UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE HUMANIDADES E SAÚDE – RHS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – RCN
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS – CURO

2ª chamada da
1ª Prova de Cálculo II
12/12/2022 – 2022-2
Turma C1

Gabarito

---

1. Resolva as integrais:

(a) [1 pt] $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$

(b) [2 pts] $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Solução:

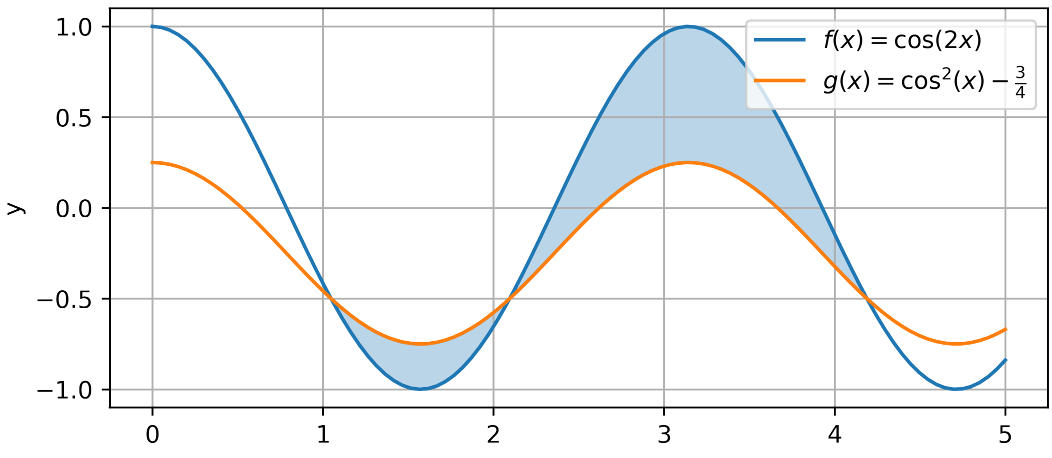
(a) Fazendo a substituição $u = x^2+3$, $du = 2xdx$, temos:

$$\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = -\frac{1}{2}u^{-1} + C = -\frac{1}{2x^2+6} + C.$$

(b) Fazendo a substituição $x = \operatorname{sen}(\theta)$, $dx = \cos(\theta)\,d\theta$, onde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}\cos(\theta)\,d\theta = \int \operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta = \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + C = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\operatorname{asin}(x)}{2} + C$$

2. [4 pts] Determine a área da região sombreada limitada pelas curva $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = \cos^2(x) - \frac{3}{4}$.



Solução:

Primeiramente, vamos encontrar os pontos de interseção dos gráficos das funções, isto é,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x) - \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

Neste caso, a área sombreada é dada por

$$A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos^2(x) - \frac{3}{4} - \cos(2x)\,dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos(2x) - \left(\cos^2(x) - \frac{3}{4}\right)\,dx.$$

Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int \cos(2x) - \left(\cos^2(x) - \frac{3}{4}\right) dx = \int \cos^2(x) - \frac{1}{4}\, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} - \frac{1}{4}\, dx$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Com isso,

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos^2(x) - \frac{3}{4} - \cos(2x)\, dx = -\left(\frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Analogamente,

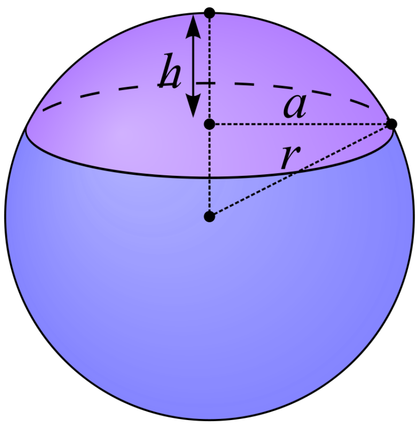
$$A_2 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos(2x) - \left(\cos^2(x) - \frac{3}{4}\right) dx = \left(\frac{x}{4} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

Logo,

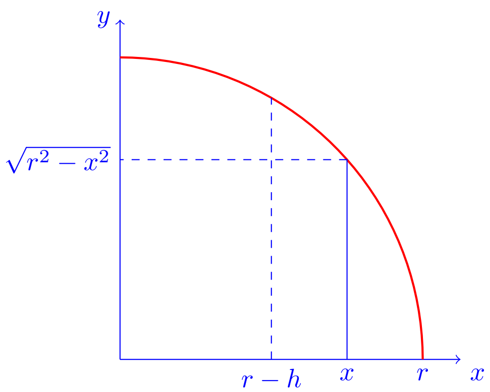
$$A = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. [3 pts] Mostre que o volume da calota esféricas de altura h é:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$



Solução: Usando o método dos discos:



$$V = \int_{r-h}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx = \left(\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_{r-h}^{r}$$
$$= \frac{2\pi r^3}{3} - \pi r^2(-h + r) + \frac{\pi(-h+r)^3}{3}$$
$$= -\frac{\pi h^3}{3} + \pi h^2 r = \frac{\pi h^2(-h + 3r)}{3}.$$