Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª Prova de Cálculo II
10/07/2023 – 2023-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} t^2 \dfrac{d}{dt} y(t) + 3t y(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

Solução: Como a EDO é linear de primeira ordem, primeiramente, vamos dividi-la por t^2.

$$\frac{d}{dt} y(t) + \frac{3y(t)}{t} = \frac{\sin(t)}{t^3}.$$

Multiplicando-se pelo fator integrante $\mu = e^{\int \frac{3}{t}\, dt} = t^3$, temos:

$$\frac{d}{dt}(t^3 y(t)) = \sin(t).$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$t^3 y(t) = \int \sin(t)\, dt = -\cos(t) + C_1.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \frac{C_1}{t^3} - \frac{\cos(t)}{t^3}.$$

Finalmente, fazendo $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, obtemos

$$y(t) = \frac{-\cos(t) + \frac{\pi^3}{8}}{t^3}, \quad \forall t \in .$$

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Considere a EDO

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\frac{d}{dt} y(t) + (1-b)\, y(t) = 0.$$

Determine a solução geral para os casos em que $b = k^2$, $b = 0$ e $b = -k^2$, onde $k > 0$.

Solução: 1º caso: $b = k^2$.

Neste caso,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 - k, \quad \lambda_2 = -1 + k$$

Com isso a solução geral da EDO é:

$$y(t) = C_2 e^{-t} e^{-kt} + C_1 e^{-t} e^{kt}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2º caso: $b = 0$.

Neste caso,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Com isso a solução geral da EDO é:

$$y(t) = C_2 t e^{-t} + C_1 e^{-t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

3º caso: $b = -k^2$.

Neste caso,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 - ik, \quad \lambda_2 = -1 + ik$$

Com isso a solução geral da EDO é:

$$y(t) = C_2 e^{-t} \cos(kt) + C_1 e^{-t} \sin(kt), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$