Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras – CURO

2ª chamada da
2ª Prova de GA
13/07/2022 – 2022-1
Turma K1

Gabarito

---

1. [2 pts] Responda a cada um dos itens abaixo.
   (a) Qual é o nome do objeto geométrico representado pela equação $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5$ no espaço? Quais informações você têm sobre este objeto?
   (b) Escreva a equação cartesiana do plano que passa pela origem e tem como vetores paralelos $\vec{u} = (1,\ 0,\ -2)$ e $\vec{v} = (0,\ 1,\ 3)$.
   (c) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, o que podemos concluir?
   (d) Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores não nulos. O que representa geometricamente $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$?

Solução:
(a) O objeto representado pela equação é uma esfera de centro $(0, 2, -1)$ e raio $\sqrt{5}$.
(b) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (2,\ -3,\ 1)$ é um vetor normal ao plano, portanto a equação do plano é: $2x - 3y + z = 0$
(c) Os vetores são paralelos.
(d) Representa o volume do paralelepípedo cujas arestas adjacentes são representantes dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

2. [4 pts] Determine os pontos sobre a reta $r : X = (0,\ -1,\ 1) + t\,(-1,\ 2,\ 1)$ que formam com $A = (1,\ 1,\ 3)$, $B = (-2,\ 1,\ 0)$ e $C = (-1,\ 0,\ 1)$ um tetraedro de volume 3.

Solução: Um ponto da reta r é da forma $X = (-t,\ 2t-1,\ t+1)$. Sabemos que o volume do tetraedro $ABCX$ é dado por:
$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AX}\right]\right|$$
Note que $\overrightarrow{AB} = (-3,\ 0,\ -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,\ -1,\ -2)$ e $\overrightarrow{AX} = (-t-1,\ 2t-2,\ t-2)$. Com isso,
$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -t-1 & 2t-2 & t-2 \end{bmatrix}\right| = \frac{|6t-3|}{6} = 3 \Rightarrow 6t - 3 = \pm 18 \Rightarrow t = -\frac{5}{2} \text{ ou } t = \frac{7}{2}.$$
Substituindo os valores de t em X obtemos os pontos buscados:
$$D_1 = \left(\frac{5}{2},\ -6,\ -\frac{3}{2}\right) \text{ e } D_2 = \left(-\frac{7}{2},\ 6,\ \frac{9}{2}\right)$$

3. [4 pts] Um triângulo equilátero ABC tem lado BC sobre a reta $r : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ -x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$. Sendo $A = (1,\ 1,\ 1)$ um dos seus vértices, determine os outros dois.

Solução:
Primeiramente, vamos calcular a altura do triângulo, que é dada pela distância do ponto A até a reta r, isto é,
$$h = d(A, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|},$$
onde P é um ponto qualquer da reta e $\vec{r}$ é um vetor diretor de r. Sabemos que $\vec{n}_1 = (1,\ -1,\ 1) \perp r$ e $\vec{n}_2 = (-1,\ 1,\ 2) \perp r$, daí, $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-3,\ -3,\ 0)$. Além disso, fazendo $y = 0$, obtemos que $P = (-2,\ 0,\ 1) \in r$,

donde $\overrightarrow{AP} = (-3,\ -1,\ 0)$ e $\overrightarrow{AP} \times \vec{r} = (0,\ 0,\ 6)$. Assim,

$$h = d(A, r) = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Por outro lado, como o triângulo é equilátero, sabemos que $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, daí,

$$\frac{\sqrt{3}l}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Para encontrarmos os pontos B e C basta determinarmos os pontos da reta r que estão à distância l da de A, isto é, $d(X, A) = l$, onde X é um ponto arbitrário de r.

Já obtivemos $\vec{r} = (-3,\ -3,\ 0)$ e $P = (-2,\ 0,\ 1)$, daí, um ponto arbitrário da reta tem que ser da forma

$$X = P + t\vec{r} = (-3t - 2,\ -3t,\ 1)\,.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} d(X, A) = l \Rightarrow \sqrt{(3t+1)^2 + (3t+3)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow (3t+1)^2 + (3t+3)^2 = \frac{8}{3} \\ \Rightarrow 18t^2 + 24t + \frac{22}{3} = 0 \\ \Rightarrow t = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ ou } t = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de t em X obtemos:

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3} + 2,\ 1\right) \text{ e } C = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 2 - \frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right).$$