônica de $+_x +_x +_x$ e escreva-a na forma $+_G$.

Exercício 51. *[LIP, p.115] Mostre que, para qualquer jogo G, tem-se*

$$+_{+_{+_G}} = \uparrow$$

e portanto $\uparrow$ é a única solução de $G = +_G$.

8. Stops

8.1. **LEFT AND RIGHT STOPS.** Se L e R jogam um jogo G da melhor maneira possível (começando por L), em algum momento ele se torna um número. Este número (mais um índice: $+$ se R vai jogar no número, $-$ se L vai jogar no número) é o "Left Stop" de G. Analogamente, define-se "Right Stop" quando R começa. Formalmente

$$\begin{aligned} LS(G) &= \begin{cases} x_-, \text{ se } G = x \text{ é um número} \\ \max\left(RS\left(G^L\right)\right) \text{ caso contrário} \end{cases} \\ RS(G) &= \begin{cases} x_+, \text{ se } G = x \text{ é um número} \\ \min\left(LS\left(G^R\right)\right) \text{ caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 52. *[LIP, p.161] Calcule o LS e o RS dos jogos*

$$\begin{aligned} G &= \{\{6|1\}, \{4|\pm 2\} \parallel -3, \{2|-4\}\} \\ H &= \{3, \{4|\pm 2\} \parallel -3, \{-3|-5\}\} \end{aligned}$$

Teorema 14. $LS(G) \geq RS(G)$.

Teorema 15. *Seja x um número. Então:*

$$LS(G) < x \Rightarrow G < x$$
$$LS(G) = x_- \Rightarrow G \leq x$$
$$x < LS(G) \;\; ou \;\; LS(G) = x_+ \Rightarrow x \lhd G$$

Em suma, o "intervalo de confusão" de G é $[(a,b)]$ onde $b > LS(G) = b_? \geq RS(G) = a_? > a$.

Exercício 53. *[LIP, p.163] Mostre que o intervalo de confusão de $G = \{*|-1\}$ é $[-1, 0)$.*

Teorema 16 (Evasão Numérica Fraca)**.** *Suponha que x é um número mas G não é. Então,*

$$G + x$$

se L pode vencer começando em $G + x$, então L pode vencer movendo em G. Em outras palavras

Teorema 17 (Evasão Numérica Forte*)**.** *De fato, para todo x^L, existe $G^L + x > G + x^L$.*

Corolário 18 (Princípio da Translação)**.** *Portanto*

$$G + x = \left\{G^L + x \mid G^R + x\right\}$$

Lema 19.

$$\begin{aligned} RS(G) + RS(H) &\leq RS(G+H) \leq RS(G) + LS(H) \leq \\ &\leq LS(G+H) \leq LS(G) + LS(H) \end{aligned}$$

8.2. **VALOR MÉDIO.** Considere, por exemplo, o jogo $H = \{19|1 \parallel -1\}$. É fácil ver que o intervalo de confusão de $n \cdot H$ é $[n-2, n)$. Isto sugere que, apesar de H ser confuso com $[-1, 1)$, múltiplas cópías de H somadas valem praticamente $+1$ cada. Ou seja, o valor médio de H seria $+1$.

Lema 20 (Fekete)**.** *Seja a_n uma sequência subaditiva de números reais, isto é, tal que*

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n$$

Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *ou*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \left\{\frac{a_n}{n}\right\}$$

Teorema 21. *Todo jogo (curto) G admite números $m(G)$ e t tais que*

$$n \cdot m(G) - t \leq n \cdot G \leq n \cdot m(G) + t$$

para todo n natural. De fato

$$m(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{RS(nG)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{LS(nG)}{n}$$

Teorema 22.

$$m(G+H) = m(G) + m(H)$$

9. Resfriamento e Termógrafos

Dado $t \geq 0$, definimos o *resfriamento de G em t graus*:

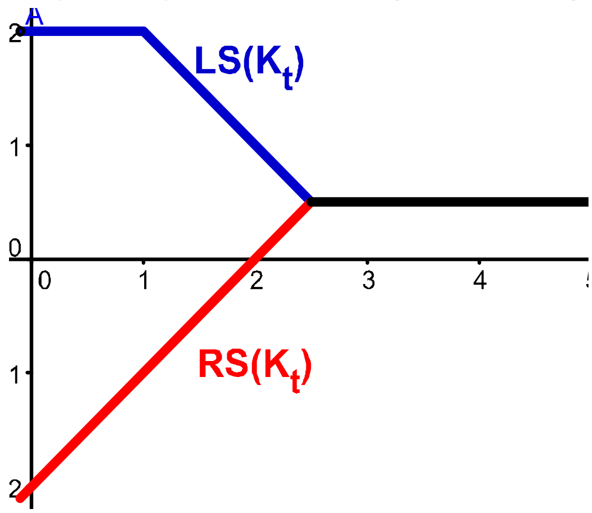
$$G_t = \begin{cases} \left\{G_t^L - t \mid G_t^R + t\right\} \text{ se } t \leq u \text{ onde } LS(G_u) = RS(G_u) \\ LS(G_u) \text{ se } t > u \end{cases}$$

Ou seja: se um jogo é um número, seu resfriamento é ele mesmo; caso contrário, esfriar um jogo t graus é fazer com que cada jogador pague um "imposto" de t pontos a cada lance até o jogo ser (infinitamente próximo de) um número.

- Se $G = x$ é um número, então $G_t = x$ para todo $t \geq 0$.
- Se $H = \pm 3 = \{3 \mid -3\}$, então $H_t = \begin{cases} \pm(3-t), \text{ se } t \leq 3 \\ 0, \text{ se } t > 3 \end{cases}$
- Se $K = \{4|2 \parallel -2\}$, então

$$K_t = \begin{cases} \{4-t \mid 2-t \parallel -2+t\}, \text{ se } t < 1 \\ \{3+* \parallel -1\}, \text{ se } t = 1 \\ \{3-t \parallel -2+t\}, \text{ se } 1 < t < 2.5 \\ \{0.5 \parallel 0.5\} = 0.5+*, \text{ se } t = 2.5 \\ 0.5, \text{ se } t > 2.5 \end{cases}$$

Um *termógrafo de um jogo G* é simplesmente a união dos gráficos de $LS(G_t)$ e $RS(G_t)$, como na figura abaixo. *É de costume girar este gráfico, colocando t apontando para cima, de forma que LS fica à esquerda de RS.*



Definimos a *temperatura* $u = t(G)$ de um jogo G como o menor u tal que $LS(G_u) = RS(G_u)$. Definimos o *mastro* $M(G)$ de um jogo como o número $M(G) = G_t$ para $t > u$.

Exercício 54. *Mostre que todo jogo finito G tem uma temperatura.*

Note que:

- Se $G = x$ é um número, então $t(G) = 0$ e $LS(G_t) = RS(G_t) = x$ para todo $t \geq 0$.
- Senão, $LS(G_t) = \max\left(RS\left(G_t^L\right) - t\right)$ e $RS(G_t) = \min\left(LS\left(G_t^R\right) + t\right)$ **enquanto** $t < t(G)$! Se $t \geq t(G)$, então $LS(G_t) = RS(G_t) = LS\left(G_{t(G)}\right)$.

Exercício 55. *Mostre que o gráfico de LS é uma linha poligonal cujos lados têm inclinação 0 ou -1. Analogamente, RS é uma poligonal com inclinação 0 ou 1. Em particular, $LS(G_t) \leq M(G) \leq RS(G_t)$.*

Exercício 56. *Esboce nos mesmos eixos os termógrafos de $H = \{4|1\}$, $K = \{-1|-2\}$ e de $G = \{2, H \parallel K\}$*

Exercício 57. *Esboce os termógrafos de $X = \pm 1$, $Y = \{1, 1+X \mid -1, -1+X\}$ e $X+Y$. Quais são os lances vencedores para L em $X+Y-1$?*

Teorema 23. *O resfriamento é "aditivo": $(G+H)_t = G_t + H_t$.*

Teorema 24. *Temperatura da soma: $t(G+H) \leq \max(t(G), t(H))$.*

Teorema 25. *O mastro e a média de um jogo são iguais: $M(G) = m(G)$.*

Em suma, desenhar um termógrafo é uma maneira de calcular a média de um jogo!