Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras – CURO

2ª Prova de Cálculo II
09/12/2022 – 2022-2
Turma C1

Gabarito

---

1. Considere o PVI:

$$\begin{cases} t^3\dfrac{d}{dt}y(t) + 4t^2y(t) = e^{-t}, \\ y(-1) = 0. \end{cases}$$

   (a) [1 pt] Determine o maior intervalo onde a solução do PVI existe.
   (b) [1 pt] Encontre a solução do PVI.

Solução:

(a) Primeiramente, vamos reescrever a EDO como:

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{4y(t)}{t} = \frac{e^{-t}}{t^3}.$$

Podemos ver que a EDO é linear de 1ª ordem. Assim, como $p(t) = \frac{4}{t}$ e $q(t) = \frac{e^{-t}}{t^3}$ são contínuas em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, temos que o maior intervalo onde o PVI tem solução é $(-\infty, 0)$.

(b) Multiplicando-se pelo fator integrante $\mu = e^{\int 4/t\, dt} = e^{\ln(t^4)} = t^4$, temos:

$$\frac{d}{dt}(t^4y(t)) = te^{-t}.$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$t^4y(t) = \int te^{-t}\, dt.$$

Usando integração por partes $u = t$, $du = dt$, $dv = e^{-t}dt$ e $v = -e^{-t}$:

$$\int te^{-t}\, dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\, dt = -te^{-t} - e^{-t} + C_1.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \frac{C_1}{t^4} - \frac{e^{-t}}{t^3} - \frac{e^{-t}}{t^4}.$$

Finalmente, fazendo $y(-1) = 0$, obtemos que $C_1 = 0$, daí a solução do PVI é:

$$y(t) = \frac{(-t-1)\, e^{-t}}{t^4}, \ \forall t \in (-\infty, 0).$$

2. [2 pts] Determine a solução geral da EDO:

$$2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = e^{-t} + 2\sin(t).$$

Solução:

Resolvendo a EDO homogênea: $2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 0.$

$$2\lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1/2$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = C_2e^{-\frac{t}{2}} + C_1e^{-t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Encontrando uma solução particular da EDO não-homogênea:

Para isso, vamos usar o método dos coeficientes a determinar. Vamos supor a solução particular da forma:

$$y_p = C\sin(t) + B\cos(t) + Ate^{-t}$$

Com isso,

$$y_p' = C\cos(t) - B\sin(t) + Ae^{-t} - Ate^{-t},$$
$$y_p'' = -C\sin(t) - B\cos(t) - 2Ae^{-t} + Ate^{-t}$$

Substituindo na EDO não-homogênea, temos:

$$4C\cos(t) - 2C\sin(t) - 2B\cos(t) - 4B\sin(t) - 2Ate^{-t} = e^{-t} + 2\sin(t).$$

A solução geral da EDO é:

$$y(t) = -\frac{3\cos(t)}{5} - \frac{\sin(t)}{5} + (-t + C_1)e^{-t} + C_2e^{-\frac{t}{2}},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. [2 pts] Determina a solução da EDO:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{e^t}{t^3}.$$

Solução:

Resolvendo a EDO homogênea: $\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 0.$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = (C_2t + C_1)e^t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Encontrando uma solução particular da EDO não-homogênea:

Para isso, vamos usar o método da variação dos parâmetros. Vamos supor a solução particular da forma:

$$y_p = v(t)e^t + tu(t)e^t,$$

com a condição:

$$e^t\frac{d}{dt}v(t) + te^t\frac{d}{dt}u(t) = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} y_p' &= e^t\frac{d}{dt}v(t) + v(t)e^t + u(t)e^t + te^t\frac{d}{dt}u(t) + tu(t)e^t \\ &= v(t)e^t + u(t)e^t + tu(t)e^t \end{aligned}$$

$$y_p'' = e^t\frac{d}{dt}v(t) + e^t\frac{d}{dt}u(t) + v(t)e^t + 2u(t)e^t + te^t\frac{d}{dt}u(t) + tu(t)e^t$$

Substituindo na EDO não-homogênea, temos:

$$\left(\frac{d}{dt}v(t) + \frac{d}{dt}u(t) + t\frac{d}{dt}u(t)\right)e^t = \frac{e^t}{t^3}.$$

Daí, temos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v(t) + (1+t)\frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{t^3} \\ \frac{d}{dt}v(t) + t\frac{d}{dt}u(t) = 0, \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\frac{1}{t^2},\ \frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{t^3} \Rightarrow u(t) = -\frac{1}{2t^2} + C_1,\ v(t) = \frac{1}{t} + C_2.d$$

Logo, solução geral da EDO não-homogênea é:

$$y(t) = \frac{e^t}{2t} + C_2te^t + C_1e^t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. [1 pt] Determina a solução geral da EDO:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 7y(t) = 0.$$

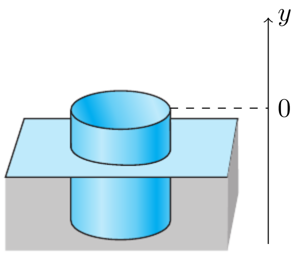
Solução:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{3}i - 2, \quad \lambda_2 = \sqrt{3}i - 2$$

Com isso a solução geral da EDO é:

$$y(t) = C_2e^{-2t}\cos\left(\sqrt{3}t\right) + C_1e^{-2t}\sin\left(\sqrt{3}t\right),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

5. Uma boia cilíndrica de raio r, altura h e densidade de massa ρ está boiando em um fluido de densidade $\rho_f > \rho$, como na figura abaixo. Se a boia é mergulhada ligeiramente e depois solta, ela oscila na posição vertical. Suponha que se pode desprezar o amortecimento viscoso do fluido e a resistência do ar.



(a) [1 pt] Considere o sistema de referência tomando zero como o topo da boia na posição de equilíbrio e positivo para cima, como na figura. Se $y = y(t)$ é a função que descreve a posição do topo da boia neste sistema de referência, deduza uma equação diferencial do movimento da boia e encontre a solução geral.

(b) [1 pt] Determine o período do movimento.

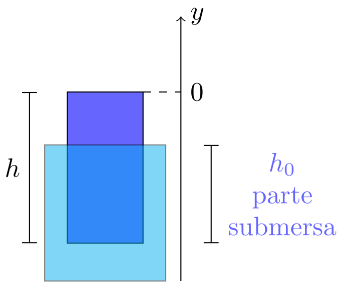
(c) [1 pt] Suponha que a boia esteja mergulhada na água, isto é, $\rho_f = 1$ kg/m^3 e o diâmetro da boia é 60 cm. Sabendo-se que o período de oscilação é 2s, determine a massa da boia.

Solução:

(a) Deduzindo o Modelo:

As únicas forças atuando sobre a boia são o peso e a força de empuxo. Por uma questão de simplicidade, vamos denotar por $A = \pi r^2$ a área da base do cilindro. Neste caso, a força peso é dada por

$$\vec{P} = -mg = -\rho Ahg.$$



Posição de Equilíbrio

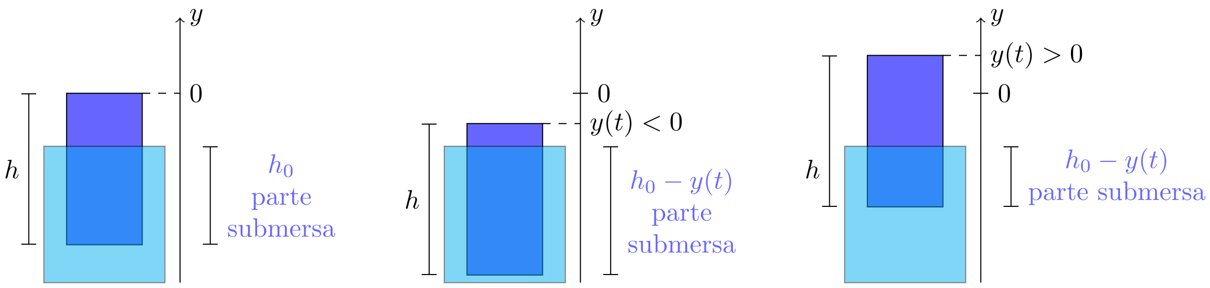
Seja $h_0 < h$ a altura da parte submersa do cilindro na posição de equilíbrio. Nesta posição, as força de empuxo é dada por

$$\vec{E} = m_f g = \rho_f A h_0 g$$

Na posição de equilíbrio a boia não está se movendo, daí, sua aceleração é zero. Portanto, pela 2ª lei de Newton,

$$\vec{E} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \rho_f A h_0 g - \rho A h g = 0 \Rightarrow \rho_f h_0 - \rho h = 0. \tag{1}$$

No segundo momento, quando a boia é mergulhada ligeiramente, ela começa a oscilar. Neste caso, a força de empuxo varia. Se o topo da boia está na posição $y = y(t)$, então a parte da boia submersa tem altura dada por $h_0 - y$, onde $h_0 - h \leq y \leq h_0$.



Posição de Equilíbrio — Boia deslocada para baixo — Boia deslocada para cima

Com isso, o empuxo é dado por

$$\vec{E} = \rho_f A (h_0 - y) g.$$

Novamente, pela 2ª lei de Newton,

$$\begin{aligned} m y'' &= \vec{E} + \vec{P} \\ \Rightarrow \rho A h y'' &= -\rho A h g + \rho_f A (h_0 - y) g. \end{aligned}$$

Cancelando A

$$\rho h y'' = -\rho h g + \rho_f h_0 g - \rho_f y g$$

Usando a equação (1), obtemos o modelo:

$$\rho h y'' + \rho_f g y = 0.$$

<u>Determinando a Solução Geral:</u> Dividindo-se a equação por ρh e definindo $\omega := \sqrt{\frac{\rho_f g}{\rho h}}$, podemos reescrever a EDO na forma:

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Vimos, que esta EDO é o modelo para oscilações livres não amortecidas, cuja solução é da forma:

$$y(t) = R\cos(\omega t - \delta), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde ω é a frequência.

(b) Do modelo anterior sabemos que o período é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_f g}}.$$

(c) A massa da boia é dada por

$$m = \rho A h = \rho \pi r^2 h$$

Do item (b), sabendo que $T = 2$ e $\rho_f = 1$, temos que

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\rho h}{\rho_f g} \Rightarrow 4 = 4\pi^2 \frac{\rho h}{g} \Rightarrow \rho h = \frac{g}{\pi^2}.$$

Substituindo na equação anterior e usando que $r = 0.6$ m, $g = 9.8$ m/s^2 e $\pi \approx 3.14$, temos que

$$m = \frac{gr^2}{\pi} = \frac{0.09g}{\pi} \approx 0.280739135742188 \text{ Kg}.$$