# Errata do Livro Álgebra Linear (Exercícios e Soluções)

Ralph Costa Teixeira

Agosto 2022

## 1 Agradecimentos

Agradecemos a André von Borries e Vanderlei Marcos do Nascimento por contribuir com correções aplicadas à 3a edição, e agradecemos especialmente ao Prof. Diego Kian que corrigiu **muitos** (muitos!) dos erros citados aqui, e outros inúmeros pequenos erros tipográficos, todos consertados na 4a edição. :D

## 2 Definições e Enunciados

**p.71:** na definição 92: "...com *PRODUTOS* internos.... **única** *TRANSFORMAÇÃO* linear..."
**pp. 91-96**: o título da Seção 14 deveria ser *OPERADORES ORTOGONAIS*.

## 3 Soluções

1.6)
É só fazer a conta mesmo, sério. Assim, tem-se $u = (1 - 6 + 6 - 1, 2 - 3 + 6 - 5, 1 - 6 + 4 + 1) = (0, 0, 0)$, $v = (1 + 2 - 3 - 1, 2 + 1 - 3 - 5, 1 + 2 - 2 + 1) = (-1, -5, 2)$ e $w = \left(3 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}, 3 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3}, 2 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) = (1, 0, 0)$.
*Para pensar: estes 3 vetores $u$, $v$ e $w$ foram definidos como $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4$. Será que todos os vetores do $R^3$ podem ser escritos nesta forma? Resposta: para estes vetores $v_1$, $v_2$, $v_3$ e $v_4$, sim!*
**(Trocar $+1$ por $-5$ no segundo termo de $u$; a resposta é $(0, 0, 0)$ ao invés de $(0, 5, 0)$ para $u$)**

1.12b)
**Distributividade FALHA**: $(\alpha + \beta) u = ((\alpha + \beta) x_1, (\alpha + \beta) y_1)$ e $\alpha u + \beta u = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) = \left(\alpha\beta x_1^2, \alpha\beta y_1^2\right)$ não são necessariamente iguais.
**Segunda parte da distributividade também FALHA**: $\alpha (u + v) = \alpha (x_1y_1, x_2y_2) = (\alpha x_1y_1, \alpha x_2y_2)$ e $\alpha u + \alpha v = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \left(\alpha^2 x_1x_2, \alpha^2 y_1y_2\right)$ não são sempre iguais.
1.12c)
**Vetor nulo NÃO HÁ**, pois $(a, b) + (x_1, y_1) = (3a + 3x_1, 5a + 5x_1) = (x_1, y_1) \Rightarrow a = -2x_1/3$ e o vetor nulo $(a, b)$ tinha que ser o mesmo para qualquer vetor $v$ dado.
Consequentemente, **não faz sentido falar em inverso aditivo**.

1.21a)

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m \text{ onde } \sum \alpha_i = 1 \text{ e } u_1, ..., u_m \in X \\ v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n u_n \text{ onde } \sum \beta_j = 1 \text{ e } v_1, ..., v_n \in X \end{aligned}$$

**Trocar $\sum u_i$ e $\sum v_j$ por $\sum \alpha_i$ e $\sum \beta_j$, respectivamente.**

---

2.3f) "... a soma é direta quando $Nuc(X) \cap Nuc(Y) = \{0\}$". **Trocar $\emptyset$ por $\{0\}$.**
"Assim, $E = F \oplus G$ se e somente se...". **Trocar por $Nuc(X) \oplus Nuc(Y)$.**

2.18) "... a partir do momento que $F \neq \emptyset$...". **Trocar $\equiv$ por $\neq$.**

2.22) "... e $v_2 \in F_2$ tal que $v_2 \notin F_1$". **Trocar por $F_2$ por $F_1$ no final.**

2.28d) **Trocar $g(f(x)) = f(x)$ por $f(g(x)) = g(x)$.**

2.34) **Deveria ser $F_1 \subseteq G_1$ e $F_2 \subseteq G_2$.**

2.36) **Todos os $Q$ deviam ser $Q_n$.**

---

3.33) "$a = e_{11} + e_{22} - e_{12} - e_{21}$", **trocar o primeiro $e_{12}$ por $e_{11}$.**

---

4.6)

Monte um sistema de equações: $A(1,2) = (a+2b, c+2d) = (1,1)$ e $A(3,4) = (3a+4b, 3c+4d) = (2,2)$. Resolva-o para encontrar $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$ e $d = \frac{1}{2}$.

4.8) Devia ser $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, com 2 **no lugar do** 12.

4.13) Devia ser

$$\begin{aligned}(a,0)+(0,0)+(0,c)+(0,0) &= (0,0) \Rightarrow a = c = 0\\ (0,0)+(b,0)+(0,0)+(0,d) &= (0,0) \Rightarrow b = d = 0\end{aligned}$$

**Trocar $b$ com $c$ no final.**

4.21) Basta escrever os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ como combinação linear de $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (2,3)$ e então usar a linearidade de $f$. Resolva um par de sistemas para descobrir que $e_1 = 3v_1 - v_2$ e $e_2 = -2v_1 + v_2$. Como $f$ é linear, $f(1,0) = 3f(1,1) - f(2,3) = 3.3 - 1 = 8$ e $f(0,1) = -2f(1,1) + f(2,3) = -2.3 + 1 = -5$.

**(Com $v_2$ ao invés de $e_2$ na expressão $e_2 = -2v_1 + v_2$)**

4.23) **Devia ser $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ no lugar de $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$.**

---

5.7)

$$A^3(x,y,z) = A^2(ay+bz, cz, 0) = A(acz, 0, 0) = (0,0,0)$$

**(Com $acz$ ao invés de $acy$.)**

---

6.20a) Devia ser $(a+b, c, a+c, b)$ no lugar de $(a+b, c, b+c, b)$, **trocando o segundo $b$ por $a$.**

6.22; 20b) "Assim, $Nuc(B) = \{(a, -a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ e uma base de $N(B)$ é $\{(1,-1,-1,1)\}$". **Trocar os sinais da 3a e 4a coordenadas.**

6.23) "$p(x) = a_k x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$", **com o somatório iniciando de** 0.

6.32) "...isomorfo a $R^{n+1} \times R$"**no lugar de** $R^n \times R$. Em seguida: "$E_2$ é isomorfo a $R^{n+2}$ e $\dim E_2 = n+2$", **com $E_2$ no lugar de $B$ e $n+1$ no lugar de $n$.**

6.34) Devia ser "$f(u_n) = 1$", e depois "$g(w_n) = 1$". **Trocar 0 por 1.**

6.38) **Trocar todos os intervalos $[0, +\infty]$ por $[0, +\infty)$.**

---

8.13a) "Tome $A, B : R^2 \to R^2$ com $A(x,y) = (x,0)$ e $B(x,y) = (0,y)$."

8.33) $C_3 = aL_1 + bL_3$. **Trocar $L_2$ por $L_3$.**

---

9.2)

$$Pu_3 = (3,2,0,0) = 3e_1 + 2e_2 = \frac{34}{105}u_1 - \frac{16}{21}u_2 + \frac{109}{105}u_3 + \frac{8}{35}u_4$$

**Trocar $-89$ por $+109$.**

10.8)

$$
\begin{aligned}
... &= -\frac{1}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10} \\
... &= \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}
$$

**Eliminar os "5"dos numeradores e jogar para os denominadores.**

10.27b/c)

$$
\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}
$$

**Todos os sinais estavam trocados.**

11.1) "Portanto, $AA^*$ é injetiva". **Eliminar $v$.**

11.2b)

$$
B(x,y,z,t) = (x + 37y - 6z + 53t, 37x - 36y - 59z - 6t)
$$

**Trocar 27 por 37.**

11.20) Enfim

$$
w = w_1 - \frac{\langle w_1, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u - \frac{\langle w_1, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = ...
$$

**Trocar $w$ por $w_1$ (exceto o primeiro).**

12.28) Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ autovetores correspondentes aos $n$ autovalores distintos. Sabemos que eles têm de ser L.I., e portanto formam uma base de $E$. Note que cada subconjunto de $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gera um subespaço de $E$ que será também invariante por $A$ (incluindo o subconjunto vazio, que gera $\{0\}$, e o conjunto todo, que gera $E$). Como há $2^n$ subconjuntos de $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, temos $2^n$ subespaços invariantes por $A$.

Por outro lado, seja $F$ um subespaço de $E$ invariante por $A$. Precisamos mostrar que $F$ é um dos subespaços mencionados no parágrafo anterior.

Em primeiro lugar, provemos que os subespaços invariantes $G$ de dimensão 2 contêm pelo menos um autovetor. De fato, tome um vetor $u \in G - \{0\}$ e escreva $u$ em termo dos autovetores descartando coeficientes nulos:

$$
u = \sum_{i=1}^{p} a_i v_i \text{ onde } a_1, a_2, ..., a_p \neq 0
$$

(onde reordenamos os autovetores para facilitar a notação). Se $p = 1$, temos $v_1 = \frac{u}{a_1} \in G$ e acabou. Se $p = 2$, temos

$$
\begin{aligned}
u &= a_1 v_1 + a_2 v_2 \\
Au &= a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 \in G \text{ (pois } G \text{ é invariante)}
\end{aligned}
$$

portanto $v_1 = \frac{\lambda_2 u - Au}{a_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \in G$ (note que $a_1 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Enfim, mostremos que não pode ser $p \geq 3$. De fato, como $\dim G = 2$, os vetores $u, Au, A^2u \in G$ devem ser dependentes. Ou seja, existem constantes $\alpha, \beta, \gamma$ não todas nulas com

$$
\begin{aligned}
\alpha u + \beta Au + \gamma A^2 u &= 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \alpha \sum_{i=1}^{p} a_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_i v_i + \gamma \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_i^2 v_i = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i \left(\alpha + \beta \lambda_i + \gamma \lambda_i^2\right) v_i = 0.
\end{aligned}
$$

Mas sendo os $v_i$ linearmente independentes e $a_i \neq 0$, isto implica

$$
\alpha + \beta \lambda_i + \gamma \lambda_i^2 = 0 \text{ para } i = 1, 2, ..., p
$$

o que é absurdo, pois o polinômio não-nulo $p(\lambda) = \gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha$ tem grau (no máximo) 2 e portanto menos que 3 raízes reais.

Agora voltemos ao problema original usando indução na dimensão de $F$. Se $\dim F = 0$, temos $F = \{0\}$ e acabou; se $\dim F = 1$, temos $F = S(\{v_i\})$ para algum autovetor $v_i$ e acabou. Enfim, suponha que todo subespaço invariante de dimensão $k$ é gerado por autovetores, e tome $F$ invariante com $\dim F = k+1$. Precisamos mostrar que $F$ é gerado por autovetores.

Note que $F$ deve conter **algum** autovetor. De fato, $F$ deve ter um subespaço invariante de dimensão 1 (feito!) ou 2 (e este espaço de dimensão 2 conteria um autovetor pelo exposto acima). Para facilitar, suporemos $v_1 \in F$.

Agora escreva $F_1 = S(\{v_1\})$ e $F_2 = S(\{v_2, ..., v_n\})$. Claramente $F_1$ e $F_2$ são invariantes, portanto $G_1 = F \cap F_1$ e $G_2 = F \cap F_2$ também o são. Afirmamos que

$$F = G_1 \oplus G_2.$$

Claramente $G_1 \cap G_2 = \{0\}$ e também $G_1, G_2 \subseteq F \Rightarrow G_1 + G_2 \subseteq F$. Por outro lado, se $w \in F$, escreva

$$w = c_1 v_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k v_k.$$

Como $v_1 \in F$, temos $w - c_1 v_1 \in F$ e portanto $u = \sum_{k=2}^{n} c_k v_k \in F$. Assim

$$w = c_1 v_1 + u$$

onde $c_1 v_1 \in G_1$ e $u \in G_2$, mostrando que $F \subseteq G_1 + G_2$.

Agora terminamos o passo de indução: como $\dim G_1 = 1$, temos $\dim G_2 = \dim F - \dim G_1 = k$. Sabemos que $G_1 = S(\{v_1\})$ e, por hipótese de indução, $G_2$ vai ser gerado por algum conjunto $\beta$ de autovetores. Assim, $F = G_1 + G_2$ será gerado por $\{v_1\} \cup \beta$, um conjunto de autovetores. Ufa!

12.33) Seja $A : E \to E$ um operador linear de posto 1. Com $n = 1$ o problema não tem graça, então suponhamos $n \geq 2$. Como $\dim N(A) = n - \dim \operatorname{Im} A = n - 1$, devemos ter uma base do núcleo com $n-1$ autovetores L.I. de autovalor 0, digamos, $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$. Complete esta conjunto para uma base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $E$. Então, a matriz de $A$ na base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ será do tipo

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & x_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x_n \end{bmatrix}$$

onde $w = Av_n = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n \neq 0$ (se fosse $w = 0$ o posto seria 0). Assim, $tr(A) = 0 + 0 + ... + x_n = x_n$ (note que o traço da matriz que representa o operador $A$ não muda à medida que mudamos a base escolhida para representá-lo; veja problema 8.37). Por outro lado

$$Aw = A(x_1 v_1 + ... + x_n v_n) = A(x_n v_n) = x_n A v_n = x_n w$$

e $w$ é o autovetor procurado.

---

13.8 ii).

$$2a - b = 2c + 1$$

**Trocar o sinal do $2c$.**

13.8 iii)

$$2b - d = 2e + 1$$

**Trocar o sinal do $2e$.**

13.32)

$$|Au| + |Bu| \leq a + b$$

**Trocar $=$ por $\leq$.**

Assim, $\|A + B\| \leq a + b = \|A\| + \|B\|$. **Novamente, trocar $=$ por $\leq$.**

**Acrecsecntar ao final:** "Enfim, para o exemplo, basta tomar $A(x, y) = (0, x)$. É fácil ver que $\|A\| = 1$ mas $A^2 = 0$".

13.33) Pelo exercício 11.17, se $\mathbf{t}$ é uma matriz do operador $T$ numa base ortogonal, temos

$$|T| = \sum_{i,j} \mathbf{t}_{ij}^2.$$

Assim, sejam $\mathbf{b}_{m\times n}$ e $\mathbf{a}_{n\times p}$ as matrizes de $B$ e $A$ na base canônica. Denote as linhas de $\mathbf{b}$ por $l_1, l_2, ..., l_m \in \mathbb{R}^n$, e as colunas de $\mathbf{a}$ por $c_1, c_2, ..., c_p \in \mathbb{R}^n$. Portanto:

$$\begin{aligned} |BA|^2 &= \sum_{i,j} (\mathbf{ba})_{ij}^2 = \sum_{i,j} \langle l_i, c_j \rangle^2 \leq \\ &\leq \sum_{i,j} |l_i|^2 |c_j|^2 = \sum_i |l_i|^2 \sum_j |c_j|^2 = |B|^2 |A|^2 \end{aligned}$$

onde aplicamos a desigualdade de Schwarz ao produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

---

14.10) "...note que $Av = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle} u$". **Acrescentar $v$ em $Av$.**

14.18) "...podemos encontrar $v \in E$ não nulo tal que...". **Acrescentar não nulo.**

14.19) Seja $u = (x, y, z)$... **Trocar $(a, b, c)$ por $(x, y, z)$.**
**Ao final, trocar os sinais de ambos $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ na matriz de $A$.**

14.21)

$$\left(ax^T + xa^T\right) + \lambda \left(ay^T + ya^T\right)$$

**Faltaram $T$ em $x$ e $y$.**

---

15.7) **Trocar 13 por 14 e vice-versa.**

15.10)

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Trocar 2 por $-2$ e vice-versa na matriz da direita.**

---

18.1d) ...cujo núcleo é $\{b\}^\perp$. **Trocar $v$ por $b$.**

18.7, volta: Seja $\alpha = b(v_1, v_2)$. **Trocar $f$ por $b$.**

---

20.10) ...para todo $v$, $PAPB = PBPA$. **Trocar $PA = PB$ por esta igualdade.**

20.11)

$$\begin{aligned} a - 2I &= \text{... base:} \{(-3, -3, 1)\} \\ & \quad \text{...na base } \{(1,0,0), (0,2,-1), (-3,-3,1)\} \ldots \end{aligned}$$

**Trocar ambos 3 por $-3$.**

$$\begin{aligned} A(0,2,-1) &= (1,2,-1) = (1,0,0) + (0,2,-1) \\ A(-3,-3,1) &= (-6,-6,2) = 2(-3,-3,1) \end{aligned}$$

**Trocar 1 por 0 na linha de cima, e os 3 sinais das primeiras coordenadas na linha de baixo.**

---

22.18) **Trocar $\Leftarrow$ por $\Longleftrightarrow$.**

22.20) Claramente, $A^k v = \sum_{i=1}^n \beta_i A^k u_i$. **Trocar $j$ por $i$.**