# Gabarito

---

**Questão 1.** .................................................................. ______/ 2 pts

Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}.$$

**Solução:**

- Caminho $x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

- Caminho $y = x^3$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Como o limite é diferente por caminhos distintos, temos que o limite não existe.

**Questão 2.** .................................................................. ______/ 3 pts

Sejam $z = 4e^x \log(y)$, $x = \log(u\cos(v))$ e $y = u\sin(v)$.

(a) (2 pts) Usando a regra da cadeia, determine $\partial z/\partial u$.

(b) (1 pt) Calcule $\partial z/\partial u$ no ponto $(u, v) = (2, \pi/4)$.

**Solução:**

(a) Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{4e^x \log(y)}{u} + \frac{4e^x \sin(v)}{y} = 4\cos(v) + 4\log(u\sin(v))\cos(v) \end{aligned}$$

(b) Substituindo $u = 2$ e $v = \pi/4$ no item anterior, temos

$$\frac{\partial z}{\partial u}\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(2 + \log(2)\right).$$

**Questão 3.** .................................................................. ______/ 4 pts

Considere superfície $S : xz - yz^3 + yz^2 = 2$.

(a) (2 pts) Encontre o plano tangente no ponto $(2, -1, 1)$.

(b) (2 pts) $z$ pode ser definida implicitamente como função de $x$ e $y$ na vizinhança do ponto $(2,-1)$? Justifique. Em caso afirmativo, calcule as derivadas parciais de $z$.

**Solução:**

(a) Defina $f(x,y,z) = xz - yz^3 + yz^2 - 2$, daí, $S$ é uma superfície de nível de $f$ no nível zero. Com isso, sabemos que o vetor gradiente é ortogonal à $S$. Note que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(z, -z^3 + z^2, x - 3yz^2 + 2yz\right) \Rightarrow \nabla f(2,-1,1) = (1,0,3)\,.$$

Com isso o plano tangente é da forma

$$d + x + 3z = 0.$$

Substituindo o ponto nesta equação temos que

$$d + 5 = 0 \Rightarrow d = -5.$$

Logo, o plano tangente tem equação:

$$x + 3z - 5 = 0.$$

(b) Como $\frac{\partial f}{\partial z}(2,-1,1) = 3 \neq 0$, pelo Teorema da função implícita, temos que $z$ pode ser definida implicitamente como função de $x$ e $y$ na vizinhança do ponto $(2,-1)$. Daí,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{z}{x - 3yz^2 + 2yz}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-z^3 + z^2}{x - 3yz^2 + 2yz}.$$