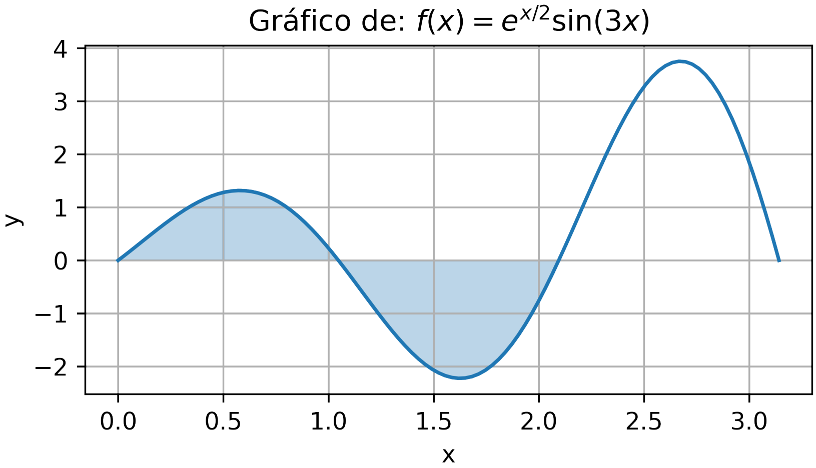
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE HUMANIDADES E SAÚDE – RHS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – RCN
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS – CURO

Verificação Suplementar de Cálculo II
16/12/2022 – 2022-2
Turma C1

Gabarito

1. [4 pts] Abaixo temos o gráfico de $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)$, onde $0 \le x \le \pi$. Determine a área da região sombreada.



Solução:
Primeiramente, vamos encontrar os pontos que f intercepta o eixo x:

$$e^{\frac{x}{2}} \sin(3x) = 0 \Rightarrow \sin(3x) = 0 \Rightarrow 3x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}.$$

Neste caso, a área sombreada é dada por

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\, dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\, dx.$$

Vamos calcular a integral indefinida. Fazendo integração por partes duas vezes, com $u = \sin(3x)$, $du = 3\cos(3x)$, $dv = e^{x/2}dx$, $v = 2e^{x/2}$ temos

$$\begin{aligned}
\int e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\, dx &= 2e^{x/2}\sin(3x) - 6\int e^{x/2}\cos(3x)\, dx \\
&= 2e^{x/2}\sin(3x) - 6\left(2e^{x/2}\cos(3x) + 6\int e^{x/2}\sin(3x)\, dx\right) \\
&= 2e^{x/2}\sin(3x) - 12e^{x/2}\cos(3x) - 36\int e^{x/2}\sin(3x)\, dx
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\, dx = \frac{2\left(\sin(3x) - 6\cos(3x)\right) e^{\frac{x}{2}}}{37} + C.$$

Com isso,

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\, dx = -\left(\frac{2\left(\sin(3x) - 6\cos(3x)\right) e^{\frac{x}{2}}}{37}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{12}{37} + \frac{12e^{\frac{\pi}{6}}}{37}.$$

Analogamente,

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{x}{2}} \sin(3x)\, dx = \left(\frac{2\left(\sin(3x) - 6\cos(3x)\right) e^{\frac{x}{2}}}{37}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{12e^{\frac{\pi}{3}}}{37} - \frac{12e^{\frac{\pi}{6}}}{37}.$$

Logo,

$$A = A_1 - A_2 = \frac{12}{37} + \frac{12e^{\frac{\pi}{3}}}{37} + \frac{24e^{\frac{\pi}{6}}}{37}.$$

2. Considerer o PVI:

$$\begin{cases} \cos(t)\dfrac{d}{dt}y(t) + y(t)\sin(t) = \sin^2(t)\cos^2(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   (a) [1 pt] Determine o maior intervalo onde a solução do PVI existe.

   (b) [2 pts] Encontre a solução do PVI.

Solução:

(a) Primeiramente, vamos reescrever a EDO como:

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t)\tan(t) = \sin^2(t)\cos(t).$$

Podemos ver que a EDO é linear de 1ª ordem. Note que $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é o maior intervalo contendo $t = 0$ onde $p(t) = \tan(t)$ e $q(t) = \sin^2(t)\cos(t)$ são contínuas, logo este é o intervalo buscado.

(b) Multiplicando-se pelo fator integrante $\mu = e^{\int \tan(t)\,dt} = e^{-\log(\cos(t))} = \frac{1}{\cos(t)}$, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos(t)}y(t)\right) = \sin^2(t).$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$\frac{1}{\cos(t)}y(t) = \int \sin^2(t)\,dt.$$

Note que

$$\int \sin^2(t)\,dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = -\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + C_1.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = -\frac{\sin(2t)\cos(t)}{4} + \frac{t\cos(t)}{2} + C_1\cos(t).$$

Finalmente, fazendo $y(0) = 1$, obtemos que $C_1 = 1$, daí a solução do PVI é:

$$y(t) = \cos(t) - \frac{\sin(2t)\cos(t)}{4} + \frac{t\cos(t)}{2}, \quad \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. [3 pts] Determine a solução geral da EDO:

$$2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = te^{2t}.$$

Solução:

Resolvendo a EDO homogênea: $2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = 0.$

$$2\lambda^2 + 0\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}i}{2}$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = C_2\cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right) + C_1\sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Encontrando uma solução particular da EDO não-homogênea:

Para isso, vamos usar o método dos coeficientes a determinar. Vamos supor a solução particular da forma:

$$y_p = (B + At)\, e^{2t}$$

Com isso,

$$y_p' = 2\,(B + At)\, e^{2t} + Ae^{2t},$$

$$y_p'' = 4\,(B + A + At)\, e^{2t}$$

Substituindo na EDO não-homogênea, temos:

$$(9B + 8A + 9At)\, e^{2t} = te^{2t}.$$

A solução geral da EDO é:

$$y(t) = -\frac{8e^{2t}}{81} + \frac{te^{2t}}{9} + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right) + C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2}\right),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$