Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras – CURO

2ª chamada da
2ª Prova de GA
14/07/2022 – 2022-1
Turma R1

Gabarito

---

1. [2 pts] Responda a cada um dos itens abaixo.
   (a) Qual é o nome do objeto geométrico representado pela equação $X = (1, 0, 1) + t(2, -1, 3), t \in \mathbb{R}$ no espaço? Quais informações você têm sobre este objeto?
   (b) Escreva a equação cartesiana do plano que passa pela origem e tem como vetores paralelos $\vec{u} = (0,\ 1,\ -3)$ e $\vec{v} = (1,\ -2,\ 0)$.
   (c) Determine o versor de $\vec{u} = (0,\ 1,\ -3)$.
   (d) Sejam $\vec{u} = (0,\ 1,\ -3)$ e $\vec{v} = (1,\ -2,\ 0)$ e $\vec{w} = (2,\ -3,\ -3)$. Estes vetores são coplanares? Justifique.

Solução:

(a) O objeto representado pela equação é uma reta que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e tem vetor diretor $\vec{r} = (2, -1, 3)$.

(b) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-6,\ -3,\ -1)$ é um vetor normal ao plano, portanto a equação do plano é: $-6x - 3y - z = 0$

(c) $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,\ 1,\ -3) = \left(0,\ \frac{\sqrt{10}}{10},\ -\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$.

(d) Como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} = 0$, temos que os vetores são coplanares.

2. [4 pts] Determine os planos que contém a $r : X = (0,\ -1,\ 0) + t\,(-1,\ 1,\ 0)$ e estão a uma distância 1 do ponto $A = (1,\ 1,\ 0)$.

Solução: Seja $\pi : ax + by + cz + d = 0$ a equação do plano buscado. Sabemos que $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ é um vetor normal ao plano.

Temos que $P = (0,\ -1,\ 0) \in \pi$. Substituindo na equação do plano obtemos

$$-b + d = 0. \tag{1}$$

Como $\vec{r} = (-1,\ 1,\ 0) \perp \vec{n}$, temos que $\vec{n} \cdot r = 0$, daí,

$$-a + b = 0. \tag{2}$$

Como existem infinitos vetores normais, podemos escolher aquele que tenha norma 1, isto é, $\|\vec{n}\| = 1$ daí, temos que

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1. \tag{3}$$

Por fim, como $d(A, \pi) = 1$, usando a fórmula de distância de ponto a plano e a equação (3), obtemos

$$\frac{|a + b + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 \Rightarrow |a + b + d| = 1 \tag{4}$$

Assim, basta resolvermos o sistema dado por

$$\begin{cases} -b + d = 0 \\ -a + b = 0 \\ |a + b + d| = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

Separando-se em dois casos, isto é, quando $a + b + d = 1$ ou $a + b + d = 1$, podemos ver que as soluções destes sistemas são:

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{\sqrt{7}}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

ou

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{7}}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

Com isso, os planos buscados são:

$$\pi_1 : \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{\sqrt{7}z}{3} + \frac{1}{3} = 0 \text{ e } \pi_2 : \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{\sqrt{7}z}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

3. [4 pts] Um triângulo equilátero ABC tem lado BC sobre a reta $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$. Sendo $A = (1,\ 0,\ 1)$ um dos seus vértices, determine os outros dois.

Solução:
Primeiramente, vamos calcular a altura do triângulo, que é dada pela distância do ponto A até a reta r, isto é,

$$h = d(A, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|},$$

onde P é um ponto qualquer da reta e $\vec{r}$ é um vetor diretor de r. Sabemos que $\vec{n}_1 = (1,\ -1,\ 1) \perp r$ e $\vec{n}_2 = (-1,\ 1,\ 2) \perp r$, daí, $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-3,\ -3,\ 0)$. Além disso, fazendo $y = 0$, obtemos que $P = (-1,\ 0,\ 1) \in r$, donde $\overrightarrow{AP} = (-2,\ 0,\ 0)$ e $\overrightarrow{AP} \times \vec{r} = (0,\ 0,\ 6)$. Assim,

$$h = d(A, r) = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Por outro lado, como o triângulo é equilátero, sabemos que $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, daí,

$$\frac{\sqrt{3}l}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Para encontrarmos os pontos B e C basta determinarmos os pontos da reta r que estão à distância l da de A, isto é, $d(X, A) = l$, onde X é um ponto arbitrário de r.
Já obtivemos $\vec{r} = (-3,\ -3,\ 0)$ e $P = (-1,\ 0,\ 1)$, daí, um ponto arbitrário da reta tem que ser da forma

$$X = P + t\vec{r} = (-3t - 1,\ -3t,\ 1).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} d(X, A) = l \Rightarrow \sqrt{9t^2 + (3t+2)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} &\Rightarrow 9t^2 + (3t+2)^2 = \frac{8}{3} \\ &\Rightarrow 18t^2 + 12t + \frac{4}{3} = 0 \\ &\Rightarrow t = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ ou } t = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de t em X obtemos:

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3} + 1,\ 1\right) \text{ e } C = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right).$$