Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª chamada da
1ª Prova de Cálculo II
12/07/2023 – 2023-1
Turma E1

Gabarito

Questão 1. .... ________/ 5 pts

Resolva as integrais:

(a) (1 pt) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx$ (b) (2 pts) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$ (c) (2 pts) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,dx$

Solução:

(a) Vamos usar a substituição $u=\cos(x)$, $du=-\sin(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \tan(x)\,dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\log|u| + C\\ &= -\log|\cos(x)| + C = \log|\sec(x)| + C.\end{aligned}$$

(b) Vamos usar a técnica de substituição trigonométrica. Vamos fazer a substituição $x=\sin(\theta)$. Então, $dx=\cos(\theta)\,d\theta$ e $1-x^2 = 1-\sin^2(\theta)=\cos^2(\theta)$.

Substituindo na integral, temos:

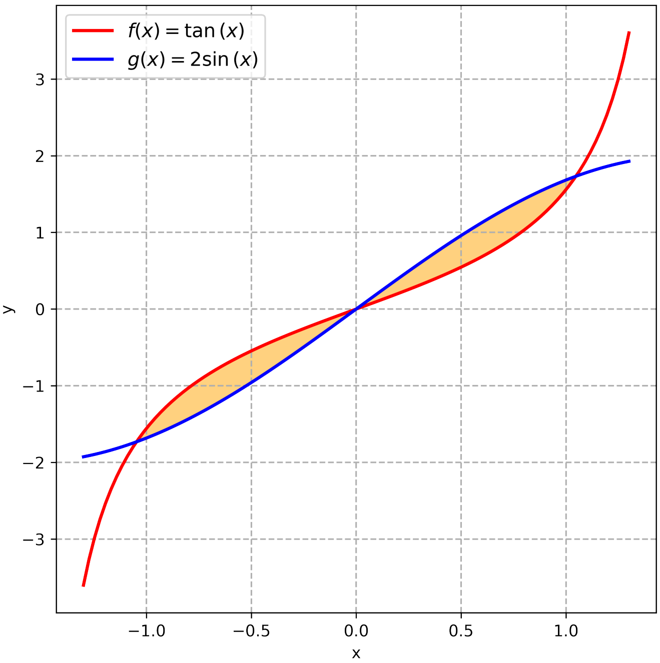
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx &= \int \frac{1}{(\cos^2(\theta))^{3/2}}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)}\,d\theta = \int \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta\\ &= \int \sec^2(\theta)\,d\theta = \tan(\theta) + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C\end{aligned}$$

(c)

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$$

Questão 2. .... ______/ 2 pts

Determine a área da região sombreada limitada pelo gráfico das funções $f(x) = \tan(x)$ e $g(x) = 2\sin(x)$.



Solução: Primeiramente, vamos determinar os pontos de interseção.

$$\tan(x) = 2\sin(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2\sin(x) \Rightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Pelo intervalo dado no gráfico, podemos concluir que estes pontos são

$$x = 0,\ x = -\frac{\pi}{3} \text{ e } x = \frac{\pi}{3}.$$

Pela simetria da região, temos que a área é dada por:

$$A = 2\int_0^{\pi/3} 2\sin(x) - \tan(x)\, dx.$$

Usando as integrais indefinidas obtidas na Questão 1, temos que:

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\, dx = -\log(\cos(x))\Big|_0^{\pi/3} = \log(2)$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/3} 2\sin(x)\, dx = -2\cos(x)\Big|_0^{\pi/3} = 1$$

Logo,

$$A = 2(I_2 - I_1) = 2 - 2\log(2).$$