

Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Julho, 1998

Índice

I	Notação, Conceitos Básicos, Métodos Variacionais e Problemas Unidimensionais	1
1	Motivação e Conceitos Básicos	3
1.1	Introdução	3
1.2	Formulação do Problema Básico	3
1.3	Conceitos Básicos	4
1.3.1	Espaços Vetoriais	5
1.3.2	Subespaços, dependência linear e dimensão	7
1.3.3	Espaços Normados	8
1.3.4	Espaços com Produto Interno	12
1.3.5	Operadores	15
1.3.6	Operadores Lineares	17
1.3.7	Operadores simétricos	19
1.3.8	Operadores positivos definidos	20
1.3.9	Operadores Limitados Inferiormemente	22
1.3.10	Convergência. Completude	24
1.3.11	Funcionais	29
2	Métodos Variacionais para a Determinação de Soluções Aproximadas de Problemas de Valor de Contorno	31
2.1	Introdução	31
2.2	Método dos Resíduos Ponderados	32
2.2.1	Método de Colocação	34
2.2.2	Método de Galerkin	38
2.3	Método de Ritz	57
2.3.1	Mínimo de um Funcional	57
2.3.2	Sequências Minimizantes	61
2.3.3	Método de Ritz	63
2.4	Método de Mínimos Quadrados	78
2.5	Conclusões	80
3	Problemas Unidimensionais	83
3.1	Problemas de Valor de Contorno Unidimensionais	83

3.2	Formulação Variacional	84
4	Métodos Variacionais	89
4.1	Método de Galerkin	89
4.2	O Método dos Elementos Finitos	91
4.2.1	Expressão de K e F em Função de φ^e	94
4.2.2	Descrição da Organização do Programa de Elementos Finitos	96
4.3	Exemplos	97
II	Formulação Variacional e sua Aplicação em Mecânica	111
5	A Formulação Variacional	113
5.1	Introdução	113
5.2	Cinemática	114
5.2.1	Deformações	114
5.2.2	Movimento. Taxa de Deformação	118
5.2.3	Ações de Movimento. Restrições Cinemáticas	123
5.3	Dualidade entre Forças e Ações de Movimento.	126
5.4	Dualidade entre Esforços Internos e Taxas de Deformação	127
5.5	Equilíbrio e Compatibilidade em Corpos Livres	129
5.5.1	Princípio da Potência Virtual	130
5.5.2	O Teorema da Representação	131
5.5.3	Princípio da Potência Virtual Complementar	134
5.6	Equilíbrio e Compatibilidade em Corpos com Restrições Bilaterais	135
5.6.1	Princípio da Potência Virtual	135
5.6.2	O Teorema da Representação	137
5.6.3	Princípio da Potência Virtual Complementar	139
6	Torção de Barras	143
6.1	Objetivos	143
6.2	Hipóteses Cinemáticas	143
6.3	Formulação Primal	146
6.4	Formulação Dual	150
6.5	Implementação Numérica	156
6.6	Exemplos	159
7	Outros Problemas de Campo	169
7.1	Introdução	169
7.2	Condução Estacionária de Calor	169
7.2.1	Principais Elementos Matemáticos	169
7.2.2	Formulação Primal	171
7.2.3	Formulação Dual	175
7.2.4	Equação Constitutiva. A Lei de Fourier	177

7.2.5	Exemplos	178
7.3	Escoamento de Fluidos	178
7.3.1	O PPV para o Escoamento de Fluidos	179
7.3.2	Escoamento Potencial	186
7.3.3	Exemplos	189
8	Estimativas de Erro e Malhas Adaptativas	195
8.1	Introdução	195
8.2	Propriedades da Formulação Variacional	195
8.3	Comportamento da Solução. Propriedades e Estimadores “a priori” do Erro . .	201
8.4	Análise Adaptativa	204
8.5	Estimativa “a posteriori” do Erro	205
8.6	Suavização de Tensões	207
8.7	Estratégia de Refinamento	209
8.8	Geração da Nova Malha	210
8.9	Exemplos	211

Parte I

Notação, Conceitos Básicos, Métodos Variacionais e Problemas Unidimensionais

Capítulo 1

Motivação e Conceitos Básicos

1.1 Introdução

1.2 Formulação do Problema Básico

A necessidade de técnicas para a aproximação de funções surge por diversas razões. Entre elas, a possibilidade de determinar uma solução aproximada de uma certa equação diferencial.

Considere, por exemplo, o problema de determinar o deslocamento transversal, u , de uma viga de comprimento L submetida a uma carga distribuída q . Quando o material da viga é elástico e dentro da teoria de pequenas deformações, este problema está definido pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = q \quad x \in (0, L) \quad (1.1)$$

onde E é o módulo de Young e I o momento de inércia da seção transversal.

O problema consistirá em determinar uma função $u = u(x)$ satisfazendo a equação (1.1). Pode-se observar, entretanto, que existindo uma solução para (1.1), existirão infinitas soluções (se u é solução então $u + v$, onde v é uma função linear em x , também é uma solução) pois o problema ainda não foi totalmente definido, sendo necessárias outras informações.

Estas informações adicionais estão associadas ao valor que a possível solução u e/ou suas derivadas, inclusive até a terceira ordem, assumem nos extremos do intervalo $(0, L)$, ou seja, para $x = 0$ e $x = L$. Assim, por exemplo, pode-se estabelecer que,

$$u(0) = \frac{du(0)}{dx} = u(L) = \frac{du(L)}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

onde este tipo de restrição corresponde ao caso de uma viga *engastada* em ambas extremidades.

Da mesma maneira, pode-se escrever para uma viga *bi-apoiada*,

$$u(0) = \frac{d^2 u(0)}{dx^2} = u(L) = \frac{d^2 u(L)}{dx^2} = 0$$

ou, ainda para uma viga em *balanço* com uma carga P na extremidade livre,

$$u(0) = \frac{du(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 u(L)}{dx^2} = 0, \quad EI \frac{d^3 u(L)}{dx^3} = P$$

O problema inicialmente apresentado está assim colocado: determinar a função $u = u(x)$ definida no domínio $[0, L]$, tal que satisfazendo as restrições nos extremos $x = 0$ e $x = L$, satisfaça a equação diferencial (1.1). Estas restrições recebem o nome de *condições de contorno* e o conjunto formado pela equação diferencial (1.1) e as condições de contorno é conhecido como *problema de valor de contorno* (PVC).

Supondo que este problema de valor de contorno tem uma única solução, surge imediatamente uma primeira pergunta:

1. Como encontrar esta solução $u = u(x)$?

Quem já trabalhou com equações diferenciais sabe que a resposta não é simples. Para determinados valores dos coeficientes $E(x)$, $I(x)$ e do termo independente $q(x)$, uma solução analítica pode não ser encontrada para o PVC considerado. Em geral, pode-se dizer que a determinação desta solução requer uma grande familiaridade com os diferentes procedimentos matemáticos adequados a um ou outro tipo de equação diferencial.

Dado o caso de não se poder determinar uma solução exata, seja porque a mesma não pode ser determinada analiticamente ou porque não se está familiarizado com os procedimentos matemáticos adequados para a sua determinação, surge a necessidade de determinar uma função que de alguma maneira seja uma *boa aproximação* da solução. Esta necessidade dá lugar a uma série de novas perguntas:

2. Dada uma função $u = u(x)$, o que se entende por uma boa aproximação de $u = u(x)$?
3. É possível determinar uma solução aproximada, u^a , da solução do PVC considerado?
4. De todas estas soluções aproximadas, é possível determinar a que melhor se aproxima? E, caso afirmativo, como calcula-la?

Ao longo deste texto, trataremos de responder todas estas perguntas.

1.3 Conceitos Básicos

Como colocado anteriormente, um PVC consiste em determinar u tal que satisfaça a equação diferencial e certas condições de contorno. Esta função u estará definida em um certo *domínio*. Se esta função depende de uma única variável independente, o domínio será um intervalo aberto, no exemplo considerado $(0, L)$; se depende de duas variáveis o domínio será uma superfície; se depende de três variáveis será um volume; etc. Por sua vez, neste domínio não foi incluído o seu *contorno*.

Seguindo esta idéia geral, pode-se dizer que um domínio é um conjunto de pontos do espaço caracterizados pelas seguintes propriedades:

1. se x pertence ao domínio, logo todo ponto y suficientemente próximo pertence também ao domínio;
2. dois pontos arbitrários do domínio sempre podem ser unidos por uma curva contida inteiramente no domínio.

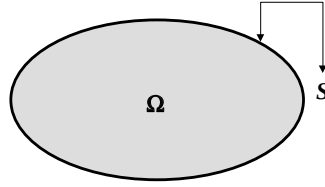


Figura 1.1: Domínio e seu contorno.

Matematicamente, a propriedade 1 é equivalente a dizer que todos os pontos do domínio são interiores e a segunda é que o domínio é conexo.

O *contorno* do domínio está definido como um conjunto de pontos tal que toda vizinhança de cada um deles contém pontos que estão e que não estão no domínio.

Daqui por diante, denota-se por Ω todo o domínio sendo S o seu contorno, como ilustrado na Figura 1.1.

Ao longo deste texto, limita-se ao caso de contornos suaves ou suaves por parte. Um círculo ou uma elipse são exemplos clássicos de um contorno suave, enquanto um contorno poligonal é um exemplo de contorno suave por partes.

A união dos conjuntos Ω e S definem o domínio fechado $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. Por sua vez, considera-se neste texto somente o caso de domínios limitados, ou seja, domínios que podem sempre ser incluídos em uma esfera de raio adequado.

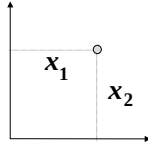
Pode-se notar que este tipo de domínio é usual em problemas de Engenharia, onde o domínio não é outra coisa que a estrutura/componente que se está analisando.

Antes de explicar o que se entenderá por aproximação, será necessário introduzir alguns outros conceitos, tal como *espaço vetorial*, *norma* e *espaços normados*.

1.3.1 Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial X é um conjunto não-vazio de elementos, chamados *vetores*, sob os quais definem-se as seguintes operações de adição e multiplicação por um número real, satisfazendo as seguintes condições e axiomas:

1. para todo $x, y \in X$, $x + y \in X$;
2. $x + y = y + x$, propriedade comutativa;
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$, propriedade associativa;
4. existe em X um elemento nulo $0 \in X$, tal que para todo $x \in X$ resulta $x + 0 = x$;
5. para todo $x \in X$ existe o seu elemento *inverso*, designado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$;
6. a multiplicação de números reais por elementos de X está definida, ou seja $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ é campo de números reais) e todo $x \in X$, o vetor $\alpha x \in X$;

Figura 1.2: Plano E^2 .

7. dados $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ e $x, y \in X$, tem-se as propriedades distributivas em relação ao produto por um número real $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ e à adição $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
8. $1x = x$, onde 1 é a identidade em $\mathfrak{R}$.

Exemplo 1.1 O plano real E^2 . Seja $X = E^2$ o conjunto de todos os pares ordenados (x_1, x_2) , x_1 e $x_2 \in \mathfrak{R}$ são chamados de coordenadas do ponto ou vetor x , conforme ilustrado na Figura 1.2. Se a adição e multiplicação são definidas de maneira usual,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{aligned}$$

o conjunto $X = E^2$ resulta num espaço vetorial, onde o elemento nulo é $0 = (0, 0)$, e o inverso a x é $-x = (-x_1, -x_2)$.

Exercício 1.1 Seja $C[a, b]$ o conjunto de todas as funções contínuas de valor real definidas no intervalo $[a, b]$. Definindo-se a adição e multiplicação por um número real da forma usual, ou seja, se $f, g \in C[a, b]$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$ então $f + g$ e αf estão definidos por:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) & x \in [a, b] \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) & x \in [a, b] \end{aligned}$$

mostrar que o conjunto $C[a, b]$ assim definido é um espaço vetorial.

Exercício 1.2 Se $PC[a, b]$ é o conjunto de todas as funções contínuas por partes em $[a, b]$. Dizemos que uma função f é contínua por parte em $[a, b]$, se e somente se tem um número finito de descontinuidades e $\int_a^b f(x) dx < \infty$. Para a adição e multiplicação por escalar definidos no Exercício 1.1, demonstre que $PC[a, b]$ é um espaço vetorial. Como é o elemento nulo em $PC[a, b]$?

Exercício 1.3 Seja $P_n[a, b]$ o conjunto formado por todos os polinômios de grau n ou menor definidos em $[a, b]$. Com a definição usual da adição entre polinômios e multiplicação por um número, demonstre que $P_n[a, b]$ é um espaço vetorial.

1.3.2 Subespaços, dependência linear e dimensão

Considere o espaço vetorial X e seja Y um subconjunto não-vazio de X , tal que para todo $y_1, y_2 \in Y$ e todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ resulta $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Neste caso, observa-se que Y é em si mesmo um espaço vetorial onde as operações de adição e multiplicação por um número real foram induzidas por X . Diz-se que Y é um *subespaço vetorial* de X . Pode-se notar que o elemento nulo de X também pertence a Y . Como exemplos de subespaços do espaço vetorial E^3 , citam-se a reta ou o plano que passam pela origem das coordenadas.

A *combinação linear* dos vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$, pertencentes ao espaço vetorial X , é um vetor de X definida pela expressão

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

onde $\alpha_i, i = 1, \dots, n \in \mathfrak{R}$ são arbitrários.

Introduzida a definição de combinação linear de vetores, define-se um conjunto de vetores linearmente independentes. O conjunto de vetores $\{x_i\}_{i=1,n}$ é linearmente independente se a combinação,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

é igual ao elemento nulo 0 se e somente se $\alpha_i = 0$ para todos os valores de $i = 1, 2, \dots, n$. Reciprocamente, diz-se que um conjunto de vetores é linearmente dependente se o mesmo não é linearmente independente.

Considere, agora, um subconjunto não-vazio $M \subset X$, X espaço vetorial. O conjunto formado por todas as combinações lineares dos elementos de M é chamado de $\text{span}M$, ou seja,

$$\text{span}M = \left\{ x; x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in \mathfrak{R}, x_i \in M \right\}$$

obviamente $\text{span}M$ é um *subespaço* de X , sendo chamado também *subespaço gerado por M* .

Um espaço vetorial X se diz de *dimensão finita* se existe um número inteiro positivo n , para o qual existe em X um conjunto de n vetores linearmente independentes e todo conjunto com $n + 1$ vetores é linearmente dependente. Desta maneira, X tem dimensão n sendo denotado por $\dim X = n$. Em particular, se X é um espaço nulo ($X = \{0\}$), diz-se que sua dimensão é $\dim X = 0$. Se X não é um espaço de dimensão finita, diz-se que o mesmo é de dimensão infinita.

Ao longo destas notas, observa-se a importância de ambos os tipos de espaços. Assim, por exemplo, um certo PVC é equivalente a minimizar uma função definida, em geral, num espaço vetorial de dimensão infinita. A solução aproximada será, por outro lado, calculada sobre um espaço de dimensão finita.

Exemplos de espaços de dimensão infinita podem ser o espaço $C[a, b]$ ou $PC[a, b]$. Entre os espaços de dimensão finita, tem-se o espaço Euclidiano Tridimensional E^3 com $\dim E^3 = 3$ e o espaço de polinômios P_n com $\dim P_n = n$.

Se $\dim X = n$, logo um conjunto linearmente independente de n vetores formam uma *base* de X . Neste caso, todo elemento $x \in X$ pode ser representado em forma única com uma

combinação linear dos vetores bases. Assim, se $\{x_i\}_{i=1,n}$ é uma base de X ($\dim X = n$), logo todo $x \in X$ arbitrário pode ser expresso como:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \alpha_i \in \mathfrak{R} \text{ são únicos}$$

onde os $\alpha_i, i \leq n$ são as *componentes* de x na base $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Exercício 1.4 *Demonstre que dado o espaço vetorial X tal que $\dim X = n$ e sendo $\{x_i\}_{i=1,n}$ uma base de X , todo vetor $x \in X$ pode ser representado através de uma **única combinação linear**:*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

Em geral, pode-se dizer que se X é um espaço vetorial, não necessariamente de dimensão finita, e B é um subconjunto de X linearmente independente, tal que $\text{span} B = X$, logo B é uma base de X . Todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ **tem uma base**. A existência de uma base para um espaço de dimensão finita é clara. Para espaços de dimensão infinita, a existência está fundamentada sobre alguns conceitos que escapam da finalidade deste texto.

1.3.3 Espaços Normados

Para poder estabelecer o que se entende por aproximação, é necessário introduzir alguns conceitos relacionados com a generalização da idéia geométrica de distância entre pontos do espaço tridimensional.

De fato, quando trabalhamos sobre a reta real (E^1), a distância entre dois pontos (números reais) a, b , está dada por:

$$d = |a - b|$$

e com este conceito de distância, é possível decidir que um ponto a está *próximo* de outro b , se a distância entre ambos os pontos é pequena. Este conceito também é claro quando toma-se E^2 e E^3 .

No entanto, supondo uma função $u = u(x)$, x pertencente a um certo domínio, baseados em que conceitos pode-se dizer que u é uma função *próxima* de uma outra função v ?

Para responder esta pergunta será necessário estender o conceito usual de distância em E^1, E^2 e E^3 .

Antes de realizar isto, analisa-se um pouco este conceito geométrico usual. Assim, em E^1 , o valor absoluto de um número a , representado por $|a|$, é um número real que se caracteriza por satisfazer as seguintes propriedades:

1. $|a| \geq 0$ e $= 0$ se e somente se $a = 0$;
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

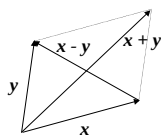


Figura 1.3: Soma e subtração de vetores.

Da mesma maneira, em E^2 estuda-se que o *tamanho* de um vetor x , caracterizado por sus componentes (x_1, x_2) , está definida por:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

satisfazendo ainda

1. $\|x\| \geq 0$ é igual a zero se e somente se o vetor é nulo.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathfrak{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

Por sua vez, a distância entre os pontos x, y é definida através do vetor $x - y$, ou seja,

$$\|x - y\| = \|y - x\|$$

Estes conceitos podem ser generalizados para os vetores de um espaço vetorial geral X .

Seja um espaço vetorial X , a *norma* de um vetor $x \in X$ é uma função de valor real designada por $\|x\|$ satisfazendo as propriedades:

1. $\|x\| \geq 0$ é igual a zero se e somente se $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathfrak{R}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (desigualdade triangular)

Por sua vez, a norma anterior induz uma medida ou métrica em X , permitindo estabelecer a distância entre os elementos de X . Esta métrica é designada por d estando dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

e diz-se que d é a medida induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Um espaço vetorial X , onde foi definida uma norma, é chamado de *espaço vetorial normado*.

Exercício 1.5 Seja $C[a, b]$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas em $[a, b]$.

- A função $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ é uma norma? Explique sua resposta.

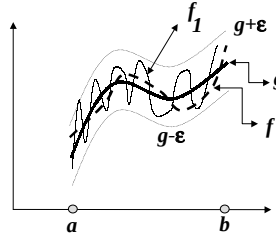


Figura 1.4: Aproximação de funções.

- A função $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)$ é uma norma? Explique sua resposta.

Exercício 1.6 Seja $C^1[a, b]$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas com derivadas primeiras contínuas em $[a, b]$. A função:

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

onde $f' = \frac{df(\cdot)}{dx}$, é uma norma em $C^1[a, b]$?

De acordo com o que tem sido visto, dado um espaço vetorial normado X , pode-se introduzir uma medida d estabelecendo que $d(x, y) = \|x - y\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma de X . Através desta medida, pode-se entender o critério de aproximação. Como é natural, esta aproximação dependerá da medida adotada.

De fato, suponha $C^1[a, b]$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas com derivadas primeiras contínuas em $[a, b]$. Considere a seguinte definição de norma

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad f \in C[a, b]$$

e sua métrica induzida,

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

Logo, dada a função $g \in C[a, b]$, diz-se que f aproxima, com um erro ε ($\varepsilon > 0$), a função g se:

$$d(f, g) = \|f - g\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

A interpretação geométrica do enunciado anterior pode ser vista na Figura 1.4.

A Figura 1.4 também mostra que tanto f quanto f_1 aproxima g em ε . Entretanto, pode-se perceber que a derivada de f se comporta de uma maneira similar à derivada de g , não ocorrendo o mesmo com a de f_1 , a qual é totalmente diferente da derivada de g .

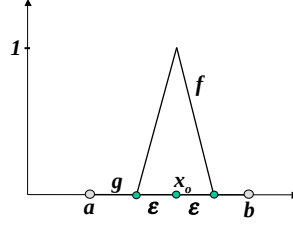


Figura 1.5: Função de aproximação.

No exemplo anterior, observa-se que caso se queira aproximar g de maneira a aproximar também a sua derivada, a medida utilizada para estabelecer o quão próximo está uma função de outra não é adequada. Para este caso, tem-se que utilizar, por exemplo, a seguinte medida:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x) - g'(x)|$$

Veja outro exemplo interessante. Considere o espaço vetorial $C[a, b]$ e tome as seguintes normas,

1. $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
2. $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$

Como foi visto, cada uma delas define uma métrica. Em particular, tome $g = g(x) \equiv 0$ para $x \in [a, b]$ (ver Figura 1.5) e tome a função $f = f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, b] \setminus [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon], x_0 \in (a, b) \\ 1 & x = x_0 \\ \frac{1}{\epsilon} [x - (x_0 - \epsilon)] & x \in [x_0 - \epsilon, x_0] \\ \frac{1}{\epsilon} [(x_0 + \epsilon) - x] & x \in [x_0, x_0 + \epsilon] \end{cases}$$

A partir do exposto anteriormente, fica fácil de ver que,

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 1 \\ d_2(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx = \frac{1}{2}(2\epsilon \times 1) = \epsilon \end{aligned}$$

Adotando a métrica d_1 , observa-se que qualquer que seja o valor de ϵ , sempre tem-se $d_1(f, g) = 1$, isto é f não aproxima g quando a métrica d_1 é adotada. Não ocorre o mesmo com a segunda métrica d_2 , onde para $\epsilon \rightarrow 0$ tem-se $d_2(f, g) \rightarrow 0$.

Desta forma, uma métrica convenientemente escolhida permite incluir funções aproximantes que outras métricas descartariam.

Como será visto adiante, no problema de integração de equações diferenciais, a métrica a ser empregada dependerá do tipo de equação diferencial (operador) que governa o problema.

1.3.4 Espaços com Produto Interno

Nas seções anteriores, foi introduzido os conceitos de espaços vetoriais e espaços normados. Ambas definições permitiram generalizar as idéias básicas de álgebra vetorial. Desta maneira, torna-se possível somar e multiplicar por escalares (números reais) entes matemáticos dos mais variados tipos, denominados, de forma geral, vetores. Por sua vez, com a definição de norma de um vetor, estendeu-se o conceito de comprimento de um vetor.

Entretanto, nos espaços normados deixou-se de lado alguns conceitos úteis na álgebra vetorial, tal como o produto escalar (ou produto interno) de vetores,

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

sendo v_i e w_i as i -ésimas componentes dos vetores v e w , respectivamente.

Este produto escalar permite também definir o comprimento do vetor,

$$\|v\| = \left(\sum v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e ainda a condição de ortogonalidade,

$$v \cdot w = 0$$

Surge assim a necessidade de generalizar estes conceitos a espaços vetoriais arbitrários. Na verdade, esta generalização é possível, dando lugar aos chamados *espaços com produto interno*.

Como veremos mais adiante, os espaços com produto interno são uma espécie particular dos espaços normados e historicamente, elas surgiram antes dos espaços normados. A teoria destes espaços detém numerosas características do espaço Euclidiano centrando-se sobre toda na ortogonalidade.

Um *espaço com produto interno* é um espaço vetorial X , onde se define um *produto interno*. O *produto interno* em X é uma função de valor real tal que, para cada par de vetores $x, y \in X$ (em outras palavras definida em $X \times X$) define um número real, designado por $\langle x, y \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. simetria: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2. propriedade distributiva: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $= 0$ se e somente se $x \equiv 0$

Exemplo 1.2 *Seja o espaço Euclidiano n -dimensional E^n :*

$$E^n = \{x; x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$$

onde cada vetor x de E^n é o conjunto ordenado de n números reais chamados de coordenadas do ponto x . A adição e multiplicação estão definidos como usualmente. O produto interno $\langle x, y \rangle$ está definido por:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Exemplo 1.3 *Considere o espaço vetorial $C^2[a, b]$, onde pode-se definir os seguintes produtos internos:*

- $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$
- $\langle x, y \rangle = \int_a^b \{x(t) y(t) + x'(t) y'(t)\} dt$
- $\langle x, y \rangle = \int_a^b \{x(t) y(t) + x'(t) y'(t) + x''(t) y''(t)\} dt$
- $\langle x, y \rangle = \int_a^b \sigma(t) x(t) y(t) dt, \sigma(t) > 0$ é uma função contínua.

Exemplo 1.4 *Outro espaço usual na mecânica é o espaço vetorial formado por todas as funções quadrado-integráveis em a, b , por exemplo, ou seja o conjunto formado por todas as funções $f(x)$ tal que:*

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty$$

Designa-se este espaço vetorial por $L_2[a, b]$ e define-se o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Aqui deve-se levar em conta que as integrais anteriores são tomadas no sentido de Lebesgue.

Como pode-se perceber, o produto interno induz uma norma

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

e desta vem a métrica,

$$d(x, y) = \|x - y\| = (\langle x - y, x - y \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Logo, todo espaço vetorial com produto interno é um espaço normado (o recíproco não é verdadeiro). A seguir, verifica-se que a norma induzida pelo produto interno é realmente uma norma. De fato:

1. $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ e $= 0$ se e somente se $x = 0$ como deduz-se pela propriedade 4 do produto interno;

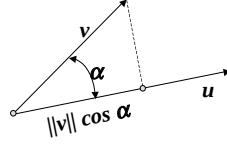


Figura 1.6: Produto escalar de vetores.

2. $\|\alpha x\| = (\langle \alpha x, \alpha x \rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|$ como pode ser visto pela propriedade 3 do produto interno;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Para demonstrar que a norma induzida pelo produto interno satisfaz 3, deve-se provar antes outra desigualdade importante, conhecida pelo nome de Cauchy-Bunyakovsky.

De fato, o produto interno foi introduzido para generalizar o conceito de produto escalar de vetores. Observa-se também que dados os vetores u e v (Figura 1.6) de módulos $\|u\|$ e $\|v\|$ respectivamente, o produto escalar pode ser expresso da seguinte forma:

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \alpha$$

Em virtude de que $|\cos \alpha| \leq 1$, tem-se:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

Portanto, resulta natural que o produto interno (generalização do produto escalar) também satisfaça esta desigualdade. Logo, dados os elementos do espaço vetorial X com produto interno resulta a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Para demonstrar a relação anterior, seja $\lambda \in \mathfrak{R}$ arbitrário. Logo, para todo λ e da propriedade 4 do produto interno vem que,

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$$

Desenvolvendo o primeiro membro da desigualdade e fazendo uso da simetria (propriedade 1 do produto interno),

$$\langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

A expressão anterior é quadrática em λ e não-negativa. Logo, seu discriminante deve ser menor ou igual a zero, ou seja,

$$(\langle x, y \rangle)^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

Da expressão anterior, segue-se que,

$$|\langle x, y \rangle| \leq (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} (\langle y, y \rangle)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \|y\|$$

Prova-se assim a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky. Com isto não é difícil mostrar que a norma induzida pelo produto interno satisfaz a desigualdade triangular. Portanto,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

de onde,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

1.3.5 Operadores

Na seção 1.2, foi visto que o problema de flexão transversal de uma viga bi-engastada estava definido pelo problema de valor de contorno:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(x) I(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] = q \quad (0, L) \quad (1.3)$$

$$u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0 \quad (1.4)$$

onde a equação diferencial está definida em um certo domínio, neste caso $(0, L)$, e onde as condições (1.4) estão definidas no contorno deste domínio, $x = 0$ e $x = L$ neste caso.

No primeiro membro da equação (1.3), pode-se distinguir:

1. uma função $u = u(x)$ definida em $\Omega = (0, L)$ sobre a qual realiza-se uma série de operações, que neste caso são a multiplicação e diferenciação. Observa-se assim que esta função deve ser tal que estas operações possam ser realizadas ou de outra forma que tenham sentido, significado. No exemplo, nota-se que a função u tem que ser submetida à uma diferenciação de quarta ordem. Logo, u deverá pertencer a um conjunto de funções que sejam contínuas com derivadas até quarta ordem também contínuas em $\Omega = [0, L]$. Este conjunto é simplesmente dado pelo *espaço vetorial* $C^4[a, b]$;
2. ao realizar essas operações sobre $u \in C^4[0, L]$, pretende-se que o primeiro membro da equação (1.3) seja igual à outra função $q = q(x)$, definida também em $\Omega = (0, L)$. Supondo $E = E(x)$ e $I = I(x) \in C^2[0, L]$, esta função $q \in C[0, L]$;

3. esse conjunto de operações sobre u é por si mesmo uma lei de transformação. Portanto, dada a função $u \in C^4[0, L]$, aplicando-se a lei da transformação,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[E(x) I(x) \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} \right]$$

obtem-se uma certa função $q \in C[0, L]$. Isto não é outra coisa que uma generalização do conceito usual de funções reais de variável real. Esta generalização recebe o nome de *operador*.

Pode-se dizer, assim, que um operador A é uma lei de correspondência de acordo com a qual, cada função (elemento) de um espaço vetorial irá corresponder a uma outra função (elemento) de outro espaço vetorial. No exemplo considerado,

$$\begin{aligned} A &= \frac{d^2}{dx^2} \left[E(x) I(x) \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} \right] \\ A : C^4[0, L] &\rightarrow C[0, L] \end{aligned}$$

onde a expressão anterior se lê: A aplica $C^4[0, L]$ em $C[0, L]$ ou em outras palavras, dado $u \in C^4[0, L]$ $Au \in C[0, L]$.

Assim, como uma função está definida em um certo domínio (no exemplo o intervalo $[0, L]$, um operador (generalização do conceito de função) está também definido em um conjunto de funções chamado de *domínio do operador*. No exemplo em discussão, o domínio de definição do operador A é $C^4[0, L]$.

Agora bem, do ponto de vista do problema de valor de contorno (1.3) e (1.4), nem todas as funções $u \in C^4[0, L]$ são possíveis solução de (1.3) e (1.4). Somente aquelas funções que satisfazem as condições de contorno (1.4) são funções *admissíveis* para o problema de valor de contorno. Desta maneira, diz-se que o operador A para o problema de valor de contorno (1.3) e (1.4) está definido no conjunto,

$$D_A = \{u; u \in C^4[0, L], u \text{ satisfazendo (1.4)}\}$$

D_A passa a ser assim o domínio de definição do operador A do problema de valor de contorno (1.3) e (1.4).

Tendo presente as observações 1-3 colocadas no início desta seção, é fácil perceber que muitos problemas da física matemática, podem ser escritos de uma maneira mais compacta e formal: *Determinar $u \in X$ tal que*

$$Au = f \quad \text{em } \Omega$$

onde $f \in Y$, $D_A = \{u; u \in X; u \text{ satisfazendo as condições de contorno}\}$, X e Y são espaços vetoriais adequados.

Pode-se observar que as condições de contorno (expressões (1.4) no exemplo dado) estão implícitas na definição de D_A .

Nota-se, também, que quando as condições de contorno são homogêneas, tais como as expressões em (1.4) no exemplo, o domínio do operador passa a ser um subespaço do espaço

vetorial X , já que a soma e multiplicação por escalar de elementos de D_A são também elementos de D_A .

A seguir, analisam-se algumas propriedades comuns dos operadores que surgem, por exemplo, nos diversos problemas a serem abordados neste trabalho.

1.3.6 Operadores Lineares

Considere os espaços vetoriais X e Y . O operador A que aplica X em Y é um operador linear se:

1. $A(u + v) = Au + Av$
2. $A(\alpha u) = \alpha Au$

para todo $\alpha \in \mathfrak{R}$ e todo $u, v \in X$.

Exemplo 1.5 *As matrizes de ordem $m \times n$ são exemplos de operadores lineares que aplicam o espaço euclidiano E^n no espaço euclidiano E^m . De fato dado,*

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$$

o operador (matriz) $A = (a_{ij})$, $(i = 1, \dots, m)$, $(j = 1, \dots, n)$ é tal que,

$$Ax = y \quad y \in E^m$$

onde:

$$y = (y_1, \dots, y_m) \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

e por sua vez:

$$\begin{aligned} A(u + v) &= Au + Av \\ A(\alpha u) &= \alpha Au \end{aligned}$$

ou seja A é um operador linear de E^n em E^m .

Exemplo 1.6 *Sabendo que a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas, assim como a derivada do produto por escalar de uma função é o produto escalar da derivada, o operador definido no exemplo da viga é um operador linear de D_A em $C[0, L]$.*

Exemplo 1.7 *O problema da torção de uma barra elástica homogênea está dado pelo problema de valor de contorno (ver Timoshenko et al, Theory of Elasticity)*

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= f \quad \text{em } \Omega \\ \phi|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

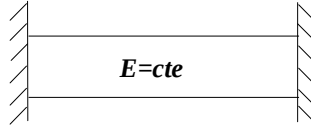


Figura 1.7: Barra para os exercícios 1.7 - 1.10

conhecido, também, como problema de Dirichlet, sendo Δ o operador Laplaciano que no plano conduz a:

$$A = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

É fácil ver que:

$$D_A = \left\{ \phi; \phi \in C^2[\Omega], \phi|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

e que :

$$A : D_A \rightarrow C[\Omega]$$

é um operador linear.

Exercício 1.7 Considere o problema da barra da Figura 1.7. Suponha a carga $q = cte$ e considere o material da barra como elástico homogêneo, ou seja o módulo de Young $E = cte$ e suponha, também, que a secção transversal da barra é constante. Estabeleça:

1. a equação diferencial que governa o problema;
2. as condições de contorno;
3. a forma do operador;
4. o domínio do operador. Explique.
5. Se trata de um operador linear? Por que?

Exercício 1.8 Idem ao problema anterior, mas supondo,

$$q = \begin{cases} q_1 = cte & x \in \left[0, \frac{L}{2}\right) \\ q_2 = cte & x \in \left(\frac{L}{2}, L\right] \end{cases}$$

Exercício 1.9 Idem ao primeiro problema, mas supondo

$$q = \begin{cases} 0 & x \in 0, \left[\frac{L}{2}\right), \left(\frac{L}{2}, L\right] \\ P & x = \frac{L}{2} \end{cases}$$

Exercício 1.10 *Idem ao primeiro problema, mas considere que o módulo de Young e a área transversal são constantes por partes como segue:*

$$EA = \begin{cases} E_1 A_1 = cte & x \in \left[0, \frac{L}{2}\right) \\ E_2 A_2 = cte & x \in \left[\frac{L}{2}, L\right] \end{cases}$$

onde A é a área transversal. Suponha $q = cte$ em $[0, L]$ e compare com o primeiro problema.

1.3.7 Operadores simétricos

Considere um operador linear $A : X \mapsto Y$ definido em um subespaço vetorial X do espaço Y com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que o operador A é simétrico se para todo par de elementos $x, y \in X$, verifica-se a identidade:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$$

Exemplo 1.8 *Seja $Y = C[0, 1]$ com o produto interno definido por,*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

Considere o operador A , tal que $Au = -\frac{d^2 u}{dx^2}$ (este operador surge no problema da barra submetida a cargas atuando na direção do seu eixo) e seja $D_A = X = \{u; u \in C^2[0, 1]; u(0) = u(1) = 0\}$. Como pode-se observar, X é um subespaço de Y e para todo $u \in X$ tem-se $Au \in Y$ ou, em outras palavras, Au é uma função contínua em $[0, 1]$. Por sua vez, para todo $u, v \in X$ e integrando por parte resulta:

$$\langle Au, u \rangle = \int_0^1 -\frac{d^2 u}{dx^2} v(x) dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \frac{du}{dx} v \Big|_0^1$$

Tendo presente que tanto u como v pertencem a X , quer dizer são nulas em $x = 0, 1$ tem-se,

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

Integrando novamente por partes e, utilizando as condições de contorno resulta,

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 u \left(-\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + u \frac{dv}{dx} \Big|_0^1 = \langle u, Av \rangle$$

ou seja, A é simétrico.

Exemplo 1.9 *Considere o mesmo operador do exemplo anterior, mas com*

$$D_A = X = \left\{ u; u \in C^2[0, 1], u(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0 \right\}$$

O operador com essas condições de contorno corresponde ao problema de uma barra traçãoada com um extremo fixo e o outro livre. Novamente o operador é simétrico. De fato,

$$\begin{aligned}\langle Au, v \rangle &= \int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2} v dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \frac{du}{dx} v \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 u \left(-\frac{d^2v}{dx^2} \right) dx + u \frac{dv}{dx} \Big|_0^1 = \langle u, Av \rangle\end{aligned}$$

Exercício 1.11 Considere o problema de uma viga em flexão com $EI = 1$ ao longo de toda a viga. Estude a simetria do operador para os seguintes casos:

1. viga bi-engastada;
2. viga bi-apoiada;
3. viga apoiada em um extremo e engastada em outro;
4. viga engastada em um extremo e livre em outro.

Exercício 1.12 Considere o problema de torção de uma barra (ver Timosshenko, et all),

$$\begin{aligned}-\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right) &= 2G\theta \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{em } \Gamma\end{aligned}$$

Mostre que o operador é simétrico.

1.3.8 Operadores positivos definidos

Seja um operador linear A definido em um espaço vetorial com produto interno X . Diz-se que A é um operador positivo-definido se para todo $u \in X$ não nulo ($u \neq 0$, 0 é elemento nulo de X), verifica-se,

$$\langle Au, u \rangle \geq 0 \text{ é igual a zero se e somente se } u = 0$$

Exemplo 1.10 Considere, novamente, o operador definido no Exemplo 1 da secção anterior. Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned}\langle Au, u \rangle &= \int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2} u dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{du}{dx} dx - \frac{du}{dx} u \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) dx \geq 0\end{aligned}$$

Por sua vez, se $\langle Au, u \rangle = 0$ resulta,

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ em } (0, 1)$$

logo $u = \text{cte}$, mas como $u \in X$ deve satisfazer as condições de contorno $u(0) = u(1) = 0$, tem-se que esta constante deve ser nula. Portanto,

$$\langle Au, v \rangle = 0 \text{ se e somente se } u = 0$$

Resumindo, o operador $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ definido em $X = \{u; u \in C^2[0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$ é simétrico positivo-definido.

Exemplo 1.11 Considere o mesmo operador, mas definido em

$$X = \{u; u \in C^2[0, 1], u(0) = 0, u'(1) = 0\}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \int_0^1 -\frac{d^2u}{dx^2} u dx = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \frac{du}{dx} u \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Agora bem, se

$$\langle Au, u \rangle = 0$$

resulta $\frac{du}{dx} = 0$, de onde $u = \text{cte}$, mas como $u = 0$ em $x = 0$, esta constante é nula. Novamente, tem-se que o operador é positivo-definido. É fácil mostrar que para $u'(0) = u(1) = 0$ o operador é positivo-definido.

Aqui deve-se ressaltar o seguinte. Sendo o operador A positivo, a condição de contorno que tem papel importante é unicamente a seguinte condição

$$u(0) = 0 \quad (u(1) = 0)$$

enquanto que a condição $u'(0) = 0$ ($u'(1) = 0$) não é fundamental para que o operador seja positivo. Tem-se assim:

1. ambos os tipos de condições de contorno são importantes para a simetria;
2. só um tipo de condição de contorno (u pré-escrito na fronteira) é importante para a positividade do operador.

Este último tipo de condições de contorno (conhecidas na Mecânica como condições cinemáticas) são conhecidas como *condições principais de contorno*. As outras condições de contorno (conhecidas como condições mecânicas ou de forças) são chamadas de *condições naturais* do problema.

No exemplo considerado, a condição principal $u = 0$ no contorno, diz que o deslocamento da barra está prescrito (daí o nome de condição cinemática), enquanto que a condição $u' = 0$ no contorno diz que nessa secção a força aplicada, ou seu equivalente à tensão, é nula (daí o nome de condições de força ou mecânica).

Exercício 1.13 *Mostre que o operador associado ao problema de uma viga em flexão é positivo-definido. Indique quais as condições de contorno são principais e quais são naturais.*

Dos resultados anteriores, observa-se que dado um operador linear simétrico positivo-definido A , aplicando o espaço vetorial X em outro Y com produto interno, pode-se definir em X o produto interno dado por,

$$\langle u, v \rangle_A = \int_{\Omega} Auv d\Omega = (Au, v)$$

para todo $u, v \in X$, toda vez que $X \subset Y$.

Em outras palavras, dado um operador simétrico positivo-definido no subespaço vetorial X de Y , sempre é possível definir em X um produto interno $\langle u, v \rangle_A, u, v \in X$ chamado de *produto interno de energia*. Por sua vez, como já visto, este produto interno induz uma norma,

$$\|u\|_A = (\langle u, u \rangle_A)^{\frac{1}{2}}$$

chamada de *norma de energia* já que, como será visto mais adiante, o número $\|u\|_A$ é proporcional à energia interna do corpo associada ao campo u .

1.3.9 Operadores Limitados Inferiormente

Seja A um operador simétrico definido no subespaço X do espaço com produto interno Y . Diz-se que A é um *operador positivo limitado inferiormente* se, para todo elemento $u \in X$, verifica-se a desigualdade,

$$\langle u, u \rangle_A = (Au, u) \geq \gamma^2 \langle u, u \rangle$$

onde γ é uma constante estritamente positiva.

Discute-se a seguir um pouco mais a desigualdade anterior. No primeiro membro, tem-se o produto interno na energia e, portanto, a norma de energia. No segundo membro, tem-se o produto interno definido em $Y \supset X$ e portanto, sua norma. Logo, pode-se reescrever a desigualdade anterior na seguinte forma:

$$\|u\|_A \geq \gamma \|u\|_Y, \text{ para } \forall u \in X \subset Y, \gamma > 0$$

Obviamente, todo operador A simétrico positivo limitado inferiormente é um operador simétrico positivo-definido. Mas nem todo operador simétrico positivo-definido é limitado inferiormente.

Considere uma motivação física ao conceito anterior. Como pode-se ver ao longo dos exemplos e exercícios deste capítulo, vários problemas da mecânica estão associados a operadores simétricos definidos em um subespaço X de um espaço com produto interno Y . Por exemplo, no problema de tração de uma barra, viu-se que o operador $A = -\frac{d^2(\cdot)}{dx^2}$ era simétrico em $X = \{u; u \in C^2[0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$ subespaço do espaço $Y = \{u; u \in C[0, 1]\}$ com produto interno

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \int_0^1 u(x) v(x) dx, u, v \in Y \\ \|u\|_Y &= \left(\int_0^1 u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Logo, da desigualdade, pode-se ver que se o operador é limitado inferiormente, só é possível obter grandes deslocamento (quer dizer a norma em Y do campo u é grande) aumentando a energia associada a esse deslocamento. Por outro lado, se o operador é positivo-definido, mas não limitado inferiormente, é possível obter grandes deslocamentos, sem implicar no crescimento da energia associada.

Antes de ver alguns exemplos, deve-se ressaltar que a investigação da propriedade de ser limitado inferiormente requer um maior conhecimento matemático do aquele utilizado para estudar a simetria. Por último, esta propriedade tem um papel importante no problema da existência da solução de um certo problema de valor de contorno.

Exemplo 1.12 Considere o problema da barra em tração, o operador $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ definido no conjunto X dado por $X = \{u; u \in C^2[0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$ é simétrico positivo-definido, como já foi visto. Pretende-se mostrar que também é limitado inferiormente. De fato, dado $u(0) = 0$, resulta

$$u(x) = \int_0^x \frac{du(t)}{dt} dt = \int_0^x 1 \cdot \frac{du}{dt} dt$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy na expressão anterior, tem-se

$$[u(x)]^2 = \left(\int_0^x 1 \cdot \frac{du}{dt} dt \right)^2 \leq \int_0^x 1^2 dt \int_0^x \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt = x \int_0^x u'^2 dt$$

Em virtude de que $x \in [0, 1]$ e que o integrando no segundo membro é positivo, resulta:

$$[u(x)]^2 \leq x \int_0^1 u'^2 dt = x \langle u, u \rangle_A = x \|u\|_A^2$$

Integrando ambos os membros da desigualdade:

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u^2 dx \leq \frac{1}{2} \|u\|_A^2$$

de onde:

$$\|u\|_A \geq \sqrt{2} \|u\|$$

ou seja o operador A é limitado inferiormente e a constante γ resulta,

$$\gamma = \sqrt{2}$$

Exercício 1.14 Considere o operador associado ao problema de flexão de vigas definido no subespaço $X = \{u; u \in C^4[0, 1], u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\}$ do espaço $Y = \{u; u \in C[0, 1]\}$ com produto interno $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx$. Mostre que o operador, além de ser simétrico positivo-definido é limitado inferiormente.

Exercício 1.15 Considere o mesmo problema anterior com as condições de contorno $u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0$. O operador continua sendo limitado inferiormente?

Exercício 1.16 Para que outras condições de contorno o operador da viga continua sendo positivo-definido?

1.3.10 Convergência. Completude

Foi visto na secção 1.3.2 que a selecção de uma norma estabelece a distância entre as funções do espaço normado. Assim, por exemplo, para $X = C[a, b]$,

$$\begin{aligned} |f| &= \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \\ |f| &= \int_a^b |f(x)| dx \\ |f| &= \left\{ \int_a^b [f(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

definem diferentes normas para X . Ilustrou-se o comportamento, tomando-se g como a função identicamente nula em X e a função f cujo gráfico pode ser visto na Figura 1.5. Neste exemplo, viu-se que a distância entre ambas as funções está dada para cada norma, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \|f - g\| &= 1 \\ \|f - g\| &= \varepsilon \\ \|f - g\| &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

Desta maneira, para valores de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, a função f está próxima da função g se adota-se a segunda ou a terceira norma. Por outro lado f é suficientemente distante de g , caso se adote a primeira das normas.

Observa-se assim que a resposta para o Problema 2 da secção 1.2, ou seja, o que se entende por *boa aproximação*, está intimamente relacionada com o tipo de norma escolhida, com respeito a qual deseja-se medir a aproximação.

Outra propriedade, que pelas mesmas razões anteriores, está intimamente ligada com a escolha da norma, é a *convergência de uma sequência finita em um espaço normado*. Em particular, suponha X um espaço vetorial normado e seja $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ uma sequência infinita de elementos de X . Deseja-se definir o que se entende por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

onde x é um elemnto de X . A definição a ser introduzida não é outra coisa que a generalização da idéia geométrica usual. Por exemplo, tome uma sequência de pontos $x_1, x_2, \dots$ no plano Euclidiano E^2 e seja x um ponto fixo neste espaço (Figura 1.8). Claramente o conceito de x_n converge a x à medida que $n \rightarrow \infty$ significa, simplesmente, que a distância entre x_n e x torna-se cada vez menor à medida que n cresce. Em particular, a distância entre x_n e x está precisamente medida através da norma euclidiana

$$\|x_n - x\| = \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2}$$

onde $x_n^i, x^i, i = 1, 2$, são as coordenadas de x_n e x respectivamente.

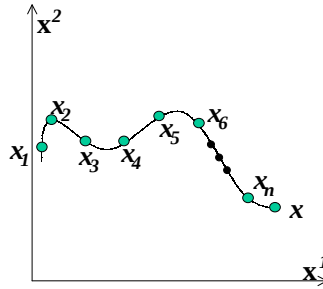


Figura 1.8: Exemplo de convergência em $\mathcal{E}^2$.

A generalização desta idéia geométrica para um espaço normado arbitrário consiste simplesmente na seguinte definição.

Seja X um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$. A sequência $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ de vetores de X converge (convergência forte) para o vetor $x \in X$ se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Utiliza-se o adjetivo *forte* para diferenciar dos outros tipos de convergência. Por outro lado, como já foi dito, a escolha de uma norma estabelecerá o caráter da convergência.

Exemplo 1.13 Considere $X = C[0, 1]$ com norma $\|u\| = \left(\int_0^1 [u(x)]^2 dx\right)^{1/2}$. Tome a função u_n da Figura 1.9.

Seja a função nula u em $[0, 1]$. Logo,

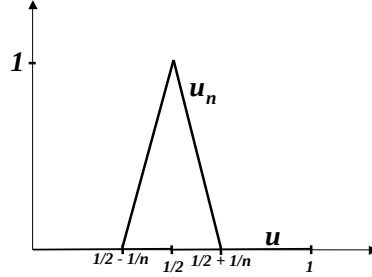


Figura 1.9: Função do exemplo 1.13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Entretanto, adotando como norma

$$\|f\| = \max_{X \in [0,1]} |f(x)|$$

resulta

$$\|u_n - u\| = 1, \text{ para qualquer } n$$

Ve-se, assim, que u_n converge a uma função nula caso se adote a primeira das normas, enquanto não há convergência caso se adote a segunda norma.

O conceito de convergência em um espaço vetorial normado conduz a outro conceito útil mais adiante, ou seja, completude. Para isto, inicialmente, considera-se o conceito de *sequência de Cauchy* ou sequência fundamental.

A sequência $\{u_n, n = 1, 2, \dots\}$ do espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$ é dita uma sequência de Cauchy se:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

Exemplo 1.14 Considere a sequência de funções u_n representada na Figura 1.9 e definidas como no exemplo anterior. Esta sequência é uma sequência de Cauchy, pois,

$$\|u_n - u_m\|^2 = \int_0^1 (u_n - u_m)^2 dx \leq \int_0^1 u_n^2 dx \leq \frac{1}{n}$$

Logo,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Agora bem, diz-se que o espaço vetorial normado X com norma $\|\cdot\|$ é *completo* se e somente se toda sequência Cauchy $(x_n, n = 1, 2, \dots)$ em X converge a um elemento x do espaço X .

Todo espaço normado completo recebe o nome especial de *espaço Banach*. Por sua vez, todo espaço vetorial com produto interno completo recebe o nome de *espaço Hilbert*. Dado que todo espaço com produto interno é um espaço normado com norma $\|\cdot\| = (\langle \cdot, \cdot \rangle)^{\frac{1}{2}}$, tem-se que todo espaço Hilbert é um espaço Banach. O inverso não se verifica, já que nem toda norma é proveniente de um produto interno.

Exemplo 1.15 *Vários espaços normados não são completos. Por exemplo, o espaço $C[0, 1]$ com a norma*

$$\|u\| = \left(\int_0^1 [u(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

não é completo.

De fato, a sequência de funções contínuas

$$u_n(x) = \begin{cases} 2^n x^{n+1} & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2^n (1 - x)^{n+1} & \text{para } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

é uma sequência Cauchy com respeito à norma definida anteriormente. Entretanto, a sequência converge para a função $u \notin C[0, 1]$ ($\|u_n - u\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$) dada por (Figura 1.10),

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{para } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{para } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

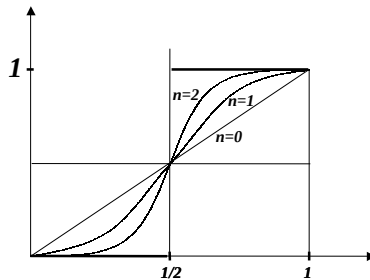


Figura 1.10: Função do exemplo 1.15

Este exemplo mostra, então, uma sequência de Cauchy que não converge a um elemento do espaço. Logo, $C[0, 1]$ não é completo de acordo com a norma adotada.

Exemplo 1.16 O espaço $C[0, 1]$ com a norma

$$\|u\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

é completo.

Outra definição importante é o conceito de conjuntos completos. Seja X um espaço vetorial normado de norma $\|\cdot\|$. Diz-se que o conjunto $M = \{u_n; u_n \in X\}$ é *completo* em X com respeito a $\|\cdot\|$ se para todo $u \in X$, dado $\varepsilon > 0$, é possível determinar um inteiro positivo N e constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que:

$$\left\| u - \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i \right\| < \varepsilon \quad \text{para todo } u \in X$$

Os métodos variacionais a serem estudados se baseam nesta idéia. Quer dizer, em todos é preciso definir um conjunto de funções chamadas *funções bases* ou *funções coordenadas* ou *funções de interpolação* que sejam completas no espaço onde se procura a solução do problema de valor de contorno. Em particular, será visto que o que distingue o Método dos Elementos Finitos dos demais é a maneira com estas funções são construídas.

Antes de encerrar esta secção, discutem-se mais alguns aspectos.

Considere o subespaço X do espaço vetorial Y com produto interno e seja $A : X \rightarrow Y$ um operador positivo limitado inferiormente. Logo, segundo já foi visto,

$$\|u\|_A \geq \gamma \|u\|_Y \quad \gamma > 0$$

Suponha $\{u_n\}$ uma sequência de elementos de X que converge a x com respeito à norma de energia, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_A = 0$$

Tendo em conta a desigualdade anterior, conclui-se que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

Assim, quando se trabalha com um operador positivo limitado inferiormente, convergência na energia implica na convergência na norma adotada para Y .

Outro tópico importante é o seguinte. Suponha um espaço normado completo Y com norma $\|\cdot\|$. Seja uma sequência de Cauchy $\{u_n\}$. Como Y é completo, a sequência $\{u_n\}$ converge a um elemento $u \in Y$ único. De fato, suponha que converge para os elementos u_1 e u_2 tal que $u_1 \neq u_2$. Logo,

$$\begin{aligned} \|u_n - u_1\| &\rightarrow 0 & n &\rightarrow \infty \\ \|u_n - u_2\| &\rightarrow 0 & n &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_1 - u_2\| = \|u_1 - u_n + u_n - u_2\| \leq \|u_1 - u_n\| + \|u_n - u_2\|$$

Tomando o limite para $n \rightarrow \infty$ resulta,

$$\|u_1 - u_2\| = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

1.3.11 Funcionais

Por último, define-se o que se entende por *funcional*. Seja X um espaço vetorial. A transformação $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ campo dos números reais, é um funcional em X . Assim, toda transformação definida em um espaço vetorial que a cada elemento desse espaço faz corresponder um número real é uma funcional. Ao longo deste texto, vários exemplos de funcionais têm sido apresentados.

Exemplo 1.17 *Seja $X = C[0, 1]$. A transformação F definida por*

$$F(u) = \int_0^1 u(x) dx$$

é uma funcional em X .

Exemplo 1.18 *A norma de um espaço vetorial normado é um exemplo típico de funcional.*

Exemplo 1.19 *Considere um espaço vetorial X com produto interno. Dado $u \in X$ fixo, a transformação $\langle u, v \rangle$ é um funcional, já que a cada $v \in X$ está associado um número real $\langle u, v \rangle$.*

O domínio de definição de um funcional recebe também o nome de *conjunto de funções admissíveis do funcional*. Se este conjunto é um espaço vetorial em si mesmo recebe o nome de *espaço de funções admissíveis*.

Dado o espaço vetorial X , diz-se que o funcional F definido em X é uma funcional linear se:

1. $F(u + v) = F(u) + F(v)$
2. $F(\alpha u) = \alpha F(u)$

para todo $u, v \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja X um espaço vetorial normado, diz-se que o funcional F é contínuo em $u_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que,

$$|F(u) - F(u_0)| < \varepsilon \quad \text{para todo } u \text{ tal que } \|u - u_0\| < \delta$$

Por sua vez, F é contínuo, se for contínuo em todo $u \in X$.

Com esta definição, pode-se introduzir outro tipo de convergência, com aplicação em alguns métodos para a obtenção de soluções aproximadas estudados mais adiante.

Assim, diz-se que a sequência $\{u_n, n = 1, 2, \dots\}$ de elementos de um espaço normado completo (espaço Banach) *converge fracamente* ao elemento desse espaço, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro positivo N , tal que para todo $n > N$ e todo funcional contínuo F de X resulta,

$$|F(u_n) - F(u_0)| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > N$$

Exemplo 1.20 *Várias sequências que convergem fracamente não convergem fortemente (o inverso sempre se verifica). Considere o espaço $L_2(0, 1)$, ou seja o espaço de todas as funções quadrado-integráveis. Tome a sequência*

$$\{\phi_n(x); \phi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x, n = 1, 2, \dots\}$$

Agora bem, pode-se mostrar que toda função $f \in L_2(0, 1)$ caracteriza um funcional linear em $L_2(0, 1)$. Logo, para todo elemento $f \in L_2(0, 1)$, pode-se mostrar que:

$$\langle f, \phi_n(x) \rangle = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \sin \pi n x dx \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

ou seja, ϕ_n converge fracamente para a função nula de $L_2(0, 1)$.

Por outro lado temos

$$\|\phi_n(x) - \mathbf{0}\| = \left(\int_0^1 (\sqrt{2} \sin \pi n x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1; \forall n$$

obtendo-se que ϕ_n não converge fortemente para a função nula.

Capítulo 2

Métodos Variacionais para a Determinação de Soluções Aproximadas de Problemas de Valor de Contorno

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma série de métodos variacionais que permitem obter soluções aproximadas da solução de um certo problema de valor de contorno.

No que se segue e com o intuito de não complicar a apresentação, supõe-se que as funções considerada são *suficientemente regulares*, no sentido que as operações de integração ou de derivação tenham sentido. Por outro lado, limita-se exclusivamente ao caso de operadores lineares. Problemas de valor de contorno não lineares escapam dos objetivos deste curso. Também, durante a primeira parte deste capítulo, limita-se ao caso de condições de contorno homogêneas.

Dado um problema de valor de contorno cuja solução será designada por u_0 , os métodos variacionais que a serem apresentados são métodos numéricos que, dadas as funções ϕ_i (chamadas de funções coordenadas, de base, ou de interpolação, e que satisfazem certas restrições) permitem determinar as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, n finito, de maneira tal que a função:

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$$

se aproxime de u_0 , para $n \rightarrow \infty$, em algum sentido, quer dizer convergência com respeito a alguma norma (convergência forte) ou convergência débil.

Os métodos considerados são:

1. Método dos Resíduos Ponderados

- Método de Colocação;
- Método de Galerkin;

2. Método de Ritz;

3. Método dos Mínimos Quadrados.

Como será visto mais adiante, o Método dos Elementos Finitos permite determinar unicamente as funções ϕ_i de uma maneira simples e de fácil implementação computacional. Uma vez dadas as ϕ_i , deve-se aplicar alguns dos métodos anteriores para determinar uma solução aproximada. Quer dizer, quando se fala em utilizar o Método dos Elementos Finitos, na realidade está se falando simultaneamente de dois aspectos:

1. construção das funções ϕ_i pela técnica proporcionada pelo Método dos Elementos Finitos;
2. utilização de um determinado método variacional para calcular uma solução aproximada.

2.2 Método dos Resíduos Ponderados

O método dos resíduos, do qual o Método de Colocação e de Galerkin são casos particulares, baseia-se na seguinte idéia. Considere os espaços U e V normados e completos. Como apresentado anteriormente, recorde que em cada espaço foi definido uma norma, ou seja, uma maneira de medir a distância entre os elementos deste espaço; o fato de ser completo significa que toda sequência $\{u_n\}_{n=1,\infty}$ de elementos $u_n \in U$, por exemplo, tal que $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0; n, m \rightarrow \infty$ sempre converge a um elemento u do mesmo espaço.

Define-se, agora, a seguinte transformação:

$$S : U \times V \rightarrow \mathfrak{R}$$

quer dizer, dado um par ordenado (u, v) , onde $u \in U$ e $v \in V$, a transformação S proporciona um número real. Em particular esta transformação satisfaz:

- $S(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda S(u_1, v) + \mu S(u_2, v)$
- $S(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda S(u, v_1) + \mu S(u, v_2)$
- $S(u, v^*) = 0$ para $v^* \in V$ fixo e $\forall u \in U \rightarrow v^* = 0$
- $S(u^*, v) = 0$ para $u^* \in U$ fixo e $\forall v \in V \rightarrow u^* = 0$

onde $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$.

Considere, agora, um operador linear A definido no conjunto linear D_A denso no espaço U . Para um elemento $f \in U$ procura-se a solução de:

$$Au = f$$

Diz-se que u_0 é a solução do problema caso se verifique:

$$S(Au_0 - f, v) = 0 \text{ para todo } v \in V$$

Para a obtenção de uma solução aproximada u_0^n de u_0 , o Método dos Resíduos Ponderados propõe o seguinte algoritmo:

1. Considere em D_A uma sequência completa $\{\phi_n\}_{n=1,\infty}$ de funções. Recorde que, por pertencer a D_A , são **suficientemente regulares** e satisfazem **todas** as condições de contorno.
2. Para todo n finito, o conjunto $\{\phi_k\}_{k=1,n}$ é linearmente independente.
3. Tome como aproximante de u_0 a combinação linear

$$u_0^n = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$$

de onde os coeficientes $a_i, i = 1, \dots, n$ serão posteriormente determinados.

4. Considere em V um conjunto denso $\{w_i\}_{i=1,\infty}$.
5. Calcule, para n finito, os coeficientes a_i de maneira que o *resíduo*:

$$r^n = Au_0^n - f = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j - f$$

satisfaça:

$$S(r^n, w_i) = \int_{\Omega} r^n w_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Em virtude de que (ϕ_i) e (w_i) são densos em seus respectivos espaços, o Método dos Resíduos Ponderados conduz, quando $n \rightarrow \infty$, a,

$$\langle r^n, w_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle r, w \rangle = 0 \forall w \in V$$

quer dizer r^n **converge debilmente** a $r = 0$ (resíduo nulo) ou, em outras palavras, u_0^n converge debilmente para a solução de u_0 do problema de valor de contorno.

A expressão anterior pode ser escrita em forma estendida conduzindo a:

$$\left(\int_{\Omega} w_i A \phi_i d\Omega \right) a_j = \int_{\Omega} f w_i d\Omega, i = 1, 2, \dots, n$$

ou em forma matricial:

$$Ka = f$$

de onde:

$$\begin{aligned} K &= (K_{ij}) = \int_{\Omega} w_i A \phi_j d\Omega \\ a &= (a_i) \\ f &= (f_i) = \int_{\Omega} f w_i d\Omega \end{aligned}$$

Como pode-se ver, o Método dos Resíduos Ponderados conduz a um sistema de equações algébricas cuja solução proporciona os coeficientes a_i da combinação linear definindo u_0^n .

Do ponto de vista computacional, o Método dos Resíduos Ponderados é um algoritmo relativamente simples que não requer grande conhecimento matemático por parte do usuário. Neste método já distingue-se algumas das características básicas de todo método variacional para o cálculo de soluções aproximadas. São elas:

- Conhecer as funções w_i e ϕ_i . Aqui reside um dos inconvenientes. As funções ϕ_i devem ser suficientemente regulares de maneira que $A\phi_i$ tenha sentido. Além disso, devem satisfazer as condições de contorno.
- Construir a matriz do sistema K e o termo independente f calculando cada coeficiente K_{ij} , f_i analítica ou numericamente.
- Resolver o sistema de equações. Dependendo do operador A e da forma das funções ϕ_i e w_i , a matriz do sistema K poderá ser uma matriz banda ou cheia, simétrica ou não-simétrica, bem-condicionada ou mal-condicionada. Cada uma destas características facilitam ou complicam a resolução do sistema de equações.

2.2.1 Método de Colocação

Como já foi dito, o Método de Colocação é um caso particular do Método dos Resíduos Ponderados. Para o Método de Colocação, as funções w_i são as funções generalizadas $\delta - Dirac$ associadas aos pontos $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, de Ω . Designam-se estas funções como Δ_i e são tais que:

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta_i d\Omega = f(x_i)$$

Tendo presente a propriedade anterior, o método corresponde a:

$$\int_{\Omega} r^n \Delta_i = (Au_0^n - f)|_{x_i} = 0; i = 1, 2, \dots, n$$

Logo, o Método de Colocação calcula a solução aproximada $u_0^n = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$ exigindo que o resíduo $Au_0^n - f$ seja nulo em n pontos x_i de Ω . A seguir apresentam-se alguns exemplos de aplicação do Método de Colocação.

Exemplo 2.1 *Seja o seguinte problema de valor de contorno:*

$$Au(x) = u''(x) - u(x) = 1, \text{ em } \Omega = (0, 1)$$

com as condições de contorno:

$$u(0) = u(1) = 0$$

Pode-se ver que:

$$D_A = \{u; u \in C^2[0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$$

Recordando o teorema de Weierstrass, tem-se que toda função contínua pode ser aproximada por um polinômio. Logo, tome para $\{\phi_i\}_{i=1,n}$ a seguinte sequência:

$$\phi_1 = x(1 - x)$$

$$\phi_2 = \phi_1 x$$

$$\phi_3 = \phi_2 x$$

etc

Como pode-se ver, estas funções satisfazem as condições de contorno. Logo, toda combinação linear também satisfaz e, pelo teorema de Weierstrass, $\{\phi_i\}_{i=1,\infty}$ é denso em D_A .

Tome $n = 2$, ou seja os dois primeiros termos ϕ_1 e ϕ_2 . Os coeficientes da matriz K e do termo independente f , para o caso em que se adota como pontos $x_i = 0$ e $x_2 = 1$, estão dados por:

$$K_{11} = (A\phi_1)|_{x_1=0} = [-2 - x(1-x)]|_{x_1=0} = -2$$

$$K_{21} = (A\phi_1)|_{x_2=1} = [-2 - x(1-x)]|_{x_2=1} = -2$$

$$K_{12} = (A\phi_2)|_{x_1=0} = [-6x + 2 - x^2(1-x)]|_{x_1=0} = 2$$

$$K_{22} = (A\phi_2)|_{x_2=1} = [-6x + 2 - x^2(1-x)]|_{x_2=1} = -4$$

$$f_1 = f(x_1) = 1$$

$$f_2 = f(x_2) = 1$$

Logo, o sistema está dado por:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema conduz aos seguintes valores dos coeficientes a_1 e a_2 :

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = 0$$

dando, assim, a seguinte solução aproximada:

$$u_0^2 = \frac{1}{2}x(x-1)$$

Logo, a solução aproximada é equivalente a tomar uma única função ϕ_1 e o ponto $x_1 = 0$.

A solução exata do proplema proposto é:

$$u_0 = \frac{1}{(e+1)}(e^x + e^{1-x}) - 1$$

A Tabela 2.1 apresenta, para efeito de comparação, os valores de u_0 e u_0^a em diferentes pontos do intervalo. Como pode-se ver, a solução u_0 é simétrica com respeito a $x = 5$.

A primeira pergunta a ser feita é se é possível melhorar a aproximação mantendo as mesmas funções, mas tomando outros pontos de colocação? A resposta é afirmativa e o estudo da colocação ótima destes pontos formam um capítulo de análise numérica do Método de Colocação.

x	$u_0(x)$	$u_0^a(x)$
0.0	0.0000 0000	0.0000 0000
0.1	-0.0412 8461	-0.0450 0000
0.2	-0.0729 7407	-0.0800 0000
0.3	-0.0953 8554	-0.1050 0000
0.4	-0.1087 4333	-0.1200 0000
0.5	-0.1131 8112	-0.1250 0000
0.6	-0.1087 4333	-0.1200 0000
0.7	-0.0953 8554	-0.1050 0000
0.8	-0.0729 7407	-0.0800 0000
0.9	-0.0412 8461	-0.0450 0000
1.0	-0.0000 0000	0.0000 0000

Tabela 2.1: Exemplo 1: comparação entre as soluções.

x	$u_0(x)$	$u_0^a(x)$
0.0	0.0000 0000	0.0000 0000
0.1	-0.0412 8461	-0.0400 0000
0.2	-0.0729 7407	-0.0711 1111
0.3	-0.0953 8554	-0.0933 3333
0.4	-0.1087 4333	-0.1066 6667
0.5	-0.1131 8112	-0.1111 1111
0.6	-0.1087 4333	-0.1066 6667
0.7	-0.0953 8554	-0.0933 3333
0.8	-0.0729 7407	-0.0711 1111
0.9	-0.0412 8461	-0.0400 0000
1.0	-0.0000 0000	0.0000 0000

Tabela 2.2: Exemplo 2: comparação entre as soluções.

Exemplo 2.2 Considere somente a função ϕ_1 e adote, como ponto de onde anula-se o resíduo, o ponto $x_1 = 0.5$. Tem-se, assim:

$$-2.25a_1 = 1 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2.25} = -0.44444444$$

Logo, a solução aproximada será:

$$u_0^1 = -0.44444444x(1-x)$$

Na Tabela 2.2, compara-se esta solução aproximada com a exata.

Como pode-se notar, o resultado alcançado é de extraordinária exatidão, mesmo utilizando apenas uma função coordenada.

Do ponto de vista computacional, o Método de Colocação se mostra de fácil implementação. Em todos os casos, as funções coordenadas devem satisfazer as condições de contorno e devem ser suficientemente regulares para que a aplicação do operador A tenha sentido. Estes são, provavelmente, os maiores inconvenientes deste método.

Exercício 2.1 Considere o problema de valor de contorno definido anteriormente. Aplique o Método de Colocação tomando as seguintes funções coordenadas:

$$\phi_1 = x(1-x) \quad \phi_3 = x^3(1-x)$$

e os pontos:

$$x_1 = 0.25 \text{ e } x_2 = 0.75$$

Compare com a solução e comente os resultados obtidos.

Exercício 2.2 Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = -x \text{ em } (0,1)$$

com as condições de contorno:

$$u(0) = u(1) = 0$$

Aplique o Método de Colocação adotando:

$$\begin{array}{ll} \phi_1 = x(1-x) & \phi_2 = x^2(1-x) \\ x_1 = 0.25 & x_2 = 0.5 \end{array}$$

e compare com a solução exata:

$$u_0 = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

2.2.2 Método de Galerkin

O Método de Galerkin é um caso particular do Método dos Resíduos Ponderados. Neste método, os espaços U e V são coincidentes e o conjunto $\{w_j\}$ se torna idêntico a $\{\phi_i\}$. De uma maneira mais formal, o Método de Galerkin pode ser colocado da seguinte maneira.

Suponha o problema de valor de contorno

$$Au = f \text{ em } \Omega$$

com as condições de contorno

$$Bu = 0 \text{ em } \Upsilon$$

e suponha ainda que D_A (domínio de definição do operador A quer dizer, o conjunto de todas as funções u suficientemente regulares e tal que $Bu = 0$ em Γ) seja denso no espaço Hilbert.

Introduz-se agora a sequência de espaços de dimensão finita $H_k \subset H$ e designa-se com $\{\phi_i\}_{i=1,k}$ as funções bases dos espaços. Pelo que foi exposto anteriormente, deseja-se dizer que um elemento (função) arbitrário de H_k está definido através da seguinte combinação linear:

$$u_k = \sum_{i=1}^k a_i \phi_i \quad a_i \in \mathfrak{R}, i = 1, 2, \dots, k$$

Logo, o Método de Galerkin para a determinação de uma solução aproximada do problema de valor de contorno consiste em determinar a função $u_k^* \in H_k$, tal que o resíduo $Au_k^* - f$ seja ortogonal a toda função de H_k . Em outras palavras:

$$\int_{\Omega} (Au_k^* - f) v_k d\Omega = 0 \quad \forall v_k \in H_k$$

Observa-se que o Método de Galerkin corresponde ao Princípio do Trabalho Virtual em Mecânica.

Agora, a expressão anterior é equivalente a exigir que o resíduo seja ortogonal a cada uma das funções ϕ_i que definem a base H_k , ou seja,

$$\int_{\Omega} (Au_k^* - f) \phi_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Substituindo $u_k^* = \sum_{i=1}^k a_i^* \phi_i$ na expressão anterior, tem-se,

$$\int_{\Omega} \left(A \left(\sum_{i=1}^k a_i^* \phi_i \right) - f \right) \phi_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

e em virtude de se considerar problemas lineares (o operador A é linear), a equação anterior conduz a,

$$\sum_{j=1}^k [\phi_i A \phi_j d\Omega] a_j^* - \int_{\Omega} f \phi_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Novamente chegou-se a um sistema de equações algébricas que em forma matricial pode ser escrita como,

$$Ka = f$$

de onde,

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i A \phi_j d\Omega \\ f_i &= \int_{\Omega} f \phi_i d\Omega \end{aligned}$$

Pode-se notar que se A é um operador simétrico, a matriz do sistema resulta simétrica. Isto implica em diversas vantagens computacionais:

- Utilização de técnicas de triangulação da matriz do sistema, específicas para matrizes simétricas.
- Diminuição do espaço de memória necessário para armazenar os coeficientes da matriz do sistema. Para uma matriz de ordem N não-simétrica, é preciso conhecer seus $N \times N$ coeficientes. Se a matriz for simétrica, só é preciso conhecer a matriz triangular superior ou inferior.

Por outro lado, dependendo do tipo de problema, da forma da região Ω e das características das funções ϕ_i , o cálculo dos coeficientes da matriz K e do termo independente podem ser realizados analítica ou numericamente. Este último procedimento é o mais utilizado, atualmente, em virtude dos computadores tornarem-se cada vez mais velozes e precisos.

Agora observe um detalhe importante. O coeficiente K_{ij} está dado por

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A \phi_j d\Omega$$

Duas funções u, v definidas em Ω , se dizem ortogonais através do operador simétrico A se,

$$\int_{\Omega} u A v d\Omega = 0$$

Se as funções ϕ_i e ϕ_j estão definidas em todo Ω e não são ortogonais através do operador A , tem-se que este coeficiente não será nulo. Isto implica que a matriz seja cheia e isto, em geral, pode induzir um mal condicionamento numérico da matriz K .

Suponha, agora, que ϕ_i e ϕ_j estão definidas, respectivamente, em Ω_i e Ω_j , partes de Ω . O anterior implica em dizer que as funções ϕ_i e ϕ_j são de *suporte compacto*. Neste caso, o coeficiente resulta,

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A \phi_j d\Omega = K_{ij} = \int_{\Omega_i \cap \Omega_j} \phi_i A \phi_j d\Omega$$

onde $\Omega_i \cap \Omega_j$ é a intersecção dos suportes de ambas funções.

Observa-se assim que, se a intersecção é de medida nula, o coeficiente K_{ij} resulta automaticamente nulo. Na medida que os suportes das funções bases se interseccionam pouco, a matriz K resulta numa matriz com poucos elementos não nulos (comparado com os N^2 coeficientes de uma matriz cheia $N \times N$). O anterior dá lugar ao que se chama de matriz banda ou matriz esparsa. A Figura 2.1 representa graficamente a idéia anterior para o caso do operador A ser simétrico.

Como será visto mais adiante, o Método de Elementos Finitos se caracteriza, fundamentalmente, pelo fato que as funções ϕ_i construídas através deste método são de suporte compacto.

A seguir, tem-se uma série de exemplos para explicar melhor as idéias apresentadas.

Figura 2.1: Matrizes banda e skyline.

Exemplo 2.3 Considere o problema indicado na Figura 2.2.

Figura 2.2: Exemplo 3.

O problema de valor de contorno consiste em:

$$\begin{aligned} -AE \frac{d^2 u}{dx^2} &= q, x \in (0, L) \\ u(0) &= u(L) = 0 \end{aligned}$$

Logo, as funções ϕ_i devem, em princípio, ser de classe $C^2(0, L)$ e satisfazer as condições de contorno.

Considere polinômios. Logo, as funções bases serão,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= x(L-x) \\ \phi_2 &= x^2(L-x) \\ \phi_3 &= x^3(L-x) \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

e os espaços de aproximação serão:

$$H_1 = \text{Span}\{\phi_1\}, H_2 = \text{Span}\{\phi_i\}_{i=1}^2, \text{ etc}$$

Determinando a solução em H_1 , quer dizer tomando a primeira função coordenada, a solução tomará a forma:

$$u_1 = a_1 \phi_1$$

e o coeficiente a_1 será determinado exigindo que o resíduo seja ortogonal a todo elemento de H_1 . Logo:

$$-a_1 \int_0^L x(L-x) AE \frac{d^2}{dx^2} \{x(L-x)\} dx - \int_0^L qx(L-x) dx = 0$$

de onde,

$$2AE \int_0^L x(L-x) dx a_1 - q \int_0^L x(L-x) dx = 0$$

cujas soluções são,

$$a_1 = \frac{q}{2AE}$$

A solução aproximada obtida com o Método de Galerkin é:

$$u_1 = \frac{q}{2AE} x(L-x)$$

que é, neste caso, a **própria solução exata**.

Exemplo 2.4 Considere o mesmo problema anterior, mas utilizando uma distribuição triangular de carga q dada por:

$$q = q_0 \frac{x}{L}$$

A solução exata é,

$$u = \frac{q_0 L^2}{6AE} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

Calculando a solução de Galerkin com a primeira função ϕ_1 , vem que,

$$2AE \int_0^L x(L-x) dx a_1 - \frac{q_0}{L} \int_0^L x^2(L-x) dx = 0$$

Integrando, obtém-se,

$$a_1 = \frac{q_0}{4AE}$$

e a solução aproximada resulta,

$$u_1 = \frac{q_0}{4AE} x(L-x) = \frac{q_0 L^2}{4AE} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Seja agora a solução aproximada com dois termos, ou seja, considera-se as duas primeiras funções coordenadas:

$$\phi_1 = x(L-x), \phi_2 = x^2(L-x)$$

Os coeficientes da matriz são:

$$K_{11} = - \int_0^L \phi_1 AE \phi_1'' dx = \int_0^L 2AE x(L-x) dx = \frac{1}{3} AEL^3$$

$$K_{12} = - \int_0^L \phi_1 AE \phi_2'' dx = \int_0^L -x(L-x) AE (2L-6x) dx = \frac{1}{6} AEL^4$$

$$K_{21} = - \int_0^L \phi_2 AE \phi_1'' dx = \int_0^L 2x^2(L-x) AE dx = \frac{1}{6} AEL^4$$

Como pode-se notar, $K_{12} = K_{21}$, dizendo que o operador é simétrico.

$$K_{22} = - \int_0^L \phi_2 AE \phi_2'' dx = \int_0^L x^2(L-x) AE (2L-6x) dx = -\frac{16}{15} AEL^5$$

Por sua vez, os coeficientes dos termos independentes resultam

$$f_1 = \int_0^L q_0 \frac{x}{L} \phi_1 dx - \int_0^L q_0 \frac{x^2}{L} (L-x) dx = \frac{1}{12} q_0 L^3$$

$$f_2 = \int_0^L q_0 \frac{x}{L} \phi_2 dx - \int_0^L q_0 \frac{x^3}{L} (L-x) dx = \frac{1}{20} q_0 L^4$$

Logo, o sistema a resolver consiste em:

$$\frac{AEL^3}{6} \begin{bmatrix} 2 & L \\ L - \frac{96}{15} & L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{q_0 L^3}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} L \end{Bmatrix}$$

A solução do sistema conduz a:

$$a_1 = \frac{q_0}{AE} \frac{35}{138} \quad a_2 = \frac{q_0}{138AE L}$$

e a solução aproximada será:

$$u_2 = \frac{35}{138} \frac{q_0}{AE} x(L-x) - \frac{q_0}{138AE L} x^2(L-x) = \frac{35}{138} \frac{q_0 L^2}{AE} \left[\frac{x}{L} - \frac{36}{35} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{1}{35} \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

Na Tabela 2.3, comparam-se as soluções aproximadas u_1 e u_2 com a exata.

x/L	uAE/q_0L^2	u_1AE/q_0L^2	u_2AE/q_0L^2
0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0165	0.0225	0.0228
0.2	0.0320	0.0400	0.0403
0.3	0.0455	0.0525	0.0528
0.4	0.0560	0.0600	0.0602
0.5	0.0625	0.0625	0.0625
0.6	0.0640	0.0600	0.0598
0.7	0.0595	0.0525	0.0522
0.8	0.0480	0.0400	0.0397
0.9	0.0285	0.0225	0.0222
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 2.3: Exemplo 3: comparação entre as soluções.

Exercício 2.3 Determine a solução aproximada u_3 do problema anterior e compare com a solução exata.

Exemplo 2.5 Nos exemplos anteriores, foram tomadas funções de bases polinomiais. Considere, agora, funções trigonométricas:

$$\phi_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \dots$$

que, como se vê, satisfazem as condições de contorno. A aproximação mais simples consistirá em adotar $n = 1$, logo:

$$-\int_0^L \phi_1 AE \phi_1'' dx a_1 = \int_0^L \frac{q_0 x}{L} \phi_1 dx$$

de onde $\phi_1 = \sin \frac{\pi x}{L}$.

Substituindo, tem-se,

$$\int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx a_1 = \frac{q_0}{L} \int_0^L x \sin \frac{\pi x}{L} dx$$

$$\frac{\pi^2 AE}{L^2} \frac{L}{2} a_1 = \frac{q_0}{L} \int_0^L x \sin \frac{\pi x}{L} dx$$

de onde:

$$a_1 = \frac{2q_0}{\pi^2 AE} \int_0^L x \sin \frac{\pi x}{L} dx$$

$$a_1 = \frac{2q_0}{\pi^2 AE} \left[\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{xL}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \right]_0^L = \frac{2q_0 L^2}{\pi^3 AE}$$

A solução aproximada resulta:

$$u_1 = \frac{2q_0 L^2}{\pi^3 AE} \sin \frac{\pi x}{L}$$

Calculando, agora, a solução tomando o conjunto de todas as funções coordenadas,

$$\phi_1 = \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \phi_2 = \sin \frac{2\pi x}{L}, \quad \dots \phi_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad etc$$

Recordando que:

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases}$$

tem-se que os coeficientes da matriz K são todos nulos exceto os da diagonal principal:

$$K_{ii} = \frac{\pi^2 i^2 AE}{L^2} \frac{L}{2} = \frac{\pi^2 i^2 AE}{2L}$$

Por sua vez, o termo independente i -ésimo resulta:

$$f_i = \frac{q_0}{L} \int_0^L x \sin \frac{i\pi x}{L} dx = -\frac{q_0 L}{i\pi} \cos i\pi$$

e o sistema de equações que o Método de Galerkin proporciona se reduz a:

$$\frac{\pi^2 i^2 AE}{2L} a_i = -\frac{q_0 L^2}{i\pi} \cos i\pi, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

de onde:

$$a_1 = -\frac{2q_0 L^2}{i^3 \pi^3 AE} \cos i\pi = \frac{2q_0 L^2 (-1)^{i+1}}{i^3 \pi^3 AE}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

A solução aproximada obtida através do Método de Galerkin resulta em:

$$u^a = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{2q_0 L^2}{i^3 \pi^3 AE} \sin \frac{i\pi x}{L}$$

Na Tabela 2.4, comparam-se os resultados para $i = 1$ e $i = 2$ com a solução exata.

x/L	uAE/q_0L^2	u_1AE/q_0L^2	u_2AE/q_0L^2
0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0165	0.0199	0.0152
0.2	0.0320	0.0379	0.0302
0.3	0.0455	0.0522	0.0445
0.4	0.0560	0.0613	0.0566
0.5	0.0625	0.0645	0.0645
0.6	0.0640	0.0613	0.0661
0.7	0.0595	0.0522	0.0599
0.8	0.0480	0.0379	0.0455
0.9	0.0285	0.0199	0.0247
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 2.4: Exemplo 4: comparação entre as soluções.

Até aqui, tem-se aplicado o Método de Galerkin sem levar em consideração as características que o operador A pode ter. Isto implica na necessidade de se trabalhar com funções coordenadas que, além de satisfazer, em princípio, todas as condições de contorno, devem ser suficientemente regulares para que a aplicação do operador diferencial A às funções coordenadas ϕ_i tenha sentido.

Em numerosos problemas da Física Matemática, o operador A apresenta características tais como simetria, positividade e de ser limitado inferiormente (ver Capítulo I). Através destas características é possível trabalhar, aplicando o Método de Galerkin, com funções coordenadas que não precisam ser tão regulares como as anteriores, nem tampouco precisam satisfazer todas as condições de contorno.

Para fixar as idéias aqui expostas, tomam-se alguns exemplos e posteriormente passa-se a formalizar sua apresentação.

Considere o problema do valor de contorno que vem sendo estudado,

$$\begin{aligned} -AE \frac{d^2 u}{dx^2} &= q, \quad x \in (0, L) \\ u(0) &= u(L) = 0 \end{aligned}$$

Segundo foi visto, o domínio do operador $A = -AE \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}$ está dado por,

$$D_A = \left\{ v; v \in C^2(0, L), v(0) = v(L) = 0 \right\}$$

Dado o conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty \in D_A$, o Método de Galerkin consistia em determinar a solução aproximada $u_n \in \text{Span} \{\phi_i\}_{i=1,n}$ com a propriedade de que o resíduo $-AE \frac{d^2 u_n}{dx^2} - q = r_n$ seja ortogonal a todo elemento de $\text{Span} \{\phi_i\}_{i=1,n}$. Em outras palavras, determinar $u_n \in \text{Span} \{\phi_i\}_{i=1,n}$ tal que:

$$(Au_n - f, v_n) = \int_0^L \left(-AE \frac{d^2 u_n}{dx^2} - q \right) v_n dx = 0, \quad \forall v_n \in \text{Span} \{\phi_i\}_{i=1}^n$$

Dado que u_n e v_n também pertencem a D_A , tem-se a expressão anterior, que integrando por parte nos conduz a :

$$\int_0^L \left(-AE \frac{d^2 u}{dx^2} - q \right) v_n dx = \int_0^L \left(AE \frac{du_n}{dx} \frac{dv_n}{dx} - q v_n \right) dx - AE \frac{du_n}{dx} v_n \Big|_0^L = 0, \forall v_n \in \text{Span} \{ \phi_i \}_{i=1}^n$$

Na expressão anterior, o termo no contorno é nulo por ser $v_n(0) = v_n(L) = 0$. Logo, o problema de Galerkin se reduz a:

$$\int_0^L AE \frac{du_n}{dx} \frac{dv_n}{dx} = \int_0^L q v_n dx, \forall v_n \in \text{Span} \{ \phi_i \}_{i=1}^n$$

que é idêntico a:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \int_0^L AE \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \right\} a_j = \int_0^L q \phi_i dx, i = 1, 2, \dots, n$$

Na expressão anterior, as funções u_n e v_n não precisam ser tão regulares. De fato, é suficientemente, por exemplo, que sejam elementos de $C_{cp}^1(0, L)$, quer dizer, funções contínuas com derivadas contínuas por parte, continuando nulas no contorno.

A observação anterior é de enorme importância já que traz conjuntamente dois aspectos já discutidos:

- As funções coordenadas são menos regulares. Isto facilita a sua construção.
- Ao serem menos regulares, é mais fácil construir funções coordenadas de suporte compacto.

Como será visto mais adiante, estes aspectos são fundamentais no Método dos Elementos Finitos.

Como um exemplo, as funções coordenadas mais simples em $C_{cp}^1(0, L)$ e nulas no contorno podem ser construídas da seguinte forma.

Dado um intervalo $(0, L)$, divide-se o mesmo em N subintervalos que, por simplicidade, supõe-se serem iguais. Ao realizar esta partição, tem-se definidos $N - 1$ pontos, sendo o ponto genérico i de coordenada $x_i = ih, h = \frac{L}{N}$. A cada nó i , pode-se associar a função ϕ_i que satisfaz a propriedade de ser nula para todo $x \in (x_{i-1}, x_i)$, vale 1 em x_i variando linearmente em (x_{i-1}, x_i) e (x_i, x_{i+1}) . Esta função pode ser expressar da seguinte forma (Figura 2.3),

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h} & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Os elementos do espaço $\text{Span} \{ \phi_i \}_{i=1}^{N-1}$ estão definidos por:

$$v_n = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \phi_i$$

Figura 2.3: Função ϕ_i .

e pela definição das funções ϕ_i resulta:

$$v_n(x_i) = a_i$$

Observa-se que os coeficientes a_i passam a ter um significado mais preciso: a_i é o valor de v_n no ponto x_i da partição (Figura 2.4).

Figura 2.4: Função ϕ_i .

Ao aplicar o Método de Galerkin, a equação i -ésima, ou seja, a equação associada à função ϕ_i está dada para o exemplo em consideração por:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \int_0^L AE \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \right\} a_j = \int_0^L q \phi_i dx, i = 1, 2, \dots, N-1$$

Por serem as funções ϕ_i de suporte compacto, os únicos coeficientes não-nulos na somatória do primeiro membro estão associados ao índices $j = i-1, i, i+1$. Por outro lado,

$$\int_0^L q \phi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q \phi_i dx$$

O cálculo destes coeficientes resulta *ainda* mais simples em virtude de que $\frac{d\phi_i}{dx}$ está dado por:

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \frac{1}{h} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Como se vê, as derivadas resultam constantes por partes, facilitando o cálculo dos coeficientes.

Se considera-se uma partição como na Figura 2.4, os coeficientes da matriz e o termo independente do sistema de equações resultam iguais a:

$$K_{11} = \int_0^{2h} AE \frac{1}{h^2} dx = \frac{2AE}{h} = K_{22} = K_{33}$$

$$K_{12} = K_{21} = \int_h^{2h} AE \frac{1}{h^2} dx = -\frac{AE}{h} = K_{23} = K_{32}$$

$$f_1 = \int_0^h q \frac{x}{h} dx - \int_h^{2h} q \frac{(x-2h)}{h} dx = qh = f_2 = f_3$$

Matricialmente, o sistema consiste em:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{qh^2}{AE} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

cujas solução consiste em

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{qh^2}{AE} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{qh^2}{AE} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Desta forma, a solução aproximada resulta,

$$u^a = \frac{qh^2}{AE} \frac{1}{4^3} (6\phi_1 + 8\phi_2 + 6\phi_3)$$

Em particular para $x = L/2$, a solução exata conduzia ao resultado (ver Exemplo 1):

$$\begin{aligned} u|_{x=\frac{L}{2}} &= \frac{q}{2AE} x(L-x) \Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{qL^2}{AE8} \\ u^a|_{x=\frac{L}{2}} &= a_2 = \frac{qL^2}{AE} \frac{8}{4^3} = \frac{qL^2}{AE8} \end{aligned}$$

ou seja, obtém-se o valor exato. No ponto $x = L/4$, tem-se,

$$\begin{aligned} u|_{x=\frac{L}{4}} &= \frac{q}{2AE} x(L-x) \Big|_{x=\frac{L}{4}} = \frac{3}{32} \frac{qL^2}{AE} \\ u^a|_{x=\frac{L}{4}} &= a_2 = \frac{6}{4^3} \frac{qL^2}{AE} = \frac{3}{32} \frac{qL^2}{AE} \end{aligned}$$

Como pode-se observar, novamente alcançou-se o valor exato. Entretanto, entre dois pontos da partição, a solução aproximada é linear, enquanto a solução exata é quadrática. A diferença entre a solução aproximada exata faz-se sentir quando se tomam as derivadas. Em efeito, a derivada de u^a é constante em cada subregião definida pela partição. O mesmo não ocorre com a solução exata cuja derivada é linear em $(0, L)$.

Na solução aproximada, a derivada é constante em cada subregião, sendo descontínua no ponto comum de duas subregiões. No exemplo em consideração, tem-se:

- Solução exata:

$$\frac{du}{dx} = \frac{q}{2AE} (L - 2x), x \in (0, L)$$

- Solução aproximada:

$$\frac{du^a}{dx} = \frac{1}{4^3} \frac{qL^2}{AE} (6\phi'_1 + 8\phi'_2 + 6\phi'_3), x \in (0, L)$$

Recordando a definição das ϕ_i resulta:

$$\begin{aligned}\frac{du^a}{dx} &= \frac{6}{4^3} \frac{qL^2}{AE} \frac{1}{h} = \frac{3}{8} \frac{qL}{AE}, x \in \left(0, \frac{L}{4}\right) \\ \frac{du^a}{dx} &= \frac{6}{4^3} \frac{qL^2}{AE} (6\phi'_1 + 8\phi'_2) = \frac{1}{4^3} \frac{qL^2}{AE} \left(-\frac{6}{h} + \frac{8}{h}\right) \\ &= \frac{2}{4^3} \frac{qL^2}{AEh} = \frac{1}{8} \frac{qL}{AE}, x \in \left(\frac{L}{4}, \frac{L}{2}\right)\end{aligned}$$

e dada a simetria, nas outras das subregiões, as derivadas são iguais mas de sinais contrários com as suas respectivas regiões simétricas.

Observa-se outro detalhe importante. Por exemplo, no primeiro intervalo, o valor da derivada da solução exata varia linearmente entre os valores:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \frac{qL}{2AE} \text{ e } \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=\frac{L}{4}} = \frac{qL}{4AE}$$

Logo o valor médio será:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{\text{médio}} = \frac{\left(\frac{qL}{2AE} + \frac{qL}{4AE}\right)}{2} = \frac{3}{8} \frac{qL}{AE}$$

Como pode-se ver, o valor médio no intervalo $\left(0, \frac{L}{4}\right)$ da derivada da solução exata coincide com o valor da derivada (constante) da solução aproximada.

De uma maneira intuitiva, o exposto anteriormente diz que, aumentando o número de sub-regiões ($N \rightarrow \infty$ para $h \rightarrow 0$), tem-se que u^a se aproximará da solução exata. Matematicamente (veja Método de Energia, Seminários de Mecânica Aplicada do Laboratório de Computação Científica) se pode demonstrar que:

$$u^a \rightarrow u, \text{ uniformemente}$$

e se q é suficientemente regular (caso do exemplo),

$$\frac{du^a}{dx} \rightarrow \frac{du}{dx}, \text{ uniformemente}$$

Se q não é tão regular, a convergência da derivada primeira é no sentido da média ou L_2 , ou seja,

$$\int_0^L \left(\frac{du^a}{dx} - \frac{du}{dx}\right)^2 dx \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$$

Agora bem, empregando funções coordenadas como as que se tem utilizando, para cada partição (quer dizer, para cada N e, portanto, para cada $h = \frac{L}{N}$) será necessário construir **toda** a matriz do sistema e seu vetor termo independente. Entretanto, a construção desta matriz

resulta extremamente facilitada através da definição de uma matriz de base ou elementar. De fato, recorde que o Método de Galerkin consistia em:

$$\int_0^L AE \frac{du_n}{dx} \frac{dv_n}{dx} dx = \int_0^L q v_n dx, \forall v_n \in \text{Span} \{ \phi_i \}_{i=1}^n$$

de onde n está associado à divisão realizada no intervalo $(0, L)$. Em particular, se N é o número de subintervalos, $n = N - 1$. Para esta divisão, a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\sum_{e=1}^n \left\{ \int_{\Omega_e} AE \frac{du_n^e}{dx} \frac{d\phi_i^e}{dx} dx - \int_{\Omega_e} q \phi_i^e dx \right\} = 0, i = 1, 2, \dots, N - 1$$

de onde u_n^e e ϕ_i^e são as restrições de u_n e ϕ_i sobre a região $\Omega_e = \{(e-1)h, eh\}$, $h = \frac{L}{N}$, dizendo:

$$u_n^e = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \Omega_e \\ a_{e-1} \phi_{e-1}^e + a_e \phi_e^e & \text{se } x \in \Omega_e \end{cases}$$

$$\phi_i^e = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [x_{e-1}, x_e] \\ -\frac{x - x_e}{h} & \text{para todo } x \in [x_{e-1}, x_e] \text{ se } i = e - 1 \\ \frac{x - x_{e-1}}{h} & \text{para todo } x \in [x_{e-1}, x_e] \text{ se } i = e \end{cases}$$

As Figuras 2.5 e 2.6 representam geometricamente o que foi exposto;

Figura 2.5: Restrição de u_n em $\Omega_e = \Omega_2$.

Figura 2.6: Restrição de ϕ_1 e ϕ_2 em $\Omega_e = \Omega_2$.

Do anterior, segue-se que cada subregião e colabora com o sistema global de equações através do seguinte sistema de equações associada à subregião e -ésima:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{e-1} \\ a_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{bmatrix}$$

de onde:

$$K_{11}^e = \int_{\Omega_e} AE \left(\frac{d\phi_{e-1}^e}{dx} \right)^2 dx = \frac{AE}{h}$$

$$K_{22}^e = \int_{\Omega_e} AE \left(\frac{d\phi_e^e}{dx} \right)^2 dx = \frac{AE}{h}$$

$$K_{12}^e = K_{21}^e = \int_{\Omega_e} AE \frac{d\phi_{e-1}^e}{dx} \frac{d\phi_e^e}{dx} dx = -\frac{AE}{h}$$

$$f_1^e = \int_{\Omega_e} q \phi_{e-1}^e dx, \quad f_2^e = \int_{\Omega_e} q \phi_e^e dx$$

Substituindo estas expressões no sistema de equações anterior resulta:

$$\frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{e-1} \\ a_e \end{bmatrix} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{bmatrix}$$

e para o exemplo em consideração ($q = \text{cte}$), o sistema anterior resulta,

$$\frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{e-1} \\ a_e \end{bmatrix} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desta maneira, uma vez calculado o sistema de equações associado a cada subregião e (como será visto mais adiante o Método de Elementos Finitos chama esta subregião de *elemento e*), o sistema global é estabelecido através da montagem adequada de cada um dos subsistemas. A Figura 2.7 representa geometricamente a idéia anterior para o caso particular do elemento $e = 4$ e $N = 8$.

Figura 2.7: Montagem da matriz global.

Como pode-se observar na Figura 2.7, cada coeficiente global é obtido somando cada uma das contribuições locais que estão associadas ao mesmo.

Um outro aspecto importante do Método de Galerkin deve ser discutido. Até aqui, tem-se exigido que as funções coordenadas satisfaçam **todas** as condições de contorno até agora supostas homogêneas. Deseja-se mostrar que quando o operador é simétrico positivo-definido, as condições de contorno denominadas naturais (ver Capítulo I) não precisam ser satisfeitas pelas funções coordenadas. Em outras palavras, quando o operador é simétrico positivo-definido, as **condições de contorno principais são as únicas que precisam ser satisfeitas** pelas funções coordenadas.

Para discutir isto, considera-se um exemplo típico. Tome o problema de uma barra tracionada com um extremo livre. O problema de valor de contorno consiste em determinar u tal que:

$$\begin{aligned} -AE \frac{d^2 u}{dx^2} &= q, x \in (0, L) \\ u(0) &= 0 \\ AE \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

Segundo foi visto, o domínio do operador é o espaço vetorial:

$$D_A = \left\{ u, u \in C^2(0, L), u|_{x=0}, \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \right\}$$

Considere o espaço $Adm_u \supset D_A$:

$$Adm_u = \left\{ u, u \in C^2(0, L), \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \right\}$$

O Método de Galerkin consiste em determinar $u \in Adm_u$ tal que o resíduo associado seja ortogonal a todo elemento de Adm_u , ou seja,

$$\int_0^L \left(-AE \frac{d^2 u}{dx^2} - q \right) v dx + \left(AE \frac{du}{dx} v \right)_{x=L} = 0, \forall v \in Adm_u$$

Integrando por partes a expressão anterior, tem-se

$$\int_0^L \left(-AE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - qv \right) dx - \left(AE \frac{du}{dx} v \right) \Big|_0^L + \left(AE \frac{du}{dx} v \right)_{x=L} = 0$$

para todo $v \in Adm_u$. Da expressão anterior e da definição de Adm_u se segue que:

$$\int_0^L \left(AE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - qv \right) dx = 0, \forall v \in Adm_u$$

expressão idêntica à que havíamos chegado considerando o problema definido em D_A .

Novamente, e como já havia sido notado, a integração por parte permite reduzir o grau de regularidade sobre as funções admissíveis. O problema pode assim ser considerado como: determinar $u \in V$ tal que:

$$\int_0^L \left(AE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - qv \right) dx = 0, \forall v \in Adm_u$$

onde :

$$V \left\{ u; u \in C_{cp}^1(0, L), u(0) = 0 \right\}$$

Na continuação, apresenta-se um exemplo.

Exemplo 2.6 Considere o problema de valor de contorno:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0, x \in (0, 1)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} &= 0 \end{aligned}$$

Aplica-se Galerkin supondo, primeiro, que as funções coordenadas satisfazem todas as condições de contorno. Para este exemplo, as funções coordenadas podem ser:

$$\phi_1 = x \left(1 - \frac{x}{2} \right), \phi_2 = x^2 \left(1 - \frac{2}{3}x \right), \phi_3 = x^3 \left(1 - \frac{3}{4}x \right), \text{ etc}$$

Se tomamos a primeira função, a solução aproximada será tal que:

$$\int_0^L \left(a_1 \phi_1'' + a_1 \phi_1 + x \right) \phi_1 dx = 0$$

que integrando conduz a:

$$-\frac{2}{10}a_1 - \frac{5}{24} = 0$$

de onde:

$$a_1 = \frac{25}{24}$$

Logo, a solução aproximada será:

$$u^a = \frac{25}{24}x \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

Considere, agora, o problema definido em um espaço V onde somente a condição $u(0) = 0$ é satisfeita por todo elemento desse espaço. Aplicando Galerkin para este caso, tem-se:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \right) v dx + \frac{du}{dx} v|_{x=1} = 0, \forall v \in V$$

Integrando por partes:

$$\int_0^1 \left(-\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + uv + xv \right) dx = 0, \forall v \in V$$

As funções coordenadas são agora mais fáceis de serem escolhidas e, por exemplo, podem ser:

$$\phi_1 = x, \phi_2 = x^2, \text{ etc}$$

que, como pode ser visto, satisfazem unicamente a condição $\phi_i(0) = 0$.

Considerando as duas primeiras funções coordenadas tem-se:

$$a_1 \int_0^1 \left\{ -\phi_1'^2 + \phi_1^2 \right\} dx + a_2 \int_0^1 \left\{ -\phi_2' \phi_1' + \phi_2 \phi_1 \right\} dx = - \int_0^1 x \phi_1 dx$$

$$a_1 \int_0^1 \left\{ -\phi_1' \phi_2' + \phi_1 \phi_2 \right\} dx + a_2 \int_0^1 \left\{ -\phi_2'^2 + \phi_2^2 \right\} dx = - \int_0^1 x \phi_2 dx$$

de onde:

$$\begin{array}{cc} -\frac{2}{3}a_1 & -\frac{3}{4}a_2 \\ -\frac{3}{4}a_1 & -\frac{17}{15}a_2 \end{array} = \begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{array}$$

Em forma matricial, a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{17}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

cujas soluções conduzem a:

$$a_1 = \frac{137}{139}; a_2 = -\frac{60}{139}$$

Logo, a solução aproximada é:

$$\bar{u}^a = \frac{137}{139}x - \frac{60}{139}x^2$$

x	u	u^a	$\bar{u}^a$
0.0	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.095092	0.099958	0.094245
0.2	0.157700	0.197500	0.179856
0.3	0.245953	0.255525	0.284029
0.4	0.320742	0.333333	0.325180
0.5	0.397329	0.390625	0.384892
0.6	0.445049	0.437500	0.435971
0.7	0.492329	0.473958	0.478417
0.8	0.527594	0.500000	0.512230
0.9	0.549794	0.515625	0.537410
1.0	0.557409	0.520933	0.553957

Tabela 2.5: Exemplo 6: comparação entre as soluções.

Na Tabela 2.5, compara-se a solução exata:

$$u = \frac{\sin x}{\cos 1} - x$$

com as soluções aproximadas u^a e $\bar{u}^a$.

A derivada de $\bar{u}^a$ em $x = 1$ resulta:

$$\frac{d\bar{u}^a}{dx} = \frac{137}{139} - \frac{120}{139} = \frac{17}{139} = 0.122302$$

que, como pode-se notar, resulta aproximadamente nula. Em particular, à medida que aumenta-se o número de funções coordenadas que irão intervir na solução aproximada, a derivada em $x = 1$ tende a zero.

Condições de Contorno Não-homogêneas

Na secção anterior, foi apresentado o Método de Galerkin analisando o caso de condições de contorno homogêneas. Nesta secção, apresenta-se como trabalhar com o método quando as condições de contorno são não-homogêneas.

Para isso considera-se inicialmente um exemplo e, posteriormente, generalizam-se os resultados.

Considere uma viga da secção transversal retangular submetida à uma carga q e apoiada sobre uma base de fundação elástica (Figura 2.8)

Figura 2.8: Viga sob fundação flexível.

O problema de valor de contorno está dado por: determinar $u \in C^4(0, L)$ tal que satisfaça

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + ku = q, \text{ em todo } x \in (0, L)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2 u}{dx^2} &= \bar{M}_i \quad ; i = 0, L \\ EI \frac{d^3 u}{dx^3} &= \bar{Q}_i \quad ; i = 0, L \end{aligned}$$

onde $\bar{M}_i$ e $\bar{Q}_i$ são os momentos e as forças cortantes aplicadas nas extremidades da viga e k o coeficiente de elasticidade da fundação.

Considere $v \in C_{cp}^2(0, L)$. Logo, o problema do valor de contorno anterior é equivalente ao de determinar a função $u \in C_{cp}^2$ tal que para todo $v \in C_{cp}^2(0, L)$,

$$\int_0^L EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \int_0^L kuv dx - \int_0^L qv dx + Q_L v(L) + \bar{M}_L v'(L) - \bar{Q}_0 v(0) - \bar{M}_0 v'(0) \quad (2.1)$$

Para provar o anterior, integra-se por partes o primeiro membro da equação anterior. Tem-se assim:

$$\begin{aligned} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx + \int_0^L kuv dx &= \int_0^L EI \frac{d^4 u}{dx^4} v dx + EI \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} \Big|_0^L - EI \frac{d^3 u}{dx^3} v \Big|_0^L \\ &= \int_0^L qv dx + \bar{Q}_i v \Big|_0^L + \bar{M}_i v' \Big|_0^L \end{aligned}$$

Agrupando, convenientemente, tem-se:

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^4 u}{dx^4} + k - q \right) v dx + \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} - \bar{M}_i \right) \frac{dv}{dx} \Big|_0^L + \left(-EI \frac{d^3 u}{dx^3} - \bar{Q}_i \right) v \Big|_0^L = 0$$

para todo $v \in C_{cp}^2(0, L)$. O anterior diz que cada termo deve ser nulo. Logo, o primeiro termo conduz à própria equação que governa o problema. O segundo termo diz que se as derivadas das funções coordenadas não satisfazem nenhuma restrição no contorno, a solução do problema variacional satisfaz na forma natural a condição:

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} = \bar{M}_i, i = 0, L$$

O mesmo ocorre com o terceiro termo que garantirá que a solução irá satisfazer:

$$-EI \frac{d^3 u}{dx^3} - \bar{Q}_i = 0, i = 0, L$$

Em outras palavras, a solução u do problema de valor de contorno é tal que o **resíduo** é ortogonal a toda função $v \in C_{cp}^2(0, L)$.

Agora bem, o Método de Galerkin permite determinar uma solução aproximada do problema. Segundo foi visto, basta definir o problema variacional desenvolvido anteriormente num espaço de dimensão finita. A condição de ortogonalidade do resíduo neste espaço de dimensão finita equivale a dizer que o resíduo é ortogonal a cada uma das funções bases desse espaço.

Em outras palavras, dadas as funções coordenadas $\{\phi_i\}_{i=1,\infty}$ denso em $C_{cp}^2(0, L)$, o Método de Galerkin consistirá em determinar $u_n \in V_n = \text{Span}\{\phi_i\}_{i=1,n}$ tal que:

$$\int_0^L EI \frac{d^2 u_n}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx + \int_0^L k u_n \phi_i dx = \int_0^L q \phi_i dx + \left(\bar{Q} \phi_i + \bar{M} \phi_i' \right) \Big|_0^L, i = 1, 2, \dots, n$$

Como pode ser visto, o problema consiste agora em determinar as funções bases ϕ_i . Estas funções devem ser funções contínuas com derivadas contínuas e com derivadas segundas quadrado integráveis.

Por exemplo, poderia se trabalhar com funções coordenadas do tipo senos e/ou co-senos ou ainda com polinômios. Estas funções estão definidas em todo intervalo $(0, L)$ e são mais regulares do que realmente necessário. Como já foi notado anteriormente, no caso de estarem definidas em todo o intervalo $(0, L)$ traz junto alguns inconvenientes:

- Matriz do sistema cheia e, portanto, geralmente com tendência a mal-concicionamento numérico à medida que aumenta-se n .
- Dificuldade em satisfazer as condições de contorno principais.

No caso de serem mais regulares do que o necessário, impossibilita de colocar em evidência alguma descontinuidade que o problema pode admitir. Por exemplo, se os momentos de inércia ou os módulos de elasticidade são descontínuos em x_0 , nesse ponto existe uma descontinuidade na derivada segunda. Se a carga aplicada na viga é do tipo concentrada, tem-se descontinuidade na derivada terceira.

Novamente, percebe-se que é vantajoso trabalhar com funções coordenadas de suporte compacto. O leitor poderá notar que as funções polinomiais cúbicas definidas por:

$$f_i(x) = \begin{cases} \equiv 0 & \text{se } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i-1} \text{ e } x = x_{i+1} \\ y \text{ tal que } \frac{df}{dx} = 0 & \text{em } x = x_{i-1} \\ x = x_i & , x = x_{i+1} \end{cases}$$

$$g_i(x) = \begin{cases} \equiv 0 & \text{para } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 0 & x = x_{i-1} \text{ e } x = x_{i+1} \\ \frac{dg}{dx} = 0 & \text{em } x = x_{i-1}, x_{i+1} \\ \frac{dg}{dx} = 1 & , x = x_i \end{cases}$$

podem ser consideradas como funções bases e tem a característica de serem de suporte compacto (Figura 2.9).

Figura 2.9: Funções cúbicas de suporte compacto.

Figura 2.10: Exercício 4.

Exercício 2.4 *Aplique o Método de Galerkin no problema da viga em flexão da Figura 2.10.*

1. *Defina a equação diferencial que governa o problema.*
2. *Condições de contorno. Quais são as condições principais e quais as naturais?*
3. *Defina o Método de Galerkin para este problema.*
4. *Determine as funções coordenadas tipo seno ou co-seno correspondentes.*
5. *Determine a solução aproximada tomando $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e compare com a solução exata.*

Exercício 2.5 *Idem ao problema anterior mas com polinômios.*

Exercício 2.6 *Idem ao primeiro problema mas com funções de suporte compacto como as apresentadas. Qual é a função coordenada associada ao nó $x = L$? Trabalhe com um só ponto $x_1=L$ e com dois pontos $x_1 = 0.5L$, $x_2 = L$. Compare com a solução exata. Comente os resultados.*

Exercício 2.7 *Considere o problema de torção de uma barra de secção retangular (Figura 2.11). O problema de valor de contorno consiste em determinar ϕ tal que:*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 2G\theta, \text{ em } \Omega = (0, a) \times (0, b), \phi = 0 \text{ em } S$$

Figura 2.11: Exercício 7: torção numa barra retangular

Aplique o Método de Galerkin tomando como função coordenada:

$$\Psi_1 = x(x-a)y(y-b)$$

e compare com a solução exata. Defina as outras funções bases Ψ_2, Ψ_3 , etc.

Exercício 2.8 *Aplique o Método de Galerkin ao problema anterior, mas com funções coordenadas do tipo seno. Defina estas funções e calcule a solução aproximada para o caso de $n = 1$. Compare com a solução polinomial anterior. Pode-se definir a solução para $n = \infty$? Comente sua resposta e em caso afirmativo, dê esta solução.*

2.3 Método de Ritz

2.3.1 Mínimo de um Funcional

O problema básico que deseja-se resolver consiste em determinar a solução de uma certa equação diferencial associada a determinadas condições homogêneas de contorno. Chamando como D_A o conjunto de funções u suficientemente regulares (no sentido do operador diferencial A) tal que satisfaçam as condições de contorno do problema, tem-se que o anterior é equivalente a determinar $u \in D_A$ tal que:

$$Au = f \text{ em } \Omega \quad (2.2)$$

e como $u \in D_A$ significa explicitamente que as condições de contorno estão todas satisfeitas. No que segue, supõe-se, também, que o operador A é **positivo-definido**(p.d.).

Em virtude da limitação anterior (o operador A é p.d.) pode-se colocar o seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Se o operador A é positivo-definido, o problema de valor de contorno definido anteriormente é tal que se **existe solução, a mesma é única.***

Demonstração: Suponha que existam duas soluções $u_1 \neq u_2$, logo:

$$Au_1 = f \quad , \quad Au_2 = f$$

subtraindo membro a membro e da linearidade do operador A resulta:

$$A(u_1 - u_2) = 0 \text{ em } \Omega$$

multiplicando ambos os membros da equação anterior por $(u_1 - u_2)$ e integrando em Ω tem-se:

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2) A(u_1 - u_2) d\Omega = 0$$

Agora, por ser A p.d. tem-se (ver capítulo 1):

$$(v, Av) \geq 0 \quad e \quad = 0 \quad \text{se e somente se } v = 0$$

disto e da expressão anterior se segue que:

$$u_1 = u_2$$

com isso, demonstra-se o teorema.

Pode-se colocar agora um segundo teorema que é a base do ponto de partida do Método de Ritz.

Teorema 2.2 Teorema do Mínimo de um Funcional. *Seja A positivo definido e suponha que o problema de valor de contorno tenha solução. Logo, de todos os valores alcançados pelo funcional,*

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_{\Omega} u A u d\Omega - 2 \int_{\Omega} f u d\Omega \quad (2.3)$$

para cada uma das funções $u \in D_A$, o **menor** é o valor dado a este funcional pela solução do problema. Reciprocamente, se existe em D_A uma função que minimiza $F(u)$, esta função será solução de (2.1).

Demonstração: Seja $u_0 \in D_A$ solução de $Au = f$, que é única pelo **Teorema 1**. Logo:

$$Au_0 = f$$

que substituída em (2.3) conduz a:

$$\begin{aligned} F(u) &= (Au, u) - 2(Au_0, u) = (Au, u) - 2(Au_0, u) + (Au_0, u_0) - (Au_0, u_0) = \\ &= (A(u - u_0), u) + (Au_0, u_0 - u) - (Au_0, u_0) = \\ &= (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0) \end{aligned}$$

Os dois termos do segundo membro são estritamente positivos. Logo, o menor valor que alcançará o funcional $F(u)$ corresponde ao campo u que anula o primeiro termo do segundo membro, ou seja,

$$u = u_0$$

Em particular, para $u = u_0$, o valor mínimo $F(u_0)$ será:

$$\min_{u \in D_A} F(u) = F(u_0) = - (Au_0, u_0)$$

A primeira parte do teorema está assim demonstrada. Para demonstrar a segunda parte, suponha que existe $u^* \in D_A$ fazendo com que o funcional $F(u)$ alcance seu valor mínimo. Logo, para todo $v \in D_A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$F(u^* + \lambda v) - F(u^*) \geq 0 \text{ para todo } v \in D_A, \lambda \in \mathbb{R}$$

Desenvolvendo a expressão anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} A((u^* + \lambda v), (u^* + \lambda v)) - 2(f, u^* + \lambda v) - (Au^*, u^*) + 2(f, u^*) &= \\ = 2\lambda(Au^*, v) + \lambda^2(Av, v) - 2\lambda(f, v) &= \\ = 2\lambda(Au^* - f, v) + \lambda^2(Av, v) \geq 0 \end{aligned}$$

para todo $v \in D_A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A desigualdade anterior é não-negativa e quadrática em λ . Logo, seu discriminante deve ser não-positivo:

$$(Au^* - f, v)^2 - (Av, v) \cdot 0 \leq 0 \quad \forall v \in D_A, \lambda \in \mathbb{R}$$

portanto:

$$(Au^* - f, v) = 0 \quad \forall v \in D_A$$

Mostra-se agora que a equação anterior implica que $Au^* - f = 0$. Dada a regularidade assumida sobre D_A , a função $\Psi = \Psi(x) = A u^*(x) - f(x)$ para $x \in \Omega$ é **contínua**. Suponha que Ψ não seja identicamente nula. Logo existe um $x = P$ onde, por exemplo, $\Psi(P) > 0$. Pela

continuidade de Ψ existe uma esfera ω de centro em P contida em Ω na qual Ψ é **estritamente positiva** ($\Psi(x) > 0$, $x \in \omega$). Como $v \in D_A$ é arbitrário, adota-se a seguinte função:

$$v = v(x) = \begin{cases} (R^2 - r^2)^{K+1} & \text{se } x \in \omega \\ 0 & \text{se } x \notin \omega \end{cases}$$

onde R indica o raio da esfera ω e r a distância entre o ponto x e o centro P da mesma. Por sua vez, k é a ordem da maior derivada contida em A (Figura 2.12).

Figura 2.12: Função φ .

Para esta função v tem-se:

$$(Au^* - f, v) = \int_{\Omega} (Au^* - f) v d\Omega = \int_{\omega} (Au^* - f) (R^2 - r^2)^{K+1} d\Omega = 0$$

o anterior é possível já que:

$$\begin{aligned} (R^2 - r^2)^{K+1} &> 0 \text{ em } \omega \\ (Au^* - f) &> 0 \text{ em } \omega \end{aligned}$$

Chegou-se a esta incongruência em virtude de supor que existia um ponto P para o qual $Au^* - f$ não era nulo, logo:

$$Au^* - f = 0$$

e da unicidade (Teorema 1) tem-se $u^* \equiv u_0$ demonstrando a segunda parte do teorema.

Como será visto nos exemplos apresentados ao longo deste texto, o funcional 2.3 resulta proporcional à *energia* do sistema em consideração. Nestes casos, o Teorema 2 é equivalente ao *Princípio da Mínima Energia Potencial*.

Como também pode-se notar, o Teorema 2 permite substituir o problema de integrar a equação diferencial sob certas condições de contorno pelo problema de determinar a função que minimize a funcional $F(u)$. Em particular, o Método de Ritz permite determinar soluções aproximadas deste problema mínimo.

Apresentam-se agora alguns exemplos que mostrarão alguns aspectos interessantes,

Exemplo 2.7 Seja o seguinte problema de valor de contorno:

$$\frac{-d^2u}{dx^2} = 2 \quad x \in (0, 1)$$

com as condições de contorno:

$$u(0) = u(1) = 0$$

A solução deste problema é $u_0 = x(1 - x)$. O operador A do p.v.c. é positivo-definido (na realidade também é positivo limitado inferiormente). De fato:

$$(Au, u) = \int_0^1 -u'' u dx = -u u|_0^1 + \int_0^1 (u')^2 dx = \int_0^1 (u')^2 dx \geq 0$$

e se $(Au, u) = 0 \rightarrow u' = 0 \rightarrow u = \text{cte}$ em $(0, 1)$ e das condições de contorno $u = 0$ logo, A é positivo definido.

De acordo com o Teorema 2, a solução u_0 minimiza $F(u)$ em D_A , donde:

$$F(u) = \int_0^1 (-u''u - 4u) dx$$

Para este problema, a condição de minimizar $F(u)$ em D_A é **essencial**. De fato, considere $u_1 = x(2 - x)$. Logo, $u_1 \notin D_A$ (a condição de contorno em $x = 1$ não está satisfeita). Logo:

$$F(u_1) = \int_0^1 [2x(2 - x) - 4x(2 - x)] dx = - \int_0^1 2x(2 - x) dx = -\frac{4}{3}$$

$$F(u_0) = \int_0^1 [2x(1 - x) - 4x(1 - x)] dx = - \int_0^1 2x(1 - x) dx = -\frac{1}{3}$$

Logo $F(u_0) > F(u_1)$.

Exemplo 2.8 Seja o problema:

$$\frac{-d^2u}{dx^2} = 2 \quad x \in (0, 1) \quad (2.4)$$

com as condições de contorno:

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0 \quad (2.5)$$

O problema de valor de contorno tem como solução a função $u_0 = 3 - x^2$ e o operador com estas condições de contorno segue sendo positivo-definido. De fato:

$$\begin{aligned} (Au, u) &= \int_0^1 -u''u dx = -u u|_0^1 + \int_0^1 (u')^2 dx \\ &= -u'(1)u(1) + \int_0^1 (u')^2 dx = (u(1))^2 + \int_0^1 (u')^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Se $(Au, u) = 0 \rightarrow u' = 0$ e $u(1) = 0$, logo $u \equiv 0$.

De acordo com o Teorema 2, a função u_0 faz com que o funcional:

$$F(u) = \int_0^1 (-u^3u - 4u) dx$$

tome o menor valor de todos os valores que pode alcançar para cada $u \in D_A$. Mostra-se que para este caso a função u_0 faz com que $F(u)$ tome o menor valor comparado com os que alcançaria com **qualquer** função que em $0 \leq x \leq 1$ é contínua com derivadas primeiras também contínuas independentemente de serem satisfeitas as condições de contorno. Para mostrar isto, seja $u = u(x)$ uma função continuamente diferenciável em $x \in [0, 1]$. Pode-se definir v como:

$$v = u - u_0$$

Tem-se, assim:

$$\begin{aligned}
 F(u) &= F(u_0 + v) = \int_0^1 \left[(u_0 + v)'' (u_0 + v) - 4(u_0 + v) \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left[(u_0 + v)' (u_0 + v)' - 4(u_0 + v) \right] + (u_0' + v') (u_0 + v) \Big|_0^1 \\
 &= \int_0^1 \left[(u_0' + v')^2 - 4(u_0 + v) \right] dx + [u_0(1) + v(1)]^2 \\
 &= \int_0^1 (u_0'^2 + 2u_0'v' + v'^2 - 4u_0 - 4v) dx + u_0^2(1) + v^2(1) + 2u_0(1)v(1) \\
 &= \left\{ \int_0^1 (u_0'^2 - 4u_0) dx + u_0^2(1) \right\} + \left\{ 2 \int_0^1 (u_0'v' - 2v) dx + 2u_0(1)v(1) \right\} + \left\{ \int_0^1 v'^2 dx + v^2(1) \right\}
 \end{aligned}$$

Observa-se que o primeiro termo do segundo membro é $F(u_0)$, e o segundo, será mostrado, é nulo. De fato:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^1 (u_0'v' - 2v) dx + 2u_0(1)v(1) &= -2 \int_0^1 (u_0'' + 2) v dx + 2u_0'v \Big|_0^1 + 2u_0'(1)v(1) \\
 &= 2u_0'(1)v(1) + 2u_0(1)v(1) = 2[u_0'(1) + u_0(1)]v(1) = 0
 \end{aligned}$$

Logo, $F(u)$ toma a forma:

$$F(u) = F(u_0) + \left\{ \int_0^1 v'^2 dx + v^2(1) \right\} \geq F(u_0)$$

e igual se e somente se $v \equiv 0$ quer dizer se $u \equiv u_0$. Como resultado deste exemplo, vê-se que o problema do mínimo da função associado ao problema de valor de contorno 2.4 e 2.5 pode colocar-se em um conjunto de funções V mais amplo que D_A sem modificar o resultado. A função u_0 segue minimizando $F(u)$ em V , nas condições de contorno cujas funções não necessariamente satisfazem as condições de contorno.

Proposição 2.1 (Observação) Deve-se ressaltar que para estabelecer o Teorema 2, partiu-se da hipótese que a solução do problema de valor de contorno existia e de que existia a função que minimiza $F(u)$ em D_A . Este problema da **existência** não será discutido neste texto. O leitor interessado poderá consultar as obras de Mikhlin citadas na Bibliografia.

2.3.2 Sequências Minimizantes

Seja um certo funcional $\phi(u)$ cujos valores estão limitados inferiormente. Neste caso, pode-se demonstrar se existe um limite exato d para $\phi(u)$:

$$d = \inf_{u \in D_\phi} \phi(u) \quad (2.6)$$

onde D_ϕ é o domínio de definição de ϕ . Tomando por base o exposto anteriormente, pode-se introduzir a seguinte definição.

Definição 2.1 Sequências Minimizantes. Seja ϕ cujos valores estão limitados inferiormente em D_ϕ . A sequência $u_n, n = 1, 2, \dots$ de funções pertencentes a D_ϕ é chamada de sequência minimizante para $\phi(u)$ se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) = d \quad (2.7)$$

Seja agora A um operador positivo-definido. Logo seu funcional de energia será dado por:

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u) \quad (2.8)$$

Se existe solução u_0 do p.v.c. $Au = fy$, foi visto na secção anterior que (2.4) pode ser reescrita como:

$$F(u) = (A(u - u_0), (u - u_0)) - (Au_0, u_0) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

onde $\|\cdot\|_A$ é a norma energia (ver secção I.8 do Capítulo I). Como pode-se notar da expressão anterior, o funcional $F(u)$ está limitado inferiormente e seu ínfimo d está dado por:

$$d = \inf_{u \in D_A} f(u) = -\|u_0\|_A^2$$

Tendo presente a Definição I e a expressão anterior, concluí-se que uma sequência minimizante para a função $F(u)$ está caracterizada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = -\|u_0\|_A^2 = -\int_{\Omega} u_0 A u_0 d\Omega$$

Pode-se, assim, definir o seguinte teorema.

Teorema 2.3 *Se o problema de valor de contorno $Au = f, u \in D_A$ tem solução, logo toda sequência minimizante para a função energia $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ **converge na energia** para esta solução.*

Definição 2.1 (Demonstração) *Se u_n é uma sequência minimizante para $F(u)$, tem-se que:*

$$F(u_n) = \|u_n - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

que implica em:

$$\|u_n - u_0\|_A^2 \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

ou seja, u_n converge na energia a u_0 . Se o operador A é limitado inferiormente (Capítulo I), tem-se:

$$\int_{\Omega} u A u d\Omega = \|u_0\|_A^2 \geq \gamma^2 \|u_0\|^2 = \gamma^2 \int_{\Omega} u^2 d\Omega, \gamma > 0$$

logo, neste caso, a convergência na energia implicará também convergência na média.

Deve-se notar que o próprio Teorema 1 sugere um método de cálculo para determinar a solução aproximada de u_0 . Para isso, é suficiente construir uma sequência minimizante para a função energia associado ao problema de valor de contorno. Como será na secção a seguir, o Método de Ritz é justamente um método para a construção de sequências minimizantes.

2.3.3 Método de Ritz

Segundo foi visto, o p.v.c.:

$$Au = f + \text{c.c. homogêneas} \quad (2.9)$$

quando A é positivo definido se reduz a determinar a função $u^* \in D_A$ que minimiza a função energia:

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u), u \in D_A$$

De acordo com o que foi visto em alguns exemplos da Secção II.2 pode-se, de acordo com as condições de contorno, estender o problema do mínimo de $F(u)$ sobre um conjunto mais amplo. Para fazer este último, observa-se, primeiro, que D_A tem a estrutura algébrica de um espaço vetorial, em outras palavras combinações lineares de funções de D_A são também funções de D_A . Em virtude das propriedades exigidas das funções de D_A e dado que o operador é simétrico positivo-definido, pode-se introduzir em D_A um produto interno (ver Capítulo 1):

$$\langle u, v \rangle_A = \int_{\Omega} u A v d\Omega = \int_{\Omega} v A u d\Omega$$

para todo $u, v \in D_A$. Como já foi visto, este produto interno induz à uma métrica chamada de norma energia:

$$\|u_0\|_A = \left(\int_{\Omega} u A u d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, u \in D_A$$

Tem-se, assim, que o espaço D_A com o produto interno na energia induz, que por sua vez induz à norma energia, passa a ser um espaço vetorial com produto interno. Este espaço não é necessariamente completo, quer dizer, nem toda sequência fundamental de Cauchy converge para elementos deste espaço. Completando este espaço, ou seja, agregando ao espaço vetorial com o produto interno, todas as funções para as quais convergem todas as sequências de Cauchy, tem-se, então, o que comumente denomina-se de Espaço Energia, designado por H_A , e em virtude da forma como foi construído é um espaço de Hilbert.

Como é fácil perceber, o espaço de Hilbert H_A está formado por todas as funções em D_A (quer dizer funções bem regulares e cujas derivadas são calculadas no sentido clássico), mais outras funções u que se caracterizam porque sempre existe em D_A uma sequência $\{u_n\}_{n=1, \infty}$ tal que:

$$\|u_n - u_0\|_A^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Estas funções são mais *gerais* que as de D_A já que são menos regulares, implicando que o conceito de derivada deve ser generalizado dando lugar ao que se denomina derivada generalizada de u .

Não serão abordados mais detalhes já que só interessa o aspecto computacional do método. Portanto, é interessante ressaltar que H_A é um espaço mais amplo que D_A e menos regular, logo se apresenta como um espaço adequado para procurar a solução.

Surge aí uma pergunta: é possível estender o problema de mínimo do funcional energia $F(u)$, colocado originalmente em D_A , para o espaço energia H_A ? O mínimo de $F(u)$ é o mesmo em ambos os espaços? Existindo o mínimo de $F(u)$ em H_A , a função que o minimiza satisfaz o problema de valor de contorno?

No que segue, limita-se a explicação ao caso de operadores A positivos limitados inferiormente. Para este caso, a resposta para todas as perguntas anteriores são afirmativas. De fato, dado A positivo limitado inferiormente, foi visto que o p.v.c. era equivalente a minimizar $F(u)$ em D_A , quer dizer:

$$\min_{u \in D_A} \{F(u) = (u, Au) - 2(f, u)\}$$

Agora bem,

$$(u, Au) = \langle u, u \rangle_A$$

de onde, do ponto de vista computacional, para passar à forma do segundo membro, integrou-se por partes quantas vezes necessário e usou-se as condições de contorno. Logo, o problema anterior em H_A corresponde a:

$$\min_{u \in D_A} \{F(u) = \|u\|_A^2 - 2(f, u)\}$$

Para o caso em questão (A positivo limitado inferiormente) não é difícil mostrar que $F(u)$ está limitado inferiormente em H_A logo existe o mínimo de $F(u)$ em H_A e, por sua vez, este mínimo corresponde à solução (ao menos no sentido generalizado) do problema de valor de contorno. O sentido de uma solução generalizada quer dizer o seguinte: suponha $u_0 \in H_A$ minimiza $F(u)$, logo:

$$\langle u_0, n \rangle - (f, n) = 0, \forall n \in H_A$$

e se u_0 é suficientemente regular, a equação anterior equivale a:

$$(Au - f, n) = 0, \forall n \in H_A$$

Como pode-se notar, a condição do mínimo da função é equivalente à condição de ortogonalidade do resíduo, ponto de partida do Método de Galerkin.

Em outras palavras, já está se vendo que o Método de Galerkin e o Método de Ritz são coincidentes quando o operador é positivo definido limitado inferiormente. Do ponto de vista mecânico, o anterior equivale a dizer que o princípio do Trabalho Virtual é equivalente ao Princípio da Mínima Energia quando este último existe.

Com os elementos até aqui apresentados, pode-se utilizar o Método de Ritz. Dado o problema de valor de contorno:

$$Au = f \text{ em } \Omega + \text{c.c homogêneas}$$

Com A positivo limitado inferiormente, considere o problema do mínimo de $F(u)$ em H_A :

$$\min_{u \in H_A} \{F(u) = \langle u, u \rangle_A - 2(f, u)\}$$

Para obter uma solução aproximada do problema anterior, o Método de Ritz procede a:

1. Considere o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, chamado de funções coordenadas, completo em H_A . Do ponto de vista computacional, isto é equivalente a dizer que deve-se considerar um conjunto de funções completas satisfazendo, portanto, pelo menos todas as condições principais e devem ser de classe $C^{m-1}(\Omega)$, onde m é a ordem da maior derivada presente na função.

2. Para cada n finito, defina o espaço $H_A^n = \text{Span} \{\phi_n\} \subset H_A$, ou seja se $u \in H_A^n$ logo:

$$u = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k$$

3. Para cada n finito, substitua o problema do mínimo em H_A pelo problema do mínimo em H_A^n de dimensão finita. Quer dizer:

$$\min_{u_n \in H_A^n} F(u) = \langle u_n, u_n \rangle_A - 2(f, u_n)$$

que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\min_{a_i \in \mathbb{R}} \left\{ F(a_i) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle_A - 2 \sum_{i=1}^n a_i (f, \phi_i) \right\}, i = 1, 2, \dots, n$$

Como se vê, trata-se de uma função real de n variáveis reais $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$. A condição de mínimo implica que,

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^n \langle \phi_i, \phi_j \rangle_A a_j - (f, \phi_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Chega-se, assim, a um sistema de equações algébricas com n incógnitas cuja matriz K :

$$K = [K_{ij}] = [\langle \phi_i, \phi_j \rangle_A]$$

não é outra coisa que o Gramiano das funções coordenadas (linearmente independentes), logo o seu determinante não é nulo. Quer dizer, o sistema tem sempre solução (e inclusive é única).

Se designa-se com $a_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ a solução do sistema de equações, a sequência:

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$$

onde:

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i^* \phi_i$$

chamada de solução de Ritz de ordem n , é uma sequência minimizante para a função energia. Como consequência de ser uma sequência minimizante e por ser A positivo limitado inferiormente resulta:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u_0 \quad (u_0 \text{ solução do p.v.c.}) \\ u_n &\rightarrow u_0 \end{aligned}$$

Como pode-se notar e igual aos métodos já estudados, o Método de Ritz **requer uma definição das funções coordenadas**. Estas podem estar definidas em toda a região Ω dando lugar, em geral, à uma matriz cheia, ou podem ser de suporte compacto dando lugar à matrizes do tipo banda. Por outro lado, os coeficientes da matriz do sistema e do termo independente podem ser calculados de forma exata quando possível numericamente.

Figura 2.13: Exemplo 9.

Mostra-se, agora, alguns exemplos.

Exemplo 2.9 Considere uma viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída (ver Figura 2.13).

O problema de valor de contorno consiste em:

$$\begin{aligned} EIW^4 &= q \quad x \in (0, L) \\ u &= 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = L \quad (\text{condição de contorno principal}) \\ u'' &= 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = L \quad (\text{condição de contorno natural}) \end{aligned}$$

Primeiramente, deve-se estudar a simetria do operador. Logo, dado u, v tais que satisfaçam as condições de contorno resulta:

$$\begin{aligned} (v, EIu^4) &= \int_0^L EI \frac{d^4u}{dx^4} v dx = EI \frac{d^3u}{dx^3} v \Big|_0^L - \int_0^L EI \frac{d^3u}{dx^3} \frac{dv}{dx} dx \\ &= -EI \frac{d^2u}{dx^2} \frac{dv}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int_0^L EI \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} dx \end{aligned}$$

A expressão anterior é simétrica em u e v , isto é, com as condições de contorno estabelecidas o operador da viga resulta simétrico.

Também, da expressão surge que é positivo definido. De fato:

$$(u, EIu^4) = \int_0^L EI \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx \geq 0$$

Se $(u, EIu^4) = 0 \rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \rightarrow u' = \text{cte}$. Da condição de contorno em u , $u = 0$ em $x = 0$ e $x = L$ resulta $u \equiv 0$.

Do anterior o operador é positivo-definido. Pode-se demonstrar-se que o operador também é limitado inferiormente.

Do que foi apresentado, segue-se que o p.v.c. é equivalente a minimizar a função:

$$F(u) = \int_0^L u EI \frac{d^4u}{dx^4} dx - 2 \int_0^L qu dx = \int_0^L EI \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx - 2 \int_0^L qu dx$$

O quarto passo consiste em determinar as funções coordenadas de maneira a satisfazer somente as condições de contorno principais. Estas funções podem ser:

$$\phi_1 = \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \phi_3 = \sin \frac{3\pi x}{L}, \quad \dots \phi_n = \sin \frac{\pi n x}{L}$$

de onde supõe-se n ímpar. Tome $u_n = \sum_{i=1}^n a_i \phi_n$ e calcule a_i . Tem-se, neste caso:

$$F(a_i) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \left[EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \right] - 2 \sum_{i=1}^n a_i \int_0^L q \phi_i dx$$

Logo, da condição do mínimo tem-se,

$$\frac{\partial F(a_j)}{\partial a_i} = 0 = \sum_{j=1,3,\dots}^n EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_j - q \int_0^L \phi_i dx = 0$$

para $i = 1, 3, \dots, n$. A expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1,3,\dots}^n EI \frac{i^2 j^2 \pi^2}{L^4} \int_0^L \sin \frac{j\pi x}{L} dx a_j - q \int_0^L \sin \frac{i\pi x}{L} dx = 0 \text{ para } i = 1, 3, \dots$$

Recordando que:

$$\int_0^L \sin \left(\frac{i\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \frac{L}{2} & \text{se } i = j \end{cases}$$

a matriz do sistema resulta em uma matriz diagonal e cada equação i -ésima ($i = 1, 3, 5$ etc) está dado por:

$$\text{equação } i: \frac{EI i^4 \pi^4}{2L^3} a_i - q^2 \frac{2L}{i\pi} = 0$$

de onde:

$$a_i = \frac{qL^4}{EI} \frac{4}{i^5 \pi^5}, i = 1, 3, \dots$$

A solução de Ritz está dada por:

$$u = \frac{qL^4}{EI} \frac{4}{\pi^5} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^5} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^5} \sin \frac{5\pi x}{L}, \dots \right)$$

Para o centro da viga $\left(x = \frac{L}{2}\right)$, tem-se:

$$u|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{4}{\pi^5} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots \right)$$

que é uma série convergente e cuja soma para $n \rightarrow \infty$ resulta:

$$\begin{aligned} &= \frac{qL}{EI} \frac{5}{384} = \text{sol. exacta} \\ &= 0.013021 \frac{qL^4}{EI} \end{aligned}$$

Em particular, tomando um só termo:

$$u^{(1)} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{qL^4}{EI} \frac{4}{\pi^5} = \frac{qL^4}{EI} \frac{5}{382,5246} = 0,013071 \frac{qL^4}{EI}$$

para dois e três termos:

$$u^{(2)} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{qL^4}{EI} \frac{5}{384,1053} = 0,013017 \frac{qL^4}{EI}$$

$$u^{(3)} \Big|_{x=\frac{L}{3}} = \frac{qL^4}{EI} \frac{5}{383,9819} = 0,013021 \frac{qL^4}{EI}$$

Observação: Deve-se notar que nas funções coordenadas não considerou-se os termos $\sin \frac{i\pi x}{L}$, $i = 2, 4, \dots$. Porquê? A resposta é óbvia. Se tivéssemos aplicado o Método de Ritz, o termo independente associado à equação $i = 2, 4, \dots$ seria:

$$q \int_0^L \phi_i dx = q \int_0^L \sin \frac{i\pi x}{L} dx = -q \frac{L}{i\pi} \cos \frac{i\pi x}{L} \Big|_0 = 0, i = 2, 4, \dots$$

Logo o coeficiente de Ritz associado seria $a_i = 0, i = 2, 4, \dots$

Exemplo 2.10 Considere o problema da viga da Figura 2.14.

Figura 2.14: Exemplo 10.

O problema de valor de contorno consiste em:

$$\begin{aligned} EI W^4 &= q && \text{em } x \in (0, L) \\ u(0) &= u'(0) = 0 && (\text{condições de contorno principal}) \\ u''(L) &= u'''(L) = 0 && (\text{condições de contorno natural}) \end{aligned}$$

Para aplicar Ritz, tem-se que conhecer o funcional energia. Por isso, estuda-se a simetria e positividade. Logo, dados $u, v \in D_A$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^L EI \frac{d^4 u}{dx^4} v dx = EI \frac{d^3 u}{dx^3} v \Big|_0^L - \int_0^L EI \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{dv}{dx} dx \\ &= -EI \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_0^L EI \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \end{aligned}$$

observando-se, assim, a simetria em D_A . Introduzindo o produto interno:

$$\langle u, v \rangle_A = \int_0^L EI \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

vê-se que:

$$\langle u, u \rangle_A \geq 0 \text{ e } = 0 \text{ se e somente se } \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \rightarrow u' = \text{cte}$$

pela condição de contorno $u'(0)$ se segue que $u' = 0$ em $(0, L) \rightarrow u = \text{cte}$ e novamente, da condição $u(0) = 0 \rightarrow u = 0$, ou seja,:

$$\langle u, u \rangle_A = (u, Au) \geq 0$$

é igual a zero se e somente se $u \equiv 0$. Observe que dada a forma simétrica $\langle u, v \rangle_A$ sua positividade foi dependente somente das condições de contorno $u(0)$ e $u'(0)$ e daí o nome de principais.

Logo, a função energia será:

$$F(u) = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx - 2 \int_0^L q u dx$$

definido no campo de funções contínuas com derivadas primeiras contínuas quadrado integráveis e com derivadas segunda ao menos quadrado integráveis e que satisfazem as condições de contorno $u(0) = u'(0) = 0$. Este espaço foi chamado de H_A .

O método de Ritz consistirá em definir um conjunto de funções coordenadas completo em H_A , que devem ser ao menos de classe C^1 e satisfazer as condições de contorno principais.

Funções coordenadas definidas em todo $(0, L)$: um exemplo destas funções foi dada no Exemplo 1. Considera-se agora as funções polinomiais. Tem-se, assim:

$$u = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

devendo satisfazer:

$$\begin{aligned} u(0) = 0 & \rightarrow a_0 = 0, \quad \text{logo } u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \\ u'(0) = 0 & \rightarrow a_1 = 0 \quad \text{logo } u = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i \end{aligned}$$

Logo, as funções coordenadas são:

$$\phi_1 = x^2, \quad \phi_2 = x^3, \quad \dots, \text{etc}$$

Tomando $H_A^1 = \text{Span} \{x^2\}$ e aplicando o Método de Ritz. Logo:

$$\begin{aligned} F(a_1) &= \int_0^L EI \left[(a_1 x^2)'' \right]^2 dx - 2q \int_0^L a_1 x^2 dx \\ &= EI \int_0^L 4a_1^2 dx - 2qa_1 \frac{L^3}{3} = 4EILa_1^2 - 2qa_1 \frac{L^3}{3} \end{aligned}$$

A condição de mínimo conduz a:

$$\frac{dF}{da_1} = 8EILa_1 - \frac{2}{3}qL^3 = 0$$

logo:

$$a_1 = \frac{1}{12} \frac{qL^2}{EI}$$

A primeira solução aproximada será:

$$a^{(1)} = a_1 x^2 = \frac{1}{12} \frac{qL^2}{EI} x^2$$

de onde,

$$u^{(1)}(L) = \frac{1}{12} \frac{qL^2}{EI}$$

Tomando as funções coordenadas ϕ_1 e ϕ_2 , trabalha-se, agora, na forma matricial:

$$\begin{aligned} K_{11} &= EI \int_0^L (\phi_1^a)^2 dx = 4EIL \\ K_{22} &= EI \int_0^L (\phi_2^a)^2 dx = 12EIL^3 \\ K_{12} &= EI \int_0^L \phi_1^a \phi_2^a dx = 6EIL^2 \\ f_1 &= q \int_0^L \phi_1 dx = \frac{1}{3} qL^3 \\ f_2 &= q \int_0^L \phi_2 dx = \frac{1}{4} qL^4 \end{aligned}$$

O sistema resulta assim,

$$EIL \begin{bmatrix} 4 & 6L \\ \text{sim.} & 12L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} qL^3$$

A solução do sistema conduz a:

$$a_1 = \frac{5}{24} \frac{qL^2}{EI} \quad a_2 = -\frac{1}{12} \frac{qL}{EI} x^3$$

e a solução aproximada será:

$$u^{(2)}(L) = \frac{5}{24} \frac{qL^2}{EI} x^2 - \frac{1}{12} \frac{qL}{EI} x^3$$

e o deslocamento em $x = L$ resulta:

$$u^{(2)}(L) = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI}$$

A solução exata é:

$$u = \frac{q}{2EI} \left(\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

que, para $x = L$ corresponde a:

$$u(L) = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI}$$

Observa-se que somente apenas dois termos já permite obter uma boa aproximação da solução. Entretanto, quando deriva-se a solução aproximada na procura dos momentos, por exemplo, a ordem de aproximação cai. De fato:

$$M^{(2)} \Big|_{x=0} = \frac{10}{24} qL^2 = 0.4167 qL^2$$

sendo que a solução exata corresponde a:

$$M|_{x=0} = 0.5qL^2$$

Mais adiante, quando se mostra o Método de Elementos Finitos, estabelece-se uma ordem de erro de aproximação. Deve-se observar, aqui, que toda derivação induzirá à uma perda de aproximação. Daí a necessidade de trabalhar com formulações duais, que dizer, formulações que permitem trabalhar com esforços, em lugar de deslocamentos, como incógnitas do problema.

Estuda-se o mesmo problema, porém com funções de suporte compacto.

Funções de Suporte Compacto: o funcional está definido no espaço de Hilbert de onde as funções são contínuas conjuntamente com sua derivada primeira sendo as derivadas segundas quadrado integráveis. Logo, as funções coordenadas deverão ser de suporte compacto e tais que assegurem a continuidade da função e de sua derivada primeira.

Para defini-las, procede-se, primeiramente, em dividir o intervalo $(0, L)$. A partição coloca em evidência uma série de pontos. A cada ponto i corresponderá as funções $\phi_0^i(x)$ e ϕ_1^i definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\phi_0^i &= \begin{cases} 0 & \text{em } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 0 & \text{em } x = x_{i-1}, x = x_{i+1} \\ 1 & \text{em } x = x_i \end{cases} \\ \frac{\phi_0^i}{dx} &= \begin{cases} 0 & \text{em } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 0 & \text{em } x = x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \end{cases} \\ \phi_1^i &= \begin{cases} 0 & \text{em } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 0 & \text{em } x = x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \end{cases} \\ \frac{\phi_1^i}{dx} &= \begin{cases} 0 & \text{em } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 0 & \text{em } x = x_{i-1}, x_{i+1} \\ 1 & \text{em } x = x_i \end{cases}\end{aligned}$$

A Figura 2.15 representa estas funções que não são outra coisa que os polinômios cúbicos de Hermit. Recorde o leitor que os polinômios de Hermit permitem interpolar funções garantindo a continuidade da função e de sua primeira derivada.

Figura 2.15: Funções de interpolação de suporte compacto.

As funções de interpolação associadas a cada nó i podem ser vistas como a união de funções de interpolação definidas em cada subregião colocada em evidência quando da partição. Em outras palavras, a forma da função de aproximação será:

$$u^a = \sum_{i=1}^N (a_i \phi_1^i + b_i \phi_1^i)$$

ou melhor:

$$u^a = \bigcup_{e=1}^N u^{(e)} = \bigcup_{e=1}^N \{a_i \phi_1^{i(e)} + b_i \phi_1^{i(e)} + a_j \phi_0^{j(e)} + b_j \phi_1^{j(e)}\}$$

ambas as equações são equivalentes e são o ponto de partida do elemento finito.

Condições de Contorno Homogêneas

Até aqui foi apresentado como definir o funcional a minimizar quando as condições de contorno eram do tipo homogêneas. Define-se, agora, o funcional associado quando as condições de contorno são não-homogêneas.

Para isso, considere a equação:

$$Au = f \text{ em } \Omega \quad (2.10)$$

onde A é, por exemplo, um operador linear diferencial que contém derivadas até a ordem k . Como campo de definição deste operador, toma-se o conjunto D_A de todas as funções com derivadas contínuas de ordem $1, 2, \dots, k-1$ com derivada contínua por parte de ordem k no domínio fechado $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. As funções de D_A não satisfazem nenhuma condição de contorno.

Suponha agora que a equação (2.10) deve ser integrada sob as condições de contorno:

$$G_1 u|_S = g_1, \quad G_2 u|_S = g_2, \quad G_r u|_S = g_r, \quad (2.11)$$

onde $G_1, G_2, \dots, G_r$ são operadores lineares, $g_1, g_2, \dots, g_r$ são funções conhecidas definidas em S . Observa-se que o número de condições de contorno é determinado pela ordem da equação (2.10) e também depende se o campo u é escalar vetorial, etc.

A determinação da função energia equivalente ao problema anterior, (2.10)-(2.11), será realizada dentro da seguinte hipótese.

Hipótese: Existe uma função ψ que conjuntamente com suas derivadas até a ordem $k-1$ inclusive é contínua em $\bar{\Omega}$ e cujas derivadas de ordem k são contínuas por parte em $\bar{\Omega}$ e que satisfazem as condições de contorno do problema:

$$G_1 \psi|_S = g_1, \quad G_2 \psi|_S = g_2, \quad G_r \psi|_S = g_r, \quad (2.12)$$

Admitindo a hipótese anterior, tem-se $\psi \in D_A$ e para toda $u \in D_A$ pode-se definir uma outra função v dada pela transformação:

$$u - \psi = v$$

Observa-se facilmente que:

$$u = \psi + v, v \in D_A$$

Em particular, se u é a solução do problema de valor de contorno (2.10)-(2.11), seu correspondente v satisfaz:

$$Av = f^* \text{ em } \Omega, \quad f^* = f - A\psi \quad (2.13)$$

com as condições de contorno **homogêneas**:

$$G_1 v|_S = 0, \quad G_2 v|_S = 0, \quad G_r v|_S = 0, \quad (2.14)$$

Agora, se nosso operador A é positivo-definido para o conjunto de funções que satisfazem as condições de contorno (2.14), tem-se, de acordo com o que já foi visto (teorema do mínimo da função energia), que o problema (2.13)-(2.14) é equivalente a determinar a função v que dentro do conjunto de funções satisfazem (2.14), minimizam o funcional:

$$F(v) = (v, Av) - 2(f^*, v), v \in D_A \cap \quad (2.15)$$

Para-se, aqui, um momento a fim de direcionar ao leitor para onde deseja-se caminhar. O problema (2.10)-(2.11) corresponde às condições de contorno não-homogêneas. Logo, não é possível estabelecer o funcional energia associado. Observe que tem sido deduzido esta função somente para o caso de condições homogêneas. Admitindo, justamente, a existência da função ψ foi introduzido uma troca de variáveis, $u - \psi = v$, a qual introduzida em (2.10)-(2.11) permite reescrever este problema em outro (2.13)-(2.14) associado às condições de contorno homogêneas. Logo, pode-se definir a função energia, expressão (2.15). Para definir (2.15) em termos de u será suficiente substituir em (2.15) $v = u - \psi$. Logo:

$$\begin{aligned} F(v) &= F(u - \psi) = (Au - A\psi, u - \psi) - 2(u - \psi, f - A\psi) = \\ &= (Au, u) - 2(u, f) + (u, A\psi) - (\psi, Au) + 2(\psi, f) - (\psi, A) \end{aligned}$$

Agora, o termo $(u, A\psi) - (\psi, Au)$ através de integrações por parte pode escrever-se com uma integral de superfície, quer dizer:

$$(u, A\psi) - (\psi, Au) = \int_S R(u, \psi) dS$$

A expressão $R(u, \psi)$ depende da forma do operador A . Fazendo uso das condições de contorno (2.11)-(2.12), comumente é possível reescrever $R(u, \psi)$ na forma:

$$R(u, \psi) = N(u, g_1, \dots, g_r) + M(\psi)$$

onde N depende somente de u e das funções (conhecidas) $g_1, g_2, \dots, g_r$. M não depende de u e só depende de ψ . Logo, a função $F(v)$ pode reescrever-se como:

$$F(v) = (Au, u) - 2(f, u) + \int_S N(u, g_i) dS + \left[2(\psi, f) - (\psi, A) + \int_S M(\psi) dS \right]$$

A expressão entre colchetes é uma constante já que não depende de u . Logo, o mínimo de $F(v)$ é equivalente a minimizar o funcional:

$$\phi(u) = (Au, u) - 2(f, u) + \int_S N(u, g_i) dS \quad (2.16)$$

dentro do conjunto de funções $D_A \cap (2.11)$. Este é o funcional que foi proposto determinar quando começou-se esta secção.

Observação: Deve-se notar que o funcional (2.16) pode construir-se sem a necessidade de conhecer a função ψ . No entanto, para que o mínimo de (2.16) tenha sentido é necessário que a função ψ exista.

Por último, observa-se que para a minimização da função (2.16), algumas das condições de contorno (2.11) podem ser naturais. Tendo isto presente, o mínimo de (2.16), pode-se procurar num espaço mais amplo de onde a forma simétrica (u, Au) é substituída por $\langle u, u \rangle_A$ e de onde só é preciso satisfazer as condições de contorno principais.

Na continuação, alguns exemplos serão apresentados.

Exemplo 2.11 Considere o problema de integrar a equação de Laplace:

$$-\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.17)$$

com a condição de contorno não-homogênea:

$$u|_S = g \quad (2.18)$$

Para determinar o funcional associado a (2.17)-(2.18), procede-se como indicado nesta secção. Admite-se a **existência** da função ψ contínua com derivadas primeiras contínuas em $\bar{\Omega}$ e com derivadas segunda contínuas por parte em Ω e tal que:

$$\psi|_S = g \quad (2.19)$$

Da troca de variável:

$$u = v + \psi$$

resulta:

$$-\nabla^2 v = \nabla^2 \psi, \quad \text{em } \Omega \quad (2.20)$$

com a condição homogênea de contorno:

$$v|_S = 0 \quad (2.21)$$

Mostra-se agora que o operador $-\nabla^2$ é positivo-definido no conjunto de funções suficientemente regulares satisfazendo (2.21). De fato:

$$(\nabla, -\nabla^2 v) = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d\Omega$$

Integrando por parte e usando a condição (2.22), tem-se:

$$(\nabla, -\nabla^2 v) = - \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 \right\} d\Omega \geq 0, e = 0 \text{ se e somente se } v \equiv 0$$

Desta maneira, a função associada a (2.20)-(2.21) resulta:

$$F(v) = (v, -\nabla^2 v) - 2(v, \nabla^2 \psi) \quad (2.22)$$

Substituindo $v = u - \psi$ em (2.22) obtém-se:

$$F(u) = (u, -\nabla^2 u) + (\psi, \nabla^2 u) - (u, \nabla^2 u) + (\psi, \nabla^2 \psi) \quad (2.23)$$

O segundo e o terceiro termos do segundo membro resultam (integrando por parte e usando (2.18) e 2.19):

$$(\psi, \nabla^2 u) - (u, \nabla^2 \psi) = \int_S \left\{ \psi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} dS = \int_S g \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_S g \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

O integrando do segundo membro corresponde a $R(u, \phi)$. Em particular:

$$N(u, g_i) = g \frac{\partial u}{\partial n}, \quad M(\psi) = g \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

Substituindo em (2.23) tem-se:

$$F(u) = (u, -\nabla^2 u) + \int_S g \frac{\partial u}{\partial n} dS + \left\{ (\psi, \nabla^2 \psi) - \int_S g \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \right\}$$

Como já foi dito, o termo entre as chaves é somente função de ψ . Logo, o problema do mínimo de $F(u)$ é equivalente ao problema do mínimo de $\phi(u)$:

$$\phi(u) = (u, -\nabla^2 u) + \int_S g \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (2.24)$$

Integrando por parte o primeiro termo do segundo membro e utilizando a equação (2.18) obtém-se:

$$\phi(u) = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\Omega \quad (2.25)$$

Deve-se notar que ao passar da equação (2.24) para (2.25), ampliou-se o domínio da função $\phi(u)$. Em (2.25), as funções que satisfazem (2.18) são contínuas com derivadas primeira quadrado integráveis.

Exercício 2.9 Determine o funcional cujo mínimo seja equivalente a integrar o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u & \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S &= h \quad \text{em } S \end{aligned}$$

conhecido como problema de Neumann. Qual é o conjunto de onde o mínimo desta função está definido? A condição de contorno não-homogênea é uma condição natural ou principal?

Até aqui tem-se resultado o problema de determinar o funcional a minimizar equivalente ao problema de valor de contorno não-homogêneo. Para determinar uma solução aproximada do mínimo deste funcional, pode-se recorrer ao Método de Ritz. Sem dúvidas, o problema de determinar as funções coordenadas se complica em virtude de que o conjunto de onde o funcional está definido não é um espaço vetorial. Na realidade, o que o Método de Ritz propõe é trabalhar com funções coordenadas densas no espaço das funções v da transformação $u = v + \psi$. Em outras palavras, o método consiste em:

- Considere $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ denso no espaço energia associado às funções v da transformação $u = v + \psi$. Quer dizer que ϕ_i satisfazem as condições de contorno **homogêneas**.
- Para cada n finito $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ são linearmente independentes.

- Para cada n finito, tome como aproximante de u a combinação:

$$u_n = \sum a_i \phi_i + \psi$$

- O mínimo de $F(u_n)$ é equivalente ao mínimo da função $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ logo, os coeficientes a_i^* , que satisfazem ao sistema de equações:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

são, segundo já visto, os coeficientes de Ritz que determinam a solução aproximada:

$$u_n^* = \sum_{i=1}^n a_i^* \phi_i + \psi$$

que é a melhor aproximação da solução u , no sentido da norma energia, de todas as combinações u_n .

Aparentemente, o problema segue sendo equivalente ao caso de condições homogêneas. Sem dúvidas, agora, o problema está em determinar ψ ou, em outras palavras, fazer que u_n satisfaça as condições de contorno.

Este problema é difícil de resolver e, à medida que a dimensão do espaço onde Ω está imerso aumenta, o problema se faz cada vez mais difícil. Outro aspecto que complica enormemente satisfazer se condições de contorno é a forma do contorno.

Para solucionar esta dificuldade distintas técnicas têm sido desenvolvidas. Uma das mais conhecidas é a de trabalhar com funcionais estendidos. Basicamente o que se procura com estes funcionais é que as condições de contorno principais não homogêneas do primitivo funcional passem a ser condições naturais do novo funcional (ver R.Feijóo, *Aplicação do Método de Ritz a Funcionais Relajados em Mecânica dos Sólidos*, M.Sc. Tese, COPPE, 1973).

Por último, deve-se ressaltar que as condições de contorno são facilmente satisfeitas quando se trabalha com funções localmente suportadas.

Exercício 2.10 Considere o problema de distribuição de temperatura na placa da Figura 2.16.

Figura 2.16: Exercício.

O problema de valor de contorno associado é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \text{ em } \Omega$$

$$T = \begin{cases} 0 & \text{em } y = 0, x = 0 \text{ e } y = b \\ 100^\circ & \text{em } x = a \end{cases}$$

Determine a função $F(T)$ cujo mínimo corresponde a um campo T solução do problema anterior. k_x e k_y são os coeficientes de condutividade térmica segundo x e y .

Figura 2.17: Exercício.

Exercício 2.11 Considere o problema de condução de calor no tubo circular infinito da Figura 2.17. Denotam-se as temperaturas interna e externa como T_1 e T_2 , respectivamente.

Em coordenadas cilíndricas, o problema está governado pelo seguinte problema de valor de contorno:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0, \text{ em } r \in (R_i, R_e)$$

$$T|_{r=R_i} = T_1, \quad T|_{r=R_e} = T_2$$

onde R_i é o raio interno e R_e o raio externo. Determine:

1. o funcional associado. Comente o espaço no qual está definido.
2. determine uma solução aproximada via Ritz, supondo $T_1 = 0^\circ\text{C}$, $T_2 = 100^\circ\text{C}$, $R_i = 9$, $R_e = 12$. Tome como função de aproximação:

$$u^a = \frac{r - R_i}{R_e - R_i} T_2 + a_1 \phi_1 = \psi + a_1 \phi_1$$

onde $\phi_1 = (r - R_i)(r - R_e)$.

3. compare com a solução exata:

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln \frac{r}{R_i}$$

4. defina quais são as funções $\phi_2, \phi_3, \dots$

Exercício 2.12 Considere o mesmo problema anterior, porém adote as funções coordenadas localmente suportadas indicadas na Figura 2.18.

Figura 2.18: Exercício.

A função de aproximação está dada por:

$$u_n = a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + 100 \phi_3$$

Compare com a solução aproximada.

Exercício 2.13 Considere a equação de Poisson no retângulo da Figura 2.19.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$$

com as condições de contorno

$$u = 0 \text{ em } S$$

Determine:

Figura 2.19: Exercício.

1. *O funcional associado a este problema.*
2. *Calcule a solução de Ritz para a aproximação:*

$$u_{(1)} = a_1 (a^2 - x^2) (b^2 - y^2)$$

3. *Calcule a solução de Ritz para:*

$$u_{(2)} = (a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2) (a^2 - x^2) (b^2 - y^2)$$

4. *Compare e comente os resultados.*

2.4 Método de Mínimos Quadrados

Como pode-se notar, para aplicar o Método de Ritz a um determinado problema de valor de contorno foi necessário admitir que o operador diferencial A era simétrico positivo-definido. Se o operador não satisfaz estas restrições, não se pode aplicar o método. Existe, entretanto, outra formulação variacional, conhecida com o nome de *Mínimos Quadrados* que permite atender este tipo de problema.

Para isso, define-se em D_A o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{A,A} = \int_{\Omega} AuAud\Omega$$

gerando a norma:

$$\left(\langle u, v \rangle_{A,A} \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{A,A}$$

Definida a norma anterior, pode-se colocar o problema de determinar a melhor aproximação para a solução u_0 do p.v.c., com respeito à norma $\|\cdot\|_{A,A}$. Em outras palavras, u_0 minimiza a função:

$$F(u) = \|u - u_0\|_{A,A}$$

O problema anterior pode ser reescrito como:

$$F(u) = \langle u - u_0, u - u_0 \rangle_{A,A} = \langle Au - f, Au - f \rangle = \langle r, r \rangle = \int_{\Omega} r^2 d\Omega$$

onde r é o resíduo. O funcional anterior pode ser reescrito como

$$F(u) = \langle u, u \rangle_{A,A} - 2 \langle u, u_0 \rangle_{A,A} + \langle u_0, u_0 \rangle_{A,A}$$

Novamente, para obter uma solução aproximada, considera-se as funções coordenadas de maneira tal que:

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$$

onde ϕ_i deve ser suficientemente regular como para garantir que Au_n tenha sentido. Por outro lado, u_n deve satisfazer as condições de contorno. Substituindo esta aproximação no problema do mínimo tem-se:

$$F(a_i) = \sum_{j,k=1}^n \langle \phi_j, \phi_k \rangle_{A,A} a_j a_k - 2 \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, f \rangle_A a_j$$

A condição do mínimo leva a:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{A,A} a_j = (A\phi_i, f), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

A expressão anterior pode ser reescrita como,

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = \left(A \sum_{j=1}^n a_j \phi_j - A\phi_i \right) - (A\phi_i, f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de onde :

$$(Au_n - f, A\phi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dizendo que o resíduo é ortogonal ao conjunto de funções coordenadas $A\phi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Tem-se, assim, que o Método de Mínimos Quadrados é equivalente ao Método de Galerkin. Por outro lado, a matriz do sistema resulta simétrica positiva-definida. Agora bem, ganha-se no que se refere á positividade e simetria, mas perde-se em outro aspecto importante. O leitor poderá notar que as funções ϕ_i devem ser mais regulares de maneira que o produto:

$$\int_{\Omega} A\phi_i A\phi_j d\Omega$$

tenha sentido.

Exemplo 2.12 Considere o problema da viga em balanço já estudado anteriormente. A Figura 2.20 nos indica as características geométricas e de carga.

Figura 2.20: Exemplo.

O problema de valor de contorno consiste em:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{q}{EI}, \quad \text{em } x \in (0, L)$$

com as condições de contorno:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(L) = u'''(L) = 0$$

Para aplicar o Método dos Quadrados Mínimos, definem-se as funções coordenadas ϕ_i . Estas funções devem satisfazer **todas** as condições de contorno e, por outro lado, devem ser de tal grau de continuidade que assegure que:

$$\int_{\Omega} A\phi_i, A\phi_j d\Omega$$

tenha sentido, quer dizer, seja limitado. Neste exemplo, limita-se ao caso de polinômios definidos em todo $(0, L)$. Tome, por exemplo, a seguinte aproximação:

$$u_a = a_1 \phi_1 = a_1 \left(6 \frac{x^2}{L^2} - 4 \frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right)$$

A função ϕ_1 é tal que:

$$\phi_1(0) = \phi_1'(0) = 0; \phi_1''(L) = \phi_1'''(L) = 0$$

satisfazendo as condições de contorno e, portanto, é uma função admissível para o problema. Tem-se, assim:

$$F(a_1) = \int_0^L (A\phi_1)^2 dx a_1^2 - 2 \int_0^L (A\phi_1) \frac{q}{EI} dx a_1 = \left(\frac{24}{L^4} \right)^2 L a_1^2 - 2 \left(\frac{24}{L^4} \right) L \frac{q}{EI} a_1$$

onde:

$$\frac{dF}{da_1} = \left(\frac{24}{L^4} \right)^2 2L a_1 - 2 \left(\frac{24}{L^4} \right)^2 \frac{q}{EI} = 0$$

portanto:

$$a_1 = \frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI}$$

O Método dos Mínimos Quadrados conduz à solução aproximada:

$$u_a = \frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \left(6 \frac{x^2}{L^2} - 4 \frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4} \right) = \frac{1}{2} \frac{q}{EI} \left(\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{L x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

que não é outra coisa que a **própria solução exata**.

2.5 Conclusões

Ao longo deste capítulo, apresentou-se uma série de métodos que permitem determinar uma solução aproximada de um dado problema de valor de contorno.

Foi possível apreciar que o Método de Ritz recai no Método de Galerkin. Este último método é mais geral que o de Ritz já que não requer a existência do funcional a minimizar. Por sua vez, não é difícil estender o método de problemas não lineares.

Também foi visto que o Método dos Mínimos Quadrados é um caso particular do Método dos Resíduos Ponderados, fazendo que o resíduo seja ortogonal às funções bases $A\phi_i$, $i = 1, 2, \dots$, etc.

Agora bem, em todos estes métodos a característica geral é a definição das funções coordenadas que, em geral, foram denotadas por $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Para cada método, estas funções deverão satisfazer adequadas condições de regularidade e, por sua vez, deverão satisfazer parte ou todas as condições de contorno.

A construção destas funções é uma das tarefas mais difíceis destes métodos e a escolha das mesmas está concentrada grande parte do sucesso do método.

Em todos os casos (Colocação, Galerkin, Ritz, Mínimos Quadrados) uma vez introduzidas estas funções coordenadas, chegou-se a um sistema de equações algébricas cuja solução determina o valor dos coeficientes da combinação de funções ϕ_i que melhor se aproxima da solução exata.

Como se sabe, o comportamento numérico da solução do sistema depende do chamado *número* P da matriz do sistema. Em geral, quando as funções bases estão definidas em toda a região, a matriz do sistema é cheia e o condicionamento numérico tende a deteriorar-se á medida que o número de equações aumenta.

Esta tendência pode diminuir e muitas vezes eliminar-se por completo quando trabalha-se com funções coordenadas localmente suportadas. Como será visto no capítulo IV, o Método de Elemento Finitos se constitui em um método sistemático, e simples, para a construção dessas funções coordenadas. Em outras palavras, o Método de Elemento Finitos fornecerá unicamente as funções bases ou coordenadas e posteriormente, para a obtenção da solução aproximada, aplica-se alguns dos métodos estudados.

Parte II:

Parte II

Formulação Variacional e sua Aplicação em Mecânica

