Gabarito

Questão 1. .... ______/ 2 pts

Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Solução:

- Caminho $x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

- Caminho $y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Como o limite é diferente por caminhos distintos, temos que o limite não existe.

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Sejam $w = xy + \log(z)$, $x = \frac{s^2}{r}$, $y = r + s$ e $z = \cos(r)$

(a) (2 pts) Usando a regra da cadeia, determine $\partial w/\partial s$.

(b) (1 pt) Calcule $\partial w/\partial s$ no ponto $(r, s) = (-1, 2)$.

Solução:

(a) Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= x + \frac{2sy}{r} \\ &= \frac{s^2}{r} + \frac{2s(r+s)}{r}\end{aligned}$$

(b) Substituindo $r = -1$ e $s = 2$ no item anterior, temos

$$\frac{\partial w}{\partial u}(-1, 2) = -8.$$

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Considere superfície $S : x^2 - 2xy - x + y^2 + 3y - z + 4 = 0.$

(a) (2 pts) Encontre o plano tangente no ponto $(2,\ -3,\ 18)$.

(b) (2 pts) z pode ser definida implicitamente como função de x e y na vizinhança do ponto $(2,-3)$? Justifique. Em caso afirmativo, calcule as derivadas parciais de z.

Solução:

(a) Defina $f(x,y,z) = x^2 - 2xy - x + y^2 + 3y - z + 4$, daí, S é uma superfície de nível de f no nível zero. Com isso, sabemos que o vetor gradiente é ortogonal à S. Note que

$$\nabla f(x,y,z) = (2x - 2y - 1, -2x + 2y + 3, -1) \Rightarrow \nabla f(2,-1,1) = (9,-7,-1)\,.$$

Com isso o plano tangente é da forma

$$d + 9x - 7y - z = 0.$$

Substituindo o ponto nesta equação temos que

$$d + 21 = 0 \Rightarrow d = -21.$$

Logo, o plano tangente tem equação:

$$9x - 7y - z - 21 = 0.$$

(b) Como $\frac{\partial f}{\partial z}(2,\ -3,\ 18) = -1 \neq 0$, pelo Teorema da função implícita, temos que z pode ser definida implicitamente como função de x e y na vizinhança do ponto $(2,-3)$. Daí,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2x - 2y - 1}{-1}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-2x + 2y + 3}{-1}.$$